

УДК 621.83

А.В. КОТОВ, магистр техн. наук  
ведущий инженер-конструктор  
E-mail: androskv@mail.ru

ОАО «Сейсмотехника», г. Гомель, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 13.10.2023.

## СИЛОВОЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ ВЕКТОРНЫМ МЕТОДОМ

*Представлен аналитический способ силового анализа плоских рычажных механизмов с одной степенью свободы, основанный на векторном методе. На примере двухповодковой структурной группы изложена методика нахождения векторов реакций во всех ее кинематических парах, сохраняя при этом наглядность и последовательность решения, присущую графоаналитическому методу планов сил. Дается оригинальное аналитическое описание для нахождения векторов тангенциальных и нормальных составляющих реакций в кинематических парах. Применение предложенного метода силового анализа позволяет находить векторы реакций в кинематических парах без составления и решения сложных систем уравнений равновесия или графического построения. Адаптация предложенного силового анализа в современных математических пакетах позволяет в короткие сроки и с высокой точностью проводить исследование плоских рычажных механизмов с одной степенью свободы.*

**Ключевые слова:** силовой анализ, векторный метод, рычажный механизм, структурная группа, двухповодковая группа, кинематическая пара, тангенциальная составляющая реакции, нормальная составляющая реакции

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2024-2-67-36-43>

**Введение.** Как известно, силовой анализ любого рычажного механизма состоит в определении реакций в его кинематических парах, а также для ряда задач — в определении уравновешивающей силы или момента, приложенных к начальному звену. Знание реакций в кинематических парах механизма имеет большое практическое значение для расчетов звеньев на прочность, жесткость, долговечность и других подобных расчетов.

В учебной практике наибольшее распространение получили графоаналитические методы силового анализа рычажных механизмов [1, 2]. Однако, несмотря на свою наглядность, доступность и простоту, главным недостатком данных методов является их относительно невысокая точность. Именно поэтому с развитием в инженерной практике компьютерных технологий, графоаналитические методы анализа рычажных механизмов практически полностью уходят на второй план, уступая место различным аналитическим методам и программным комплексам динамического анализа систем твердых тел (MSC.ADAMS, RECURDYN, EULER), принцип работы которых предполагает автоматизированное нахождение реакций в кинематических парах механизма.

Как правило, суть всех известных аналитических методов силового анализа рычажных механиз-

мов заключается в составлении системы уравнений равновесия для каждой отдельной структурной группы (СГ) с дальнейшим решением полученных уравнений с помощью различных математических пакетов [3–5]. Причем в зарубежных работах [6, 7] предпочтение отдается методу решения через обратную матрицу. Существенным недостатком всех указанных выше аналитических методов является необходимость решения большого числа уравнений равновесия, от правильного составления которых зависит получение окончательного результата. Поэтому разработка универсальных, удобных и наглядных аналитических методов силового анализа рычажных механизмов является все еще актуальной инженерной задачей.

В данной работе предлагается аналитический способ силового анализа плоских рычажных механизмов векторным методом, позволяющий определять во всех кинематических парах неизвестные векторы реакций и их составляющие (тангенциальные и нормальные). При этом полностью сохраняется последовательность решения, присущая графоаналитическому методу планов сил, что позволяет сохранить его важное качество — наглядность.

**Постановка задачи.** Последовательность проведения силового анализа векторным методом рас-

смотрим на примере определения векторов реакций (без учета сил трения) во всех внутренних и внешних кинематических парах двухповодковой СГ, получившей наибольшее распространение в машиностроении, расчетная схема которой приведена на рисунке 1.

На приведенной расчетной схеме (см. рисунок 1) векторы, обозначенные буквами  $G$  и  $\Phi$  с  $i$ -м индексом, соответствуют векторам силы тяжести и силы инерции, приложенным в соответствующей  $i$ -й точке. Вектор, обозначенный буквой  $M$  с  $j$ -м индексом, соответствует вектору момента сил, приложенному к соответствующему  $j$ -му звену и направленному вдоль оси  $Z$ . При этом положительное значение вектора момента будет соответствовать его вращению против хода часовой стрелки, а отрицательное значение — по ходу часовой стрелки, если смотреть на острие оси  $Z$ . Принятое для плоской расчетной схемы условное графическое изображение векторов моментов сил (с учетом их направления) поясняется в верхнