МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3:519.6+519.85

С.С. ЩЕРБАКОВ, д-р физ.-мат. наук, проф.
главный научный сотрудник лаборатории механики износоусталостного повреждения РКЦМП[1]
профессор кафедры теоретической и прикладной механики[2]
E-mail: sherbakovss@mail.ru

М.М. ПОЛЕЩУК
младший научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории прикладной механики[2]
E-mail: mikhailpaliashchuk@yandex.ru

Д.Е. МАРМЫШ, канд. физ.-мат. наук, доц.
доцент кафедры теоретической и прикладной механики[2]
E-mail: marmyshde@bsu.by

[1]Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси, г. Минск, Республика Беларусь
[2]Белорусский государственный университет, г. Минск, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 01.02.2024.

РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА ГРАФИЧЕСКОМ ПРОЦЕССОРЕ ДЛЯ УСКОРЕНИЯ ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ РАСЧЕТОВ В МЕХАНИКЕ

При компьютерном моделировании задач различными методами всегда возникает вопрос точности и скорости используемого подхода. В данной работе рассматривается применение двух модификаций метода граничных элементов для решения задачи о распределении потенциала внутри замкнутой двумерной области, на границе которой равномерно распределен потенциал. Первая модификация включает в себя метод с применением трех нелинейных функций формы вместо одной. Второй модификацией является применение метода Галеркина к гранично-элементному подходу с тремя нелинейными функциями формы. Суть данной модификации заключается в том, что разрешающая система уравнений составляется в интегральной форме по всему граничному элементу, а не в точках коллокации. В дополнение к этому в работе описаны и исследованы преимущества и недостатки сглаживающей модификации, примененной к данным подходам. В связи с тем, что матрица взаимовлияния состоит из независимо вычисляемых элементов, для повышения эффективности было предложено распараллеливание вычислений с применением технологии NVIDIA CUDA, что позволяет значительно ускорять процесс расчета матрицы взаимовлияний. Преимущество выбора такой технологии обусловлено наличием графических акселераторов NVIDIA практически в каждом домашнем компьютере или ноутбуке, а также простотой ее применения. В работе представлен подход к применению данной технологии, а также показаны результаты, которые отображают зависимость ускорения распараллеленных вычислений от количества граничных элементов. Также было проведено сравнение эффективности выбранной технологии при применении к двум методам: коллокационному и методу Галеркина. Показано значительное ускорение вплоть до 22 раз при вычислении матрицы взаимовлияния граничных элементов.

Ключевые слова: *метод граничных элементов, нелинейные функции формы, распределение потенциала, NVIDIA CUDA, коллокационный метод, метод Галеркина, распараллеливание алгоритмов, численное моделирование, ускорение вычислений, матрица взаимовлияния*

DOI: https://doi.org/10.46864/1995-0470-2024-1-66-80-85

Введение. Метод граничных элементов (МГЭ) представляет собой высокоэффективный подход, который успешно находит свое применение при анализе и моделировании разнообразных задач, охватывающих области гидро- и электродинамики, а также механики деформируемого твердого тела. В работах [1, 2] показаны некоторые базовые примеры использования МГЭ для моделирования напряженно-деформированного состояния, а также объяснены причины выбора именно данного метода моделирования. Также в статье [3] представлен подход к моделированию напряженно-деформированного состояния контакта шероховатых поверхностей для трехмерного случая, где впоследствии показано, что данную задачу можно свести к двумерной формулировке на полуплоскости, что приводит к ускорению процесса моделирования с сохранением точности. В статье [4] показывается применение гранично-элементного метода к задаче о моделировании однородного дозвукового потока. Помимо этого, представлен способ к ускорению данного метода, используя принцип симметрии, что позволяет значительно ускорить процесс моделирования.

В отличие от традиционных методов конечных разностей и конечных элементов, МГЭ предоставляет существенное преимущество, позволяя дискретизировать только поверхность расчетной области, минимизируя тем самым объем вычислений. В связи с многообразием задач, которые подлежат моделированию с использованием МГЭ, возникает потребность в создании модификаций этого метода. Одной из наиболее распространенных является применение функций формы [5, 6]. Кроме традиционного коллокационного метода, применяются менее распространенные подходы, включая метод Галеркина и интегральный метод [7–9].

В данной работе рассматривается реализация методологии МГЭ с учетом трех нелинейных функций формы для изучения распределения потенциала внутри замкнутой двумерной области, когда потенциал равномерно распределен на поверхности контура. Дополнительно изучается применение технологии CUDA [10] для параллельной реализации расчетов, что предоставляет дополнительные возможности для ускорения вычислительных процессов и повышения производительности.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу, представленную в [11], в которой требуется найти распределение потенциала в замкнутой прямоугольной области $A=\{(x,y):(x,y)\in R^2,\ |x|\le 5,\ -8\le y\le 0\}$ (рисунок 1), на одной из сторон которой $-b \le x \le b$, $y = 0$, $b = 2{,}5$ задано граничное условие

$$p^*(x)=p_0\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}}.$$

Для применения МГЭ граница исследуемой области была разбита на N граничных элементов (ГЭ), полудлина которых равна h, таким образом, что все граничные элементы должны оставаться прямыми отрезками. Центры ГЭ расположены в точках $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$. Следует отметить, что источниками влияния являются не граничные элементы, а узлы элементов $\mathbf{x}_i - \mathbf{h}$, $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{x}_i + \mathbf{h}$, где $\mathbf{h} = (h_x, h_y)$. При расчетах использовались три функции формы $f_i^{\mathrm{I}}(\mathbf{x}), f_i^{\mathrm{II}}(\mathbf{x}), f_i^{\mathrm{III}}(\mathbf{x})$, которые распределялись на граничных элементах, как показано на рисунке 2.

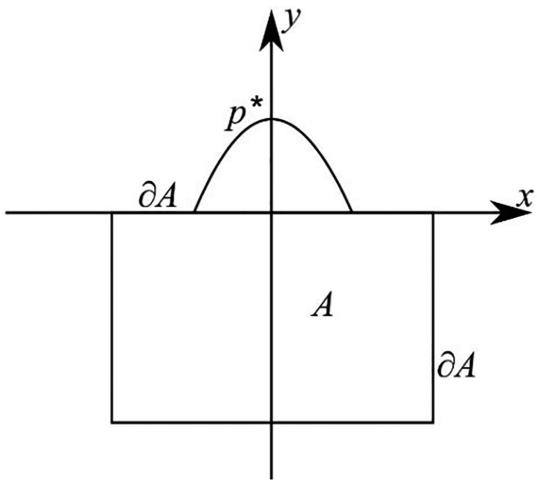


Рисунок 1 — Расчетная схема
Figure 1 — Calculation scheme

Сравнение результатов. Ввиду отсутствия аналитического решения задачи внутри области возникает ограничение в возможности графического отображения точных распределений полученных решений в сравнении с аналитическим. Появляется необходимость в альтернативных подходах. В данном случае рассмотрены решения, полученные с применением указанных методов на границе области, где заданы граничные условия.

На рисунке 3 представлены распределения потенциалов на верхней границе, полученные с использованием найденных фиктивных усилий или коэффициентов функций формы.

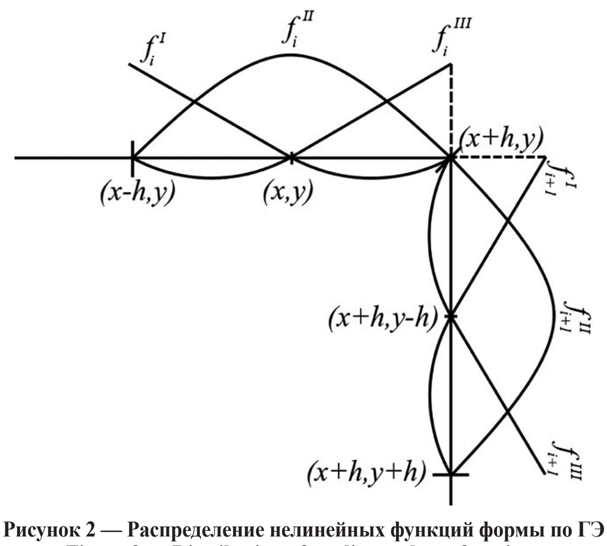


Рисунок 2 — Распределение нелинейных функций формы по ГЭ
Figure 2 — Distribution of nonlinear shape functions on boundary elements

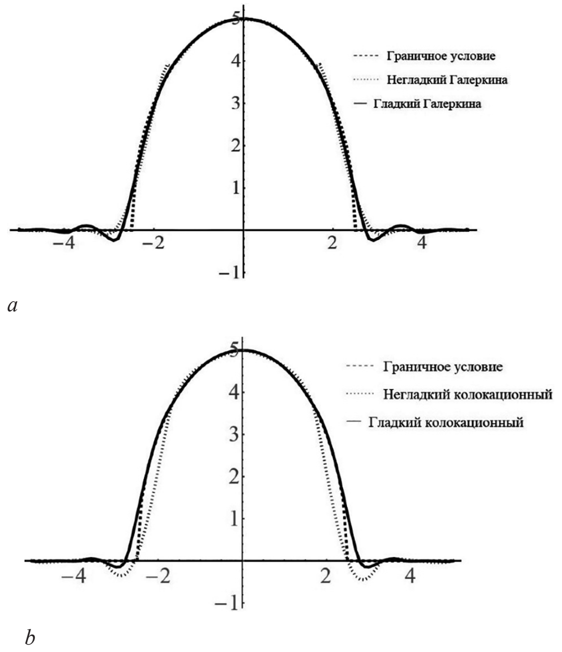


Рисунок 3 — Распределение потенциала на поверхности расчетной области
Figure 3 — Potential distribution on the surface of the computational domain

Проведем более детальный анализ, оценивая сходимость численных расчетов и уровень погрешности, характеризующий четыре варианта реализации МГЭ с использованием трех функций формы: негладкого и гладкого коллокационного методов, а также негладкого и гладкого методов Галеркина [12, 13].

Метод Галеркина демонстрирует бóльшую точность в сравнении с коллокационным методом (см. рисунок 3). Хотя аналитическое решение внутри области недоступно, предложенные методы позволяют приблизительно изучить точность решения на границе. Для оценки точности каждого метода необходимо провести анализ относительных погрешностей, что позволит оценить их сравнительную эффективность с учетом средней относительной погрешности.

Для качественной оценки точности численных результатов применяется относительная погрешность, которая вычисляется согласно следующей формуле:

$$e = \frac{IG(x_i) - p^*(x_i)}{p^*(x_i)},$$

где x_i — точка границы с ненулевым граничным условием.

Этот параметр позволяет оценить разницу между аналитическим и численным решениями, учитывая величину граничного условия в контексте конкретной задачи. Сравнивая значения относительной погрешности для каждой из рассмотренных реализаций МГЭ, можно определить наилучший подход с точки зрения точности аппроксимации.

В дальнейшем, с целью получения более комплексной картины, был применен метод вычисления среднего арифметического для каждой точки, что позволило определить среднюю погрешность метода на всей поверхности.

На рисунке 4 представлены графики относительных погрешностей для рассмотренных методов при различных количествах граничных элементов. Подходящее описание данных графиков таково, что их можно рассматривать как кривые сходимости методов, которые отражают скорость приближения данных методов к постоянной относительной погрешности. Рисунок 4 наглядно показывает, что негладкий метод Галеркина проявляет заметно быструю сходимость, что позволяет предположить, что уже при небольшой дискретизации можно добиться значительного увеличения точности решения.

Стоит отметить, что гладкий коллокационный метод и гладкий метод Галеркина даже при грубой дискретизации граничных элементов поверхности демонстрируют малую погрешность. Тем не менее гладкий метод Галеркина показал более высокую точность, что подчеркивает его преимущество. Такой вывод делается в свете того, что условие гладкости (непрерывности) оказывает положительное влияние на повышение точности вычислений. Учитывая, что гладкий коллокацион-

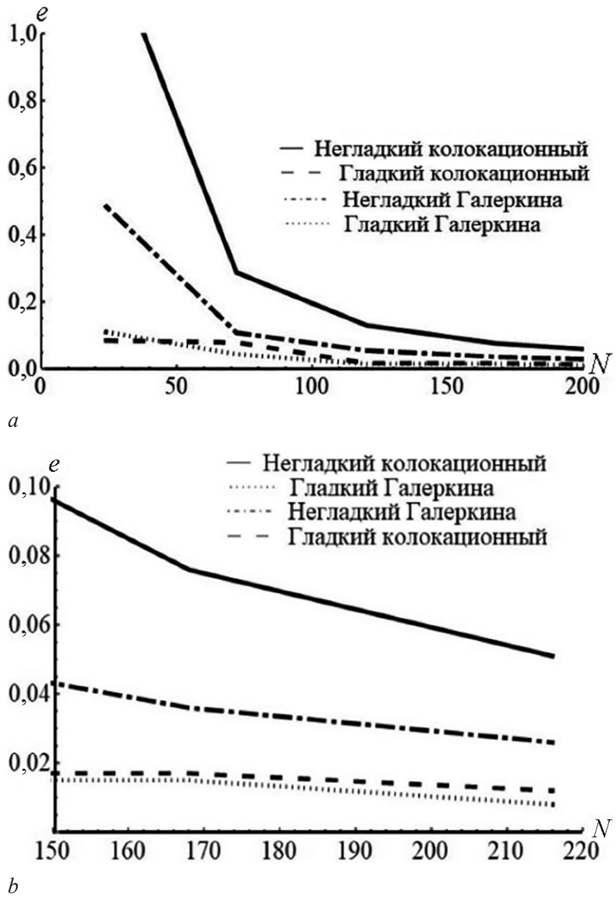


Рисунок 4 — Относительные погрешности методов
Figure 4 — Relative errors of methods

ный метод и гладкий метод Галеркина обладают наивысшей точностью среди рассмотренных методов, дальнейшее сравнение и анализ будут проводиться для данных методов.

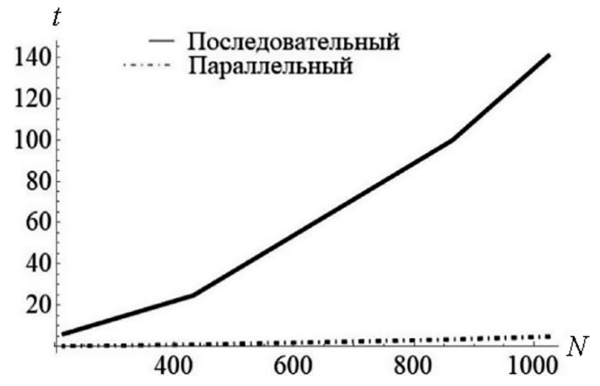
Распараллеливание на CUDA. Распараллеливание [14, 15] коллокационного метода с помощью технологии NVIDIA CUDA было описано в [5]. Основным этапом распараллеливания представленного метода является ускорение расчета матрицы взаимовлияния. Формирование данной системы — трудоемкий процесс, т. к. создается матрица, которая имеет размерность $N \times N$, где N — количество узлов на граничных элементах и $N = 2K + 1$, где K — количество граничных элементов. Распараллеливание данного процесса путем создания $N \times N$ потоков, каждый из которых вычисляет коэффициент a_{ij} $(i, j = 1, \ldots, N)$, заметно ускоряет формирование матрицы взаимовлияний.

На рисунке 5 представлены два набора графиков, иллюстрирующих зависимость времени, затраченного на вычисления, от количества коэффициентов для гладкого коллокационного метода и метода Галеркина. Последовательная реализация алгоритма Галеркина в целом оказывается более медленной по сравнению с аналогичным алгоритмом коллокационного метода. Это свидетельствует о том, что для данной задачи гладкий коллокационный метод в последовательном режиме демонстрирует более высокую производительность.

