

# ДИНАМИКА, ПРОЧНОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 621.83.06

А.В. КАПИТОНОВ, канд. техн. наук, доц.  
доцент кафедры «Технология машиностроения»  
E-mail: kavbru@gmail.com

Белорусско-Российский университет, г. Могилев, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 07.08.2023.

## РАЗРАБОТКА ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ РАСЧЕТА КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ПОГРЕШНОСТИ И ОЦЕНКИ ЕЕ ВЛИЯНИЯ НА КПД ПЛАНЕТАРНЫХ МЕХАНИЗМОВ С ТЕЛАМИ КАЧЕНИЯ

*При исследовании характеристик механизмов малогабаритных приводов важной задачей является разработка путей повышения КПД механизма. В статье рассматриваются теоретические вопросы, связанные с оценкой влияния кинематической погрешности на КПД передач с телами качения. В результате исследований получена обобщенная динамическая модель планетарных шариковых и роликовых механизмов с учетом кинематических погрешностей, связывающая погрешности изготовления или упругие деформации и кинематическую погрешность передачи. Выведены математические зависимости динамической модели механизмов с телами качения. Проведена апробация модели на примере расчета кинематической погрешности одноступенчатой планетарной шариковой передачи. Получены полиномиальные уравнения с постоянными коэффициентами для определения кинематических погрешностей от влияния погрешностей изготовления звеньев передачи. Установлено, что для разных кинематических схем, передаточных отношений и угловых скоростей планетарных механизмов с телами качения КПД передачи может значительно изменяться в зависимости от ее кинематической погрешности. Для передаточных отношений от 1,5 до 5, частот вращения ведущего вала от 1500 до 3000 мин<sup>-1</sup> в зависимости от наибольших значений кинематической погрешности от 0,00175 до 0,0349 рад КПД передачи в пределах оборота ведомого вала может уменьшаться от 0,93 до 11 %. При этом наибольшие значения КПД имеют передачи, построенные по шестой кинематической схеме. Среднее значение КПД за оборот ведомого вала от влияния кинематических погрешностей может уменьшаться до 5 %. Приведены графики зависимостей КПД передач от их кинематических погрешностей.*

**Ключевые слова:** динамическая модель, механизмы с телами качения, КПД, кинематическая погрешность

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2023-4-65-16-24>

**Введение.** Важной задачей при исследовании кинематических и динамических характеристик механизмов с телами качения малогабаритных приводов является определение причин снижения их КПД и разработка способов его повышения [1, 2]. Для зубчатых передач, как известно, одной из основных причин снижения КПД является неточное изготовление деталей зацепления [3]. В зависимости от степеней точности зубчатых колес

и значений КПД передач проектируют механизмы, работающие с разными скоростями и мощностями [3, 4]. В работе [5] рассмотрено неравномерное распределение нагрузки, вызванное изменением жесткости пары зубьев цилиндрических колес, что оказывает влияние на величину потерь на трение из-за относительного скольжения в любой точке контакта. В [6] дан всесторонний анализ эффективности зацепления в зависимости от контактных

напряжений в приводах с червячными передачами различной геометрии. В этой работе также учитывается влияние геометрических параметров и скорости вращения червячного вала на КПД передачи. В источнике [7] при исследовании эффективности трансмиссии с поворотным циклоидальным редуктором с телами качения для промышленного робота определены его оптимальные параметры конструкции и геометрии зацепления, обеспечивающие более плавную работу механизма с меньшими потерями на трение. В работе [8] выявлены причины возникновения избыточных связей в составе передач с промежуточными телами качения. Показана возможность создания механической передачи, обладающей высоким коэффициентом полезного действия. В [9] изучено влияние производственных ошибок на работу трансмиссионного узла с эксцентриковой передачей качения с точки зрения крутящего момента и КПД. Рассматривалась точность изготовления кулачковых колес. В [10] проведена экспериментальная оценка эффективности и кинематической точности сферической роликовой передачи. В работе [11] показано, что при наличии погрешностей изготовления и упругих деформаций звеньев происходит снижение значения КПД и резкий рост значений кинематической погрешности вращения выходного вала в зацеплении эксцентриковых передач с формой зуба сателлита, выполненной по укороченной эпициклоиде.

Анализ публикаций показал, что при исследовании эффективности различных типов механических передач в основном рассматривались вопросы, связанные с влиянием конструктивных, геометрических и силовых параметров на КПД механизма. При этом влияние точности изготовления деталей передачи на ее КПД либо не рассматривалось, либо проводилось без теоретических исследований, связывающих КПД и кинематическую погрешность.

Для планетарных передач с промежуточными телами качения — шариками или роликами, у которых в зацеплении находятся ведущее, ведомое и неподвижное звенья, включая сателлиты, как и для зубчатых планетарных передач, точность изготовления удобно оценивать через кинематическую погрешность как комплексный показатель. Чтобы найти зависимость КПД от кинематической погрешности передачи и тем самым от точности изготовления ее деталей необходимо рассматривать кинематическую погрешность, используя уравнение динамики. Поэтому разработка динамической модели и установление аналитической зависимости КПД от кинематической погрешности передачи является актуальной задачей.

**Обобщенная динамическая модель планетарных механизмов с телами качения.** Уравнение движения в энергетической форме [12]:

$$\frac{J_{\Sigma} \omega^2}{2} - \frac{J_{\Sigma \text{нач}} \omega_{\text{нач}}^2}{2} = \int_{\varphi_{\text{нач}}}^{\varphi} M_{\Sigma} d\varphi, \quad (1)$$

где  $J_{\Sigma}$  — суммарный приведенный момент инерции механизма;  $\omega$  — угловая скорость звена механизма (передачи);  $J_{\Sigma \text{нач}}$  — суммарный приведенный начальный момент инерции механизма;  $\omega_{\text{нач}}$  — начальная угловая скорость звена механизма (передачи);  $M_{\Sigma}$  — суммарный приведенный момент движущих сил, эквивалент всей нагрузки, приложенной к механизму;  $\varphi$  — угловая координата, угол поворота звена.

Левая часть формулы (1) — изменение кинетической энергии механизма в начале и в конце рассматриваемого времени движения, правая часть — работа всех сил (сумма работ), действующих на механизм.

Продифференцировав уравнение (1) по координате  $\varphi$ , при этом переменными величинами являются  $\omega$  и  $J_{\Sigma}$ , получим уравнение движения в дифференциальной форме:

$$J_{\Sigma} \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_{\Sigma}}{d\varphi} = M_{\Sigma}. \quad (2)$$

Если переменной величиной является только угловая скорость  $\omega$ , при этом  $J_{\Sigma} = \text{const}$ , то второе слагаемое левой части формулы (2) равно нулю и тогда уравнение движения примет вид:

$$J_{\Sigma} \frac{d\omega}{dt} = M_{\Sigma} \quad \text{или} \quad J_{\Sigma} \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_{\Sigma}; \quad (3)$$

$$M_{\Sigma} = \sum M_i(\vec{F}_i) = \pm M_1 + M_2 - M_3, \quad (4)$$

где  $M_i(\vec{F}_i)$  — момент внешних сил  $F_i$   $i$ -го звена;  $M_1, M_2, M_3$  — моменты внешних сил на ведущем, неподвижном и ведомом звеньях соответственно; «+» — для первой группы точек пересечения кривых ведущей и неподвижной (ведомой) дорожек; «-» — для второй группы точек пересечения кривых ведущей и неподвижной (ведомой) дорожек [1].

Уравнение движения механизма передачи в общем виде на основании метода кинетостатики имеет вид:

$$\sum \vec{M}_i(\vec{F}_i) + \sum \vec{M}_i^n(\vec{F}_i^n) = 0, \quad (5)$$

где  $\vec{M}_i(\vec{F}_i)$  — вектор момента внешних сил  $F_i$   $i$ -го звена;  $\vec{M}_i^n(\vec{F}_i^n)$  — вектор момента сил инерции  $F_i^n$   $i$ -го звена.

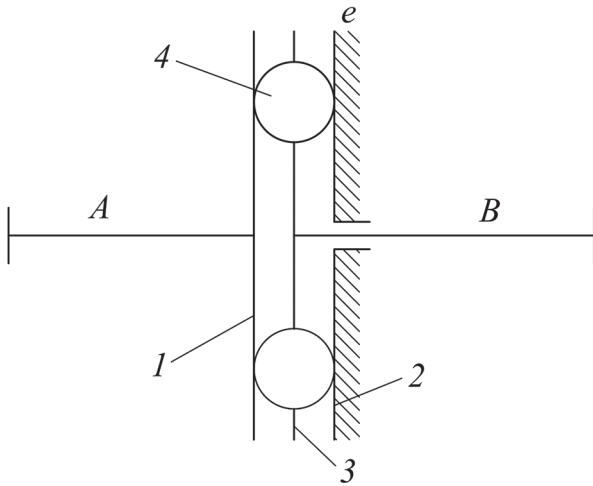
Запишем уравнение (5) с учетом (3), (4) и приведенного момента инерции к ведомому звену  $J_{\Sigma} = J_3^{\text{np}}$ :

$$J_3^{\text{np}} = \sum_i J_{3i} + \sum_i J_{1i} \frac{\omega_{1i}^2}{\omega_{3i}^2}; \quad (6)$$

$$\pm M_1 + M_2 - M_3 = \frac{d\omega}{dt} \left( \sum_i J_{3i} + \sum_i J_{1i} \frac{\omega_{1i}^2}{\omega_{3i}^2} \right), \quad (7)$$

где  $J_{3i}$  —  $i$ -й момент инерции ведомого звена;  $J_{1i}$  —  $i$ -й момент инерции ведущего звена;  $\omega_{3i}$  —  $i$ -я угловая скорость ведомого звена;  $\omega_{1i}$  —  $i$ -я угловая скорость ведущего звена.

На рисунке 1 показана шестая кинематическая схема одноступенчатого планетарного шарикового



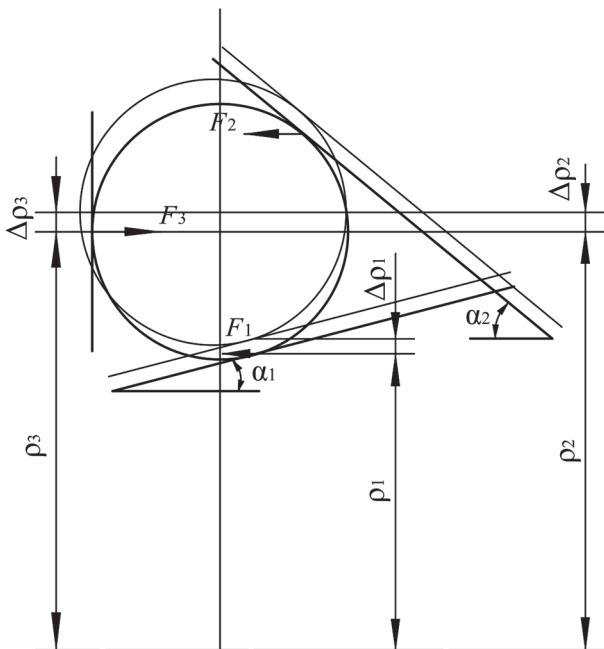
**Рисунок 1 — Кинематическая схема одноступенчатого планетарного шарикового редуктора:**  
 1 — звено, несущее  $z_1$ -периодную беговую дорожку; 2 — звено с  $z_2$ -периодной дорожкой; 3 — водило; 4 — сателлит-шарик  
**Figure 1 — Kinematic diagram of a single-stage planetary ball gearbox:**  
 1 — link with  $z_1$ -period race; 2 — link with  $z_2$ -period race; 3 — carrier; 4 — satellite-ball

редуктора по классификации [15]. Редуцирующий механизм, построенный по этой схеме, имеет наибольшее передаточное отношение.

Кинематическая схема (см. рисунок 1) содержит планетарный механизм с тремя звеньями: ведущим *A*; ведомым *B* и опорным *e*.

На рисунке 2 представлена схема, соответствующая кинематической схеме на рисунке 1, для расчета кинематической погрешности передачи с учетом геометрических, точностных и силовых параметров.

На схеме показана ведущая беговая дорожка с углом подъема  $\alpha_1$ , неподвижная беговая дорожка



**Рисунок 2 — Схема для расчета кинематической погрешности передачи**  
**Figure 2 — Diagram for calculating the kinematic error of the transmission**

с углом подъема  $\alpha_2$ , радиус-векторы  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  точек контакта сателлита-шарика с беговыми дорожками и с водило, приращение радиус-векторов  $\Delta\rho_i$  каждого звена, внешние силы  $F_1, F_2, F_3$ , действующие на сателлит-шарик со стороны беговых дорожек и водила.