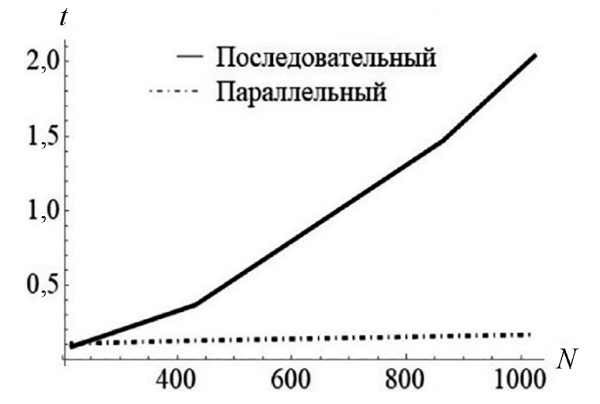
Из рисунка 6 видно, что ускорение вычислений при распараллеливании значительно выше для гладкого метода Галеркина, чем для гладкого коллокационного. Для гладкого метода Галеркина ускорение достигает 28 раз, в то время как для гладкого коллокационного метода — до 11 раз. Это подчеркивает потенциал ускорения, который может быть достигнут при распараллеливании, особенно если использовать более мощные графические акселераторы с большим числом ядер.

Также из рисунка 6 видно, что скорость гладкого коллокационного метода все же остается значительно выше гладкого метода Галеркина. Это свидетельствует о том, что даже при ускорении расчетов с использованием технологии CUDA, гладкий коллокационный метод остается предпочтительным в аспекте общей производительности.

На рисунке 7 представлены коэффициенты эффективного ускорения описанных выше алгоритмов, используя технологию NVIDIA CUDA. Как видно из рисунка 7, максимальный коэффициент ускорения практически одинаков.



a



b

Рисунок 5 — Зависимости времени распараллеленных расчетов от количества коэффициентов для гладких методов Галеркина (*a*) и коллокационного (*b*)
Figure 5 — Dependences of parallelized computation time on the number of coefficients for smooth Galerkin (*a*) and collocation (*b*) methods

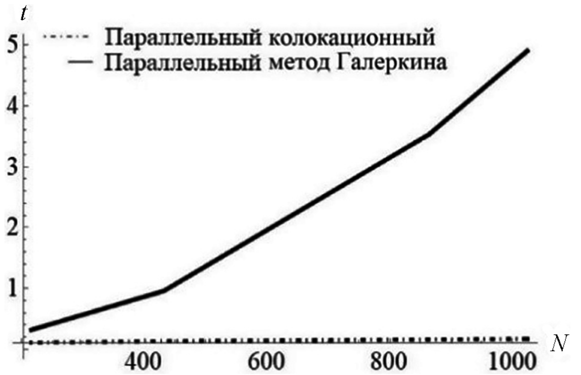


Рисунок 6 — Ускорение вычислений в соответствии с распараллеленным гладким методом Галеркина и коллокационным гладким методом
Figure 6 — Computational speedup under parallelized smooth Galerkin method and smooth collocation method

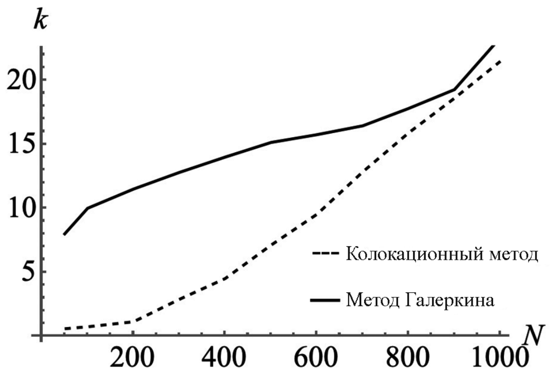


Рисунок 7 — Коэффициенты ускорения коллокационного метода и метода Галеркина относительно их последовательных реализаций
Figure 7 — Acceleration coefficients of the collocation method and the Galerkin method with respect to their successive realizations

Ускорение при низкой дискретизации граничной области в разы выше для метода Галеркина. Поэтому учитывая, что при низкой дискретизации метод Галеркина точнее коллокационного, можно сделать вывод, что распараллеливание эффективнее при реализации метода Галеркина.