При работе передачи под нагрузкой возникают упругие деформации в звеньях. При этом центр сателлита смещается от номинальной (идеальной) траектории движения, вызывая увеличение или уменьшение радиус-векторов  $\rho_i$ . Смещение сателлита равно приращению  $\Delta\rho_i$ , различному для каждого звена. Такое же смещение возникает и из-за погрешностей изготовления передачи. Выведем уравнения движения, которые учитывают упругие деформации, а также погрешности изготовления, проявляющиеся в динамике, деталей передачи с учетом моментов сил, действующих на звенья.

Учитывая приращение радиус-вектора каждого звена  $\Delta\rho_i$  к среднему радиусу  $R$  кривой беговой дорожки, левую часть уравнения (7) можно записать:

$$M_\Sigma = \pm M_1 + M_2 - M_3 = F_1(R + \Delta\rho_1) + F_2(R + \Delta\rho_2) - F_3(R + \Delta\rho_3), \quad (8)$$

тогда уравнение (7) принимает вид:

$$\frac{d\omega_3}{dt} = \frac{F_1R + F_1\Delta\rho_1 + F_2R + F_2\Delta\rho_2 - F_3R - F_3\Delta\rho_3}{\sum_i J_{3i} + \sum_i J_{li} \frac{\omega_{li}^2}{\omega_3^2}} \quad (9)$$

Исключив выражение  $F_1R + F_2R - F_3R = 0$  из формулы (9), и учитывая  $J_\Sigma = J_3^{np} = \sum_i J_{3i} + \sum_i J_{li} \frac{\omega_{li}^2}{\omega_3^2}$ ,

получим уравнение

$$\frac{d\omega_3}{dt} = \frac{F_1\Delta\rho_1 + F_2\Delta\rho_2 - F_3\Delta\rho_3}{J_3^{np}} \quad (10)$$

или

$$\frac{d\omega_3}{dt} = \frac{\Delta M_1 + \Delta M_2 - \Delta M_3}{J_\Sigma}, \quad (11)$$

где  $\Delta M_i$  — приращение момента  $i$ -го звена.

Проинтегрируем уравнение (10):

$$\omega_3 = \int \frac{F_1\Delta\rho_1 + F_2\Delta\rho_2 - F_3\Delta\rho_3}{J_\Sigma} dt. \quad (12)$$

В результате получим формулу изменения угловой скорости  $\omega_3 = \Delta\omega_3$  выходного звена, которая применима для любых типов кривых (синусоиды, циклоиды, смещенной окружности, спирали Архимеда):

$$\Delta\omega_3 = \frac{F_1\Delta\rho_1 + F_2\Delta\rho_2 - F_3\Delta\rho_3}{J_\Sigma} t, \quad (13)$$

где  $t$  — время, за которое происходит изменение угловой скорости  $\Delta\omega_3$ .

Проинтегрировав уравнение (13), учитывая  $\omega_3 = d\varphi/dt$ , получим изменение угла поворота  $\varphi = \Delta\varphi$  выходного звена передачи от времени  $t$ :

$$\varphi = \frac{F_1 \Delta \rho_1 + F_2 \Delta \rho_2 - F_3 \Delta \rho_3}{J_{\Sigma}} \int t dt; \quad (14)$$

$$F_{к.п.} = \Delta \varphi = \frac{F_1 \Delta \rho_1 + F_2 \Delta \rho_2 - F_3 \Delta \rho_3}{2J_{\Sigma}} t^2; \quad (15)$$

$$F_{к.п.} = \Delta \varphi = \frac{F_1 \Delta \rho_1 + F_2 \Delta \rho_2 - F_3 \Delta \rho_3}{2 \left( \sum_i J_{3i} + \sum_i J_{1i} \frac{\omega_{1i}^2}{\omega_{3i}^2} \right)} t^2. \quad (16)$$

Время  $t$  в уравнениях (15) и (16) соответствует изменению угла поворота  $\Delta \varphi$ .

Формула (16) динамической модели движения учитывает неравномерность вращения звеньев передачи из-за погрешности угла поворота  $\Delta \varphi$ , вызванной погрешностями изготовления или упругими деформациями  $\Delta \rho_i$ , и позволяет рассчитать кинематическую погрешность  $F_{к.п.}$  различных конструкций планетарных передач с промежуточными телами качения.

**Применение уравнения движения.** Полученные математические зависимости динамической модели механизмов с телами качения применены для расчета кинематической погрешности одноступенчатой планетарной шариковой передачи с передаточным отношением, равным 7, мощностью 1,5 кВт, частотой вращения ведущего вала 1500 мин<sup>-1</sup>, со средним радиусом беговых дорожек 41,5 мм, построенной на основе конструкций [13, 14], в соответствии с кинематической и расчетной схемами (см. рисунки 1 и 2) и представленной на рисунке 3.

Силовые, точностные и массогабаритные параметры передачи рассчитаны и приняты как исходные данные для определения ее кинематической погрешности и приведены в таблице 1.

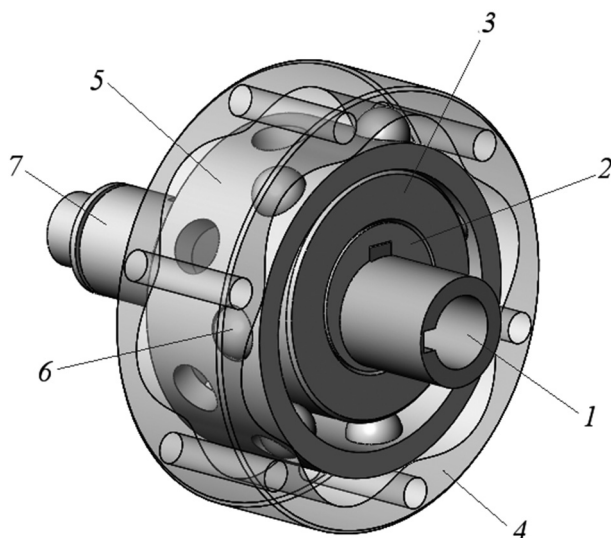


Рисунок 3 — Планетарная шариковая передача:

1 — ведущий вал; 2 — эксцентрик; 3 — подшипник; 4 — колесо с многопериодной дорожкой; 5 — водило; 6 — сателлиты-шарики; 7 — ведомый вал

Figure 3 — Planetary ball transmission: 1 — drive shaft; 2 — eccentric; 3 — bearing; 4 — wheel with multi-period race; 5 — carrier; 6 — satellite-balls; 7 — driven shaft

Рассчитав, с учетом исходных данных таблицы 1, по формуле (16) кинематическую погрешность планетарной шариковой передачи с разными значениями погрешностей изготовления ведущего  $\Delta \rho_1$ , неподвижного  $\Delta \rho_2$  и ведомого  $\Delta \rho_3$  звеньев, получены значения кинематических погрешностей передачи, представленные в таблице 2.

Используя данные таблицы 2, установлена зависимость между погрешностями изготовления звеньев и кинематической погрешностью передачи в виде полинома второй степени:

$$F_{к.п.} = \Delta \varphi = 0,0073x^2 + 0,106x + 9 \cdot 10^{-5}, \quad (17)$$

где  $x$  — суммарная погрешность изготовления звеньев передачи:

$$x = \Delta \rho_{\Sigma} = \sqrt{\Delta \rho_1^2 + \Delta \rho_2^2 + \Delta \rho_3^2}. \quad (18)$$

Также установлена полиномиальная зависимость между кинематической погрешностью ведущего звена и погрешностями его изготовления:

$$\Delta \varphi_1 = 4 \cdot 10^{-15}x^2 + 0,0367x - 1 \cdot 10^{-17}. \quad (19)$$

Исключая малые величины в формуле (19), получим

$$\Delta \varphi_1 = 0,0367x, \quad (20)$$

Таблица 1 — Исходные данные для расчета кинематической погрешности

Table 1 — Initial data for calculating the kinematic error

Название и обозначение параметра	Значение параметра
Внешняя сила со стороны ведущей беговой дорожки $F_1$ , Н	230,2
Внешняя сила со стороны неподвижной беговой дорожки $F_2$ , Н	1058,9
Внешняя сила со стороны водила $F_3$ , Н	1289,1
Смещение сателлита из-за погрешностей изготовления ведущего $\Delta \rho_1$ , неподвижного $\Delta \rho_2$ и ведомого $\Delta \rho_3$ звена, мм	0,1; 0,1; 0,08
Момент инерции ведомого звена $\Sigma J_{3i}$ , кг·м <sup>2</sup>	0,00137
Момент инерции ведущего звена $\Sigma J_{1i}$ , кг·м <sup>2</sup>	0,07084
Угловая скорость ведущего звена $\omega_1$ , с <sup>-1</sup>	157,08
Угловая скорость ведомого звена $\omega_3$ , с <sup>-1</sup>	22,44
Время изменения угла поворота ведомого вала $t$ , с	0,01

Таблица 2 — Кинематическая погрешность планетарной шариковой передачи в зависимости от погрешностей изготовления ее звеньев

Table 2 — Kinematic error of planetary ball transmission depending on manufacturing errors of its links

Кинематическая погрешность передачи $\Delta \varphi$ , рад	Суммарная погрешность изготовления звеньев передачи $x$ , мм
0,00873	0,162
0,00698	0,130
0,00524	0,097
0,00349	0,065
0,00175	0,032

где  $x$  — суммарная погрешность изготовления ведущего звена передачи,  $x = \Delta r_1$ .

При расчете кинематической погрешности передачи по формуле (16) приведенный момент инерции ведущего звена  $\sum_i J_{li} \frac{\omega_{li}^2}{\omega_{3i}^2}$  не учитывался,

т. к. он имеет большое значение по сравнению с моментом инерции ведомого вала и при этом принято, что ведущий вал вращается равномерно по отношению к ведомому.

Время изменения угла поворота ведомого вала  $t$  за оборот может быть постоянной величиной, равной периоду колебаний с частотой, кратной передаточному отношению. Например, для передачи с передаточным отношением 1,5 и частотой вращения ведущего вала  $3000 \text{ мин}^{-1}$  время полного оборота ведомого вала составит 0,03 с, а время изменения угла поворота ведомого вала — 0,01 с. Такое же значение  $t$  можно получить и для других передаточных отношений и частот вращения. Это допущение принято на основе анализа графиков кинематических погрешностей передач данного типа [14–16].

Так как по формуле (16) можно рассчитать кинематическую погрешность передачи  $F_{к.п.}$  в зависимости от ее погрешностей изготовления или упругих деформаций, а соотношения остальных параметров в формуле (16) могут быть постоянными величинами, то зависимости (17)–(20), полученные на основе расчета кинематической погрешности, представленной выше планетарной шариковой передачи могут применяться и для других конструкций передач данного типа с различными геометрическими, силовыми и массогабаритными параметрами. Параметр  $x$  в зависимостях (17)–(20) может относиться как к погрешностям изготовления, так и к упругим деформациям звеньев.

**Оценка влияния кинематической погрешности на КПД планетарных передач с промежуточными телами качения.** Решив дифференциальное уравнение (3) и подставив начальные условия движения после интегрирования, получим уравнение, описывающее кинематическую погрешность передачи или иначе погрешность угла поворота выходного вала от времени за полный его оборот:

$$\Delta\varphi(t) = \omega_0 t + \frac{M_\Sigma}{2J_\Sigma} t^2, \quad (21)$$

где  $\omega_0$  — начальная угловая скорость.

При решении обратной задачи найдем суммарный момент всех действующих внешних сил  $M_\Sigma$  на звенья передачи, равный суммарному моменту сил инерции  $M_\Sigma^и$ .

$$M_\Sigma(t) = M_\Sigma^и(t) = \frac{2J_\Sigma(\Delta\varphi(t) - \omega_0 t)}{t^2}. \quad (22)$$

Учитывая зависимость (5), получим

$$M_1(t)i - M_3(t) = M_\Sigma^и(t), \quad (23)$$

где  $i$  — передаточное отношение. Тогда

$$M_1(t)i - M_3(t) = \frac{2J_\Sigma(\Delta\varphi(t) - \omega_0 t)}{t^2}. \quad (24)$$

Согласно [15] КПД передачи определяется по формулам:

$$\eta = \frac{W_{\text{вм}}}{W_{\text{вм}} + W_{\text{п}}} \cdot 100\%; \quad (25)$$

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{W_{\text{п}}}{W_{\text{вм}}}} \cdot 100\%, \quad (26)$$

где  $W_{\text{вм}}$  — мощность на ведомом звене;  $W_{\text{п}}$  — потери мощности на ведущем, неподвижном и ведомом звеньях.