Заключение. Проведенное моделирование распределения потенциала в замкнутой области с поверхностными граничными условиями выявило предпочтительность применения метода Галеркина при гранично-элементном моделировании.

В ходе исследования были рассмотрены как гладкие, так и негладкие варианты гранично-элементных расчетов. Была проанализирована точность вычислений, что позволило установить, что методы коллокационного типа и метод Галеркина, реализованные в гладкой форме, обладают наименьшей погрешностью.

Анализ ускорения вычислений выявил, что применение метода Галеркина имеет преимущество перед методом коллокационного типа. Представлены результаты как последовательных, так и параллельных расчетов, при которых было достигнуто ускорение расчета матрицы взаимовлияния до 22 раз. При этом метод Галеркина оказался более точным, что обуславливает целесообразность его использования при расчете коэффициентов функции формы.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований в рамках проекта № Т23РНФ-125.

Список литературы

1. Крауч, С. Методы граничных элементов в механике твердого тела / С. Крауч, А. Старфилд; пер. с англ. М.А. Тлеужанова; под ред. А.М. Линькова. — М.: Мир, 1987. — 328 с.
2. Бенерджи, П. Методы граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд; пер. А.Ф. Зазовского. — М.: Мир, 1984. — 494 с.
3. Xu, Y. Boundary element method (BEM) applied to the rough surface contact vs. BEM in computational mechanics / Y. Xu, R.L. Jackson // Friction. — 2019. — Vol. 7, iss. 4. — Pp. 359–371. — DOI: https://doi.org/10.1007/s40544-018-0229-3.
4. Barhoumi, B. An improved axisymmetric convected boundary element method formulation with uniform flow / B. Barhoumi // Mechanics & Industry. — 2017. — Vol. 18, no. 3. — 10 p. — DOI: https://doi.org/10.1051/meca/2016064.
5. Щербаков, С.С. Ускорение гранично-элементных расчетов с помощью графического акселератора для элементов с нелинейными функциями формы / С.С. Щербаков, М.М. Полещук // Механика машин, механизмов и материалов. — 2019. — № 4(49). — С. 89–94.
6. Boundary element analysis for elasticity problems using expanding element interpolation method / J. Zhang [et al.] // Engineering Computations. — 2020. — Vol. 37, no. 1. — Pp. 1–20. — DOI: https://doi.org/10.1108/EC-11-2018-0506.
7. Sutradhar, A. Symmetric Galerkin boundary element method / A. Sutradhar, G.H. Paulino, L.J. Gray. — Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. — 276 p. — DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-540-68772-6.
8. Parreira, P. On the implementation of the Galerkin approach in the boundary element method / P. Parreira, M. Guiggiani // Computers & Structures. — 1989. — Vol. 33, iss. 1. — Pp. 269–279. — DOI: https://doi.org/10.1016/0045-7949(89)90150-8.
9. Мармыш, Д.Е. Гранично-элементное моделирование напряженного состояния при вдавливании штампа в полупространство / Д.Е. Мармыш, С.С. Щербаков // Актуальные вопросы машиноведения: сб. науч. тр. / Объедин. ин-т машиностроения НАН Беларуси; редкол.: С.Н. Поддубко [и др.]. — Минск, 2018. — Вып. 7. — С. 204–206.
10. Sanders, J. CUDA by example: an introduction to general-purpose GPU programming / J. Sanders, E. Kandrot. — 1st ed. — Boston: Addison-Wesley Professional, 2010. — 320 p.
11. Распараллеливание гранично-элементных расчетов с использованием метода Галеркина и нелинейных функций формы / С.С. Щербаков [и др.] // Вестн. Гродненского гос. ун-та им. Я. Купалы. Сер. 6. Техника. — 2021. — Т. 11, № 2. — С. 41–48.
12. Щербаков, С.С. Гранично-элементное моделирование с применением метода Галеркина, нелинейных функций формы и технологии CUDA / С.С. Щербаков, М.М. Полещук // XIII Белорусская математическая конференция: мат. междунар. науч. конф., Минск, 22–25 нояб. 2021 г. / Ин-т математики НАН Беларуси; ред. В.В. Лепин. — Минск, 2021. — Ч. 2. — С. 100–101.
13. Щербаков, С.С. Ускорение гранично-элементных расчетов для замкнутой области с использованием нелинейных функций формы и технологии CUDA / С.С. Щербаков, М.М. Полещук // Доклады БГУИР. — 2021. — Т. 19, № 3. — С. 14–21. — DOI: https://doi.org/10.35596/1729-7648-2021-19-14-21.
14. Rauber, T. General purpose GPU programming / T. Rauber, G. Rünger // Parallel Programming for Multicore and Cluster Systems / T. Rauber, G. Rünger. — Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2013. — Pp. 387–415. — DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-37801-0_7.
15. Storti, D. CUDA for engineers. An introduction to high-performance parallel computing / D. Storti, M. Yurtoglu. — New York: Addison-Wesley, 2016. — 328 p.