Скорости трения на поверхностях контакта деталей зацепления звеньев [15]:

$$v_1 = \frac{\rho(\omega_1 - \omega_3)}{\cos \alpha_1}; \quad v_2 = \frac{\rho\omega_3}{\cos \alpha_2}; \quad v_3 = \rho\omega_3 \text{tg} \alpha_2, \quad (27)$$

где  $v_1, v_2, v_3$  — скорости трения на поверхностях контакта ведущего, неподвижного и ведомого звеньев соответственно;  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — углы подъема ведущей и неподвижной беговых дорожек соответственно.

Потери мощности на ведущем  $W_{\text{п1}}$ , неподвижном  $W_{\text{п2}}$  и ведомом  $W_{\text{п3}}$  звеньях, выраженные через момент ведущего вала, принимая углы между векторами сил трения равными нулю, представим зависимостями:

$$W_{\text{п1}} = \frac{M_1 f_1 \rho (\omega_1 - \omega_3)}{R \sin \alpha_1 \cos \alpha_1}; \quad (28)$$

$$W_{\text{п2}} = \frac{M_1 f_2 \rho \omega_3 \text{ctg} \alpha_1}{R \cos^2 \alpha_2}; \quad (29)$$

$$W_{\text{п3}} = \frac{M_1 f_3 \rho \omega_3 \sin \varepsilon \text{tg} \alpha_2}{R \sin \alpha_1 \cos \alpha_2}, \quad (30)$$

где  $\varepsilon$  — суммарный угол подъема беговых дорожек,  $\varepsilon = \alpha_1 + \alpha_2$ ;  $f_1, f_2, f_3$  — коэффициенты трения на площадках контакта сателлита-шарика с ведущим, неподвижным и ведомым звеньями передачи соответственно.

Мощность на ведомом звене:

$$W_{\text{вм}} = \frac{M_3 \omega_3 \rho}{R}. \quad (31)$$

Подставив в формулу (31) выражение (23), выразив в нем  $M_3$ , получим

$$W_{\text{вм}} = \frac{(M_1(t)i - M_\Sigma^и(t))\omega_3 \rho}{R}. \quad (32)$$

Найдем потери мощности передачи, приведенные к мощности на ведомом звене:

$$\psi = \frac{W_{\text{п}}}{W_{\text{вм}}} = \frac{\left[ \frac{M_1 f_1 \rho (\omega_1 - \omega_3)}{R \sin \alpha_1 \cos \alpha_1} + \frac{M_1 f_2 \operatorname{ctg} \alpha_1 \rho \omega_3}{R \cos^2 \alpha_2} \right]}{(M_1(t)i - M_{\Sigma}^n(t))\omega_3 \rho} + \frac{\left[ \frac{M_1 f_3 \rho \omega_3 \sin \varepsilon \operatorname{tg} \alpha_2}{R \sin \alpha_1 \cos \alpha_2} \right]}{(M_1(t)i - M_{\Sigma}^n(t))\omega_3 \rho} \quad (33)$$

Преобразуем выражение (33), подставив в него суммарный момент инерции  $M_{\Sigma}^n$  из уравнения (22), при этом примем начальную скорость  $\omega_0 = 0$  и получим окончательное уравнение относительных потерь мощности:

$$\psi = \frac{W_{\text{п}}}{W_{\text{вм}}} = \frac{\frac{f_1(i-1)}{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1} + \frac{f_2 \operatorname{ctg} \alpha_1}{\cos^2 \alpha_2} + \frac{f_3 \sin \varepsilon \operatorname{tg} \alpha_2}{\sin \alpha_1 \cos \alpha_2}}{i - \frac{2J_{\Sigma} \Delta \varphi(t)}{t^2 M_1}} \quad (34)$$

Подставив уравнение (34) в формулу (26), получим значения КПД передачи в зависимости от ее кинематической погрешности  $\Delta \varphi(t)$ , изменяющейся за оборот выходного звена.

Таким образом, разработан метод оценки влияния кинематической погрешности на КПД планетарных передач с промежуточными телами качения. Суть метода заключается в расчете КПД передачи с учетом погрешности угла поворота выходного вала за полный его оборот, рассматриваемой в динамической модели по выведенным выше математическим зависимостям. При этом кинематическая погрешность, равная погрешностям углов поворота звеньев передачи, получена из их моментов инерции при неравномерном вращении звеньев.

На рисунке 4 представлены графики зависимости КПД от наибольших значений (которые можно получить при разной точности изготовления) кинематической погрешности планетарных передач с телами качения, построенных по первой, четвертой и шестой кинематическим схемам [13–16] с различными передаточными отношениями и частотой вращения ведущего и ведомого валов. Графики получены в результате расчетов по представленному выше методу, включающему математические зависимости (21)–(34) и данные таблицы 3.

Как видно из графиков на рисунке 4, с увеличением значений кинематической погрешности КПД передачи уменьшается. У передач, построенных по первой и четвертой кинематическим схемам с небольшим передаточным отношением  $i=1,5$  и большими значениями кинематической погрешности до 0,0349 рад, значения КПД в пределах полного оборота ведомого вала могут

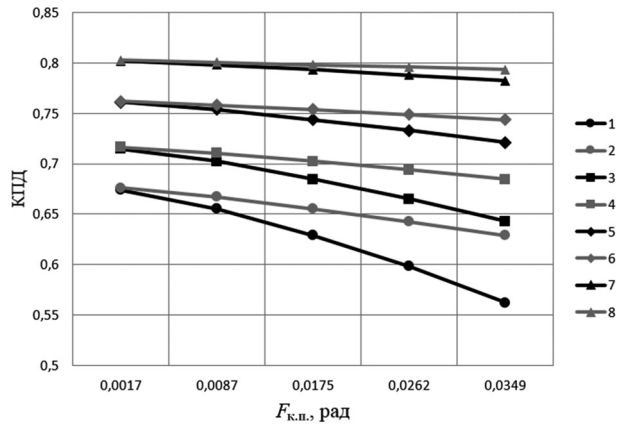


Рисунок 4 — Графики зависимости КПД от кинематической погрешности планетарных передач с телами качения:

$i$  — передаточное отношение механизма;  $n$  — частота вращения ведущего вала; № — номер кинематической схемы планетарного механизма [15]; 1 —  $i=1,5, n=3000 \text{ мин}^{-1}$ , № 4; 2 —  $i=1,5, n=1500 \text{ мин}^{-1}$ , № 4; 3 —  $i=2, n=3000 \text{ мин}^{-1}$ , № 1; 4 —  $i=2, n=1500 \text{ мин}^{-1}$ , № 1; 5 —  $i=3, n=3000 \text{ мин}^{-1}$ , № 6; 6 —  $i=3, n=1500 \text{ мин}^{-1}$ , № 6; 7 —  $i=5, n=3000 \text{ мин}^{-1}$ , № 6; 8 —  $i=5, n=1500 \text{ мин}^{-1}$ , № 6

Figure 4 — Graphs of dependence of efficiency on kinematic error of planetary transmissions with rolling bodies:

$i$  — gear ratio of the mechanism;  $n$  — rotation frequency of the driving shaft; № — number of the kinematic scheme of the planetary mechanism [15]; 1 —  $i=1.5, n=3,000 \text{ rpm}$ , no. 4; 2 —  $i=1.5, n=1,500 \text{ rpm}$ , no. 4; 3 —  $i=2, n=3,000 \text{ rpm}$ , no. 1; 4 —  $i=2, n=1,500 \text{ rpm}$ , no. 1; 5 —  $i=3, n=3,000 \text{ rpm}$ , no. 6; 6 —  $i=3, n=1,500 \text{ rpm}$ , no. 6; 7 —  $i=5, n=3,000 \text{ rpm}$ , no. 6; 8 —  $i=5, n=1,500 \text{ rpm}$ , no. 6

Таблица 3 — Параметры для расчета зависимостей КПД от наибольших значений кинематической погрешности планетарных передач с телами качения, представленных на рисунке 4

Table 3 — Parameters for calculating the dependences of efficiency on the largest values of kinematic error of planetary transmissions with rolling bodies, presented in Figure 4

Название и обозначение параметра	Значение параметра
Номер кинематической схемы	1; 4; 6
Передаваемая мощность $W$ , Вт	500
Передаточное отношение $i$	1,5; 2; 3; 5
Частота вращения ведущего вала $n$ , $\text{мин}^{-1}$	1500; 3000
Момент внешних сил на ведущем звене $M_1^n = 3000, M_1^n = 1500$ , Нм	1,59; 3,18
Коэффициент трения на площадках контакта сателлита-шарика с ведущим $f_1$ , неподвижным $f_2$ и ведомым $f_3$ звеном передачи	0,03
Угол подъема ведущей $\alpha_1$ и неподвижной $\alpha_2$ беговой дорожки, град	12; 51,9
Приведенный момент инерции $J_{\Sigma}$ , $\text{кг} \cdot \text{м}^2$	0,00137
Кинематическая погрешность передачи $\Delta \varphi$ , рад	0,001745; 0,008727; 0,017453; 0,02618; 0,034907
Время изменения угловой скорости ведомого звена $t$ , с	0,01

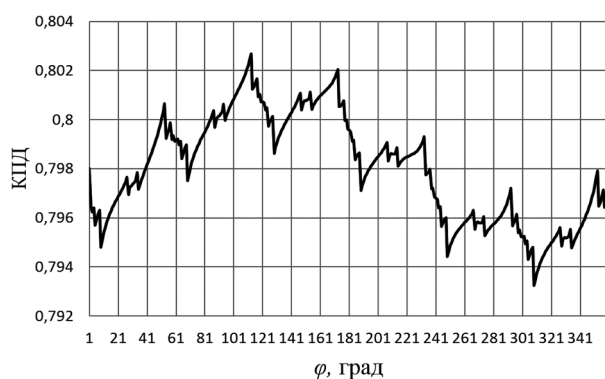


Рисунок 5 — График изменения КПД за оборот ведомого вала из-за наличия кинематических погрешностей  
Figure 5 — Graph of efficiency variation per revolution of the driven shaft due to kinematic errors

уменьшаться до 11 %, а среднее значение КПД — до 5,5 %, что показывает график 1 на рисунке 4.

На рисунке 5 показан график изменения КПД планетарной передачи за оборот ведомого вала ( $\varphi = 360^\circ$ ) из-за наличия кинематических погрешностей. График получен в результате расчетов по уравнениям (26) и (34). При этом в расчетах приняты следующие условия: планетарная передача построена по шестой кинематической схеме; наибольшая кинематическая погрешность составляет 0,0169 рад ( $0,97^\circ$ ); передаточное отношение механизма  $i = 5$ ; частота вращения ведущего звена  $n_1 = 3000$  об/мин. Значения функции кинематической погрешности  $\Delta\varphi(t)$  взяты из разработанной кинематической модели с учетом исследований [17, 18].

Разность между наибольшим и наименьшим значением КПД за оборот ведомого вала передачи составила 0,94 %, отклонение от номинального (без кинематических погрешностей) значения КПД 0,5 %. При этом наибольший КПД передачи 79,8 %. Результаты на рисунке 5 согласуются с графиком, представленным на рисунке 4. Разработанный метод позволяет оценить влияние кинематических погрешностей на КПД передачи.

**Заключение.** Разработана обобщенная динамическая модель планетарных механизмов с телами качения с учетом кинематических погрешностей, связывающая погрешности изготовления и кинематическую погрешность передачи. Получены полиномиальные уравнения с постоянными коэффициентами для определения кинематических погрешностей, возникающих из-за погрешностей изготовления звеньев передачи. Теоретически проведена оценка влияния кинематической погрешности на КПД планетарных передач с промежуточными телами качения, при этом установлено, что для разных кинематических схем, передаточных отношений и угловых скоростей КПД передачи в пределах одного оборота ведомого вала может изменяться до 11 % в зависимости от кинематических погрешностей, наибольшие значения которых достигают 0,0349 рад. С уменьшением кинематических погрешностей передач

до 0,00175 рад, а также для передаточных отношений от 5 и более и угловой скорости на ведущем звене, не превышающей  $1500 \text{ мин}^{-1}$ , для шестой кинематической схемы [15] разность между наибольшим и наименьшим значением КПД передачи в пределах оборота ведомого вала значительно уменьшается и не превышает 1 %. Установлено также, что среднее значение КПД за оборот ведомого вала в зависимости от значений кинематических погрешностей может уменьшаться до 5,5 %.