SHERBAKOV Sergei S., D. Sc. in Phys. and Math., Prof.
Chief Researcher of the Laboratory of Wear and Fatigue Pamage Mechanics of the Republican Computer Center of Mechanical Engineering[1]
Professor of the Department of Theoretical and Applied Mechanics[2]
Email: sherbakovss@mail.ru

POLESTCHUK Mikhail M.
Junior Researcher of the Research Laboratory of Applied Mechanics[2]
Email: mikhailpaliashchuk@yandex.ru

MARMYSH Dzianis E., Ph. D. in Phys. and Math., Assoc. Prof.
Associate Professor of the Department of Theoretical and Applied Mechanics[2]
Email: marmyshde@bsu.by

[1]Joint Institute of Mechanical Engineering of the NAS of Belarus, Minsk, Republic of Belarus
[2]Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

Received 01 February 2024.

PARALLELIZING OF COMPUTATIONS ON A GRAPHICS PROCESSING UNIT FOR ACCELERATING BOUNDARY ELEMENT CALCULATIONS IN MECHANICS

In solving problems of computer modeling using various methods, accuracy and computational efficiency questions always arise. This study explores the application of two modifications of the boundary element method to solve the problem of potential distribution within a closed two-dimensional domain with a uniform potential distribution on its boundary. The first modification involves using three nonlinear shape functions instead of one. The second modification applies the Galerkin method to the boundary element approach with three nonlinear shape functions. The essence of this modification lies in the fact that the system of equations is formulated in integral form over the entire boundary element, rather than at collocation points. In addition to this, the paper describes and investigates the advantages and disadvantages of the smoothing modification applied to these approaches. Since the influence matrix consists of independently computable elements, parallelization of calculations using NVIDIA CUDA technology has been proposed to enhance computational efficiency, significantly accelerating the calculation of interaction matrix. The choice of this technology is advantageous due to the prevalence of NVIDIA graphics accelerators in almost every personal computer or laptop, as well as it is easy to use. The study presents an approach to the application of this technology and demonstrates the results, showing the acceleration of parallelized calculations which show the dependence on the number of boundary elements. A comparison of the efficiency of the selected technology when applied to two methods, collocation and Galerkin, is also presented, indicating a significant speedup of up to 22 times by computing the influence matrix of the boundary elements.