## Список литературы

1. Планетарные кулачково-плунжерные передачи. Проектирование, контроль и диагностика / М.Ф. Пашкевич [и др.]. — Могилев: Бел.-Рос. ун-т, 2003. — 221 с.
2. Лустенков, М.Е. Передачи с промежуточными телами качения: определение и минимизации потерь мощности: монография / М.Е. Лустенков. — Могилев: Бел.-Рос. ун-т, 2010. — 274 с.
3. Тайц, Б.А. Точность и контроль зубчатых колес / Б.А. Тайц. — М.: Машиностроение, 1972. — 368 с.
4. Повышение точности механических передач на основе компьютерного моделирования и использования технологий искусственного интеллекта: монография / В.М. Пашкевич [и др.]. — Могилев: Бел.-Рос. ун-т, 2011. — 139 с.
5. Pleguezuelos, M. Analytical Expressions of the Efficiency of Standard and High Contact Ratio Involute Spur Gears / M. Pleguezuelos, J.I. Pedrero, M.B. Sánchez // *Mathematical Problems in Engineering*. — 2013. — Vol. 2013. — 14 p. — DOI: <https://doi.org/10.1155/2013/142849>.
6. Dobrova, A. Research of gear drives / A. Dobrova, V. Dobrev, G. Mollova // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. The XXXI-st SIAR International Congress of Automotive and Transport Engineering «Automotive and Integrated Transport Systems» (AITS 2021). Chisinau, 28-30 October 2021*. — Vol. 1220. — 5 p. — DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/1220/1/012025>.
7. Transmission Efficiency of Cycloid-Pinion System Considering the Assembly Dimensional Chain / N. Jiang [et al.] // *Applied Sciences*. — 2022. — Vol. 12, iss. 23. — 21 p. — DOI: <https://doi.org/10.3390/app122311917>.
8. Черемнов, А.В. Синтез пространственной передачи с промежуточными телами качения с улучшенными качественными характеристиками / А.В. Черемнов, А. И-Кан, О.П. Ивкина // *Известия Томского политехнического университета*. — 2012. — Т. 321, № 2. — С. 26–30.
9. Pabiszczak, S. Effect of Manufacturing Errors on the Operation of the Eccentric Rolling Transmission / S. Pabiszczak, W. Ptaszyński // *Advances in Science and Technology Research Journal*. — 2020. — Vol. 14, iss. 3. — Pp. 213–222. — DOI: <https://doi.org/10.12913/22998624/122604>.
10. Lustenkova, E.S. Experimental estimation of efficiency and kinematic accuracy of a spherical roller transmission / E.S. Lustenkova // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. International Conference on Mechanical Engineering and Modern Technologies (MEMT 2020). Tomsk, 26–30 October 2020*. — Vol. 1118. — 6 p. — DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/1118/1/012007>.
11. Громько, П.Н. Использование удлиненной эпициклоиды для формообразования зубчатых поверхностей передач эксцентрикового типа / П.Н. Громько, С.Н. Хагетовский, В.Л. Юркова // *Вестн. Бел.-Рос. ун-та*. — 2019. — № 1(62). — С. 14–21.
12. Теория механизмов и механика машин: учебник для вузов / К.В. Фролов [и др.]. — 2-е изд. перераб. и доп. — М.: Высш. шк., 1998. — 500 с.
13. Автоматизированное проектирование конструкций малогабаритных радиально-плунжерных редукторов с использованием современных САПР / А.В. Капитонов [и др.] // *Вестн. Бел.-Рос. ун-та*. — 2015. — № 3(48). — С. 25–32.
14. Капитонов, А.В. Планетарная радиально-плунжерная передача с улучшенными эксплуатационными характеристиками / А.В. Капитонов, К.В. Сасковец, А.И. Касьянов // *Вестн. Бел.-Рос. ун-та*. — 2017. — № 3(56). — С. 27–34.

15. Пашкевич, М.Ф. Планетарные шариковые и роликовые редукторы и их испытания / М.Ф. Пашкевич, В.В. Герашенко. — Минск, БелНИИТИ, 1992. — 248 с.
16. Капитонов, А.В. Кинематические и массогабаритные характеристики ресурсоэффективных механических передач: компьютерное моделирование, экспериментальная оценка / А.В. Капитонов, В.М. Пашкевич. — Могилев: Бел.-Рос. ун-т, 2017. — 248 с.
17. Капитонов, А.В. Исследование кинематической точности планетарных роликовых передач методами гармонического анализа и контроля в сборе / А.В. Капитонов, С.Г. Черняков // Вестн. Бел.-Рос. ун-та. — 2011. — № 4(33). — С. 40–50.
18. Капитонов, А.В. Математическое моделирование кинематических погрешностей планетарных роликовых передач / А.В. Капитонов // Вестн. Бел.-Рос. ун-та. — 2003. — № 2(5). — С. 44–48.

KAPITONOV Alexander V., Ph. D. in Eng., Assoc. Prof.  
Associate Professor of the Department “Mechanical Engineering Technology”  
E-mail: kavbru@gmail.com

Belarusian-Russian University, Mogilev, Republic of Belarus

Received 07 August 2023.

## DEVELOPMENT OF A DYNAMIC MODEL FOR CALCULATING THE KINEMATIC ERROR AND EVALUATING ITS EFFECT ON THE EFFICIENCY OF PLANETARY MECHANISMS WITH ROLLING BODIES

*When studying the characteristics of the mechanisms of small-sized drives, an important task is to develop ways to increase the efficiency of the mechanism. The article discusses theoretical issues related to the influence assessment of kinematic error on the efficiency of gears with rolling bodies. As a result of the research, a generalized dynamic model of planetary ball and roller mechanisms is obtained, taking into account kinematic errors, linking manufacturing errors or elastic deformations and kinematic transmission error. Mathematical dependences of the dynamic model of mechanisms with rolling bodies are derived. The model was tested on the example of calculating the kinematic error of a single-stage planetary ball transmission. Polynomial equations with constant coefficients are obtained for determining kinematic errors from the influence of manufacturing errors of transmission links. It is established that for different kinematic schemes, gear ratios and angular velocities of planetary mechanisms with rolling bodies, the transmission efficiency can vary significantly depending on its kinematic error. For gear ratios from 1.5 to 5, drive shaft rotation speeds from 1,500 to 3,000 rpm, depending on the highest values of the kinematic error from 0.00175 to 0.0349 radians, the transmission efficiency within the driven shaft rotation can decrease from 0.93 to 11 %. At the same time, transmissions constructed according to the sixth kinematic scheme have the highest efficiency values. The average efficiency value per revolution of the driven shaft from the influence of kinematic errors can decrease up to 5 %. Graphs of the dependences of transmission efficiency on their kinematic errors are given.*