Keywords: *boundary element method, nonlinear shape functions, potential distribution, NVIDIA CUDA, collocation method, Galerkin method, algorithm parallelization, numerical modeling, computational acceleration, interaction matrix*

DOI: https://doi.org/10.46864/1995-0470-2024-1-66-80-85

References

1. Crouch S.L., Starfield A.M. *Boundary element methods in solid mechanics*. London, Boston, Sydney, George Allen & Unwin, 1983.
2. Banerjee P.K., Butterfield R. *Boundary element methods in engineering science*. London, Mcgraw-Hill Book Company (UK) Limited, 1981.
3. Xu Y., Jackson R.L. Boundary element method (BEM) applied to the rough surface contact vs. BEM in computational mechanics. *Friction*, 2019, vol. 7, iss. 4, pp. 359–371. DOI: https://doi.org/10.1007/s40544-018-0229-3.
4. Barhoumi B. An improved axisymmetric convected boundary element method formulation with uniform flow. *Mechanics & industry*, 2017, vol. 18, no. 3. DOI: https://doi.org/10.1051/meca/2016064.
5. Sherbakov S.S., Polestchuk M.M. Uskorenie granichno-elementnykh raschetov s pomoshchyu graficheskogo akseleratora dlya elementov s nelineynymi funktsiyami formy [Acceleration of boundary-element computing using graphics accelerator for the elements with nonlinear form functions]. *Mechanics of machines, mechanisms and materials*, 2019, no. 4(49), pp. 89–94 (in Russ.).
6. Zhang J., Han L., Zhong Y., Dong Y., Lin W. Boundary element analysis for elasticity problems using expanding element interpolation method. *Engineering computations*, 2020, vol. 37, no. 1, pp. 1–20. DOI: https://doi.org/10.1108/EC-11-2018-0506.
7. Sutradhar A., Paulino G.H., Gray L.J. *Symmetric Galerkin boundary element method*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2008. 276 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-540-68772-6.
8. Parreira P., Guiggiani M. On the implementation of the Galerkin approach in the boundary element method. *Computers & structures*, 1989, vol. 33, iss. 1, pp. 269–279. DOI: https://doi.org/10.1016/0045-7949(89)90150-8.
9. Marmysh D.E., Sherbakov S.S. Granichno-elementnoe modelirovanie napryazhennogo sostoyaniya pri vdavlivanii shtampa v poluprostranstvo [Boundary-element modeling of stressed state under pressing-in of the indenter into the half-space]. *Aktualnye voprosy mashinovedeniya*, 2018, iss. 7, pp. 204–206 (in Russ.).
10. Sanders J., Kandrot E. *CUDA by example: an introduction to general-purpose GPU programming*. Boston, Addison-Wesley Professional, 2010. 320 p.
11. Sherbakov S.S., et al. Rasparallelivanie granichno-elementnykh raschetov s ispolzovaniem metoda Galerkina i nelineynykh funktsiy formy [Parallelization of boundary element calculations using the Galerkin method and nonlinear shape functions]. *Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 6. Engineering science*, 2021, vol. 11, no. 2, pp. 41–48 (in Russ.).
12. Sherbakov S.S., Polestchuk M.M. Granichno-elementnoe modelirovanie s primeneniem metoda Galerkina, nelineynykh funktsiy formy i tekhnologii CUDA [Boundary element modeling using the Galerkin method, nonlinear shape functions and CUDA technology]. *Materialy mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii “13 Belorusskaya matematicheskaya konferentsiya”* [Proc. international scientific conference “13th Belarusian mathematical conference”]. Minsk, 2021, part 2, pp. 100–101 (in Russ.).
13. Sherbakov S.S., Polestchuk M.M. Uskorenie granichno-elementnykh raschetov dlya zamknutoy oblasti s ispolzovaniem nelineynykh funktsiy formy i tekhnologii CUDA [Acceleration of boundary element calculations for closed domain using nonlinear form functions and CUDA technology]. *Doklady BGUIR*, 2021, vol. 19, no. 3, pp. 14–21. DOI: https://doi.org/10.35596/1729-7648-2021-19-14-21 (in Russ.).
14. Rauber T., Rünger G. General purpose GPU programming. *Parallel programming for multicore and cluster systems*, 2013, pp. 387–415. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-37801-0_7.
15. Storti D., Yurtoglu M. *CUDA for engineers. An introduction to high-performance parallel computing*. New York, Addison-Wesley, 2016. 328 p.