**Keywords:** dynamic model, mechanisms with rolling bodies, efficiency, kinematic error

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2023-4-65-16-24>

### References

1. Pashkevich M.F., Pashkevich V.M., Pashkevich A.M., Chertkov S.V. *Planetarnye kulachkovy-plunzhernye peredachi. Proektirovanie, kontrol i diagnostika* [Planetary cam-plunger gears. Design, control and diagnostics]. Mogilev, Belorussko-Rossiyskiy universitet Publ., 2003. 221 p. (in Russ.).
2. Lustenkov M.E. *Peredachis promezhutochnymitelam ikacheniya: opredelenie i minimizatsiya poter moshchnosti* [Transmissions with intermediate rolling elements: determination and minimization of power losses]. Mogilev, Belorussko-Rossiyskiy universitet Publ., 2010. 274 p. (in Russ.).
3. Taits B.A. *Tochnost i kontrol zubchatykh koles* [Precision and control of gears]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1972. 368 p. (in Russ.).
4. Pashkevich V.M., et al. *Povyshenie tochnosti mekhanicheskikh peredach na osnove kompyuternogo modelirovaniya i ispolzovaniya tekhnologii iskusstvennogo intellekta* [Improving the accuracy of mechanical transmissions based on computer modeling and the use of artificial intelligence technologies]. Mogilev, Belorussko-Rossiyskiy universitet Publ., 2011. 139 p. (in Russ.).
5. Pleguezuelos M., Pedrero J.I., Sánchez M.B. Analytical expressions of the efficiency of standard and high contact ratio involute spur gears. *Mathematical problems in engineering*, 2013, vol. 2013. DOI: <https://doi.org/10.1155/2013/142849>.
6. Dobrova A., Dobrev V., Mollova G. Research of gear drives. *IOP conference series: Materials science and engineering. The XXXI-st SIAR International congress of automotive and transport engineering “Automotive and integrated transport systems” (AITS 2021)*. Chisinau, 2021, vol. 1220. DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/1220/1/012025>.
7. Jiang N., Wang S., Yang A., Zhou W., Zhang J. Transmission efficiency of cycloid–pinion system considering the assembly dimensional chain. *Applied sciences*, 2022, vol. 12, iss. 23. DOI: <https://doi.org/10.3390/app122311917>.



8. Cheremnov A.V., I-Kan A., Ivkina O.P. Sintez prostranstvennoy peredachi s promezhutochnymi telami kacheniya s uluchshennymi kachestvennymi kharakteristikami [Synthesis of spatial transmission with intermediate rolling elements with improved quality characteristics]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2012, vol. 321, no. 2, pp. 26–30 (in Russ.).
9. Pabiszczak S., Ptaszynski W. Effect of manufacturing errors on the operation of the eccentric rolling transmission. *Advances in science and technology research journal*, 2020, vol. 14, iss. 3, pp. 213–222. DOI: <https://doi.org/10.12913/22998624/122604>.
10. Lustenkova E.S. Experimental estimation of efficiency and kinematic accuracy of a spherical roller transmission. *IOP conference series: Materials science and engineering. International conference on mechanical engineering and modern technologies (MEMT 2020)*. Tomsk, 2020, vol. 1118. DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/1118/1/012007>.
11. Gromyko P.N., Khatetovsky S.N., Yurkova V.L. Ispolzovanie udlinennoy epitsikloidy dlya formobrazovaniya zubchatykh poverkhnostey peredach ekstsentrikovogo tipa [Use of an elongated epicycloid for forming gear surfaces of excentric gears]. *Vestnik Belorussko-Rossiyskogo universiteta*, 2019, no. 1(62), pp. 14–21 (in Russ.).
12. Frolov K.V., et al. *Teoriya mekhanizmov i mekhanika mashin* [Theory of mechanisms and mechanics of machines]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1998. 500 p. (in Russ.).
13. Kapitonov A.V., Saskovets K.V., Kasyanov A.I., Leshko D.V., Filchenko P.A. Avtomatizirovannoe proektirovanie konstruktsiy malogabaritnykh radialno-plunzhernykh reduktorov s ispolzovaniem sovremennykh SAPR [Computer-aided design of small-size radial plunger reducers using advanced CAD]. *Vestnik Belorussko-Rossiyskogo universiteta*, 2015, no. 3(48), pp. 25–32 (in Russ.).
14. Kapitonov A.V., Saskovets K.V., Kasyanov A.I. Planetarnaya radialno-plunzhernaya peredacha s uluchshennymi ekspluatatsionnymi kharakteristikami [Radial plunger planetary gearing with improved operating characteristics]. *Vestnik Belorussko-Rossiyskogo universiteta*, 2017, no. 3(56), pp. 27–34 (in Russ.).
15. Pashkevich M.F., Gerashchenko V.V. *Planetarnye sharikovyie i rolikovyie reduktory i ikh ispytaniya* [Planetary ball and roller gearboxes and their tests]. Minsk, BelNIINTI Publ., 1992. 248 p. (in Russ.).
16. Kapitonov A.V., Pashkevich V.M. *Kinematicheskie i massogabaritnye kharakteristiki resursoeffektivnykh mekhanicheskikh peredach. Kompyuternoe modelirovanie, eksperimentalnaya otsenka* [Kinematic and mass-dimensional characteristics of lifetime-efficient mechanical transmissions. Computer modeling, experimental evaluation]. Mogilev, Belorussko-Rossiyskiy universitet Publ., 2017. 248 p. (in Russ.).
17. Kapitonov A.V., Chernyakov S.G. Issledovanie kinematicheskoy tochnosti planetarnykh rolikovykh peredach metodami garmonicheskogo analiza i kontrolya v sbore [Investigation of the kinematic accuracy of planetary roller gears by methods of harmonic analysis and assembly control]. *Vestnik Belorussko-Rossiyskogo universiteta*, 2011, no. 4(33), pp. 40–50 (in Russ.).
18. Kapitonov A.V. Matematicheskoe modelirovanie kinematicheskikh pogreshnostey planetarnykh rolikovykh peredach [Mathematical modeling kinematical inaccuracy planetary roller transfers]. *Vestnik Belorussko-Rossiyskogo universiteta*, 2003, no. 2(5), pp. 44–48 (in Russ.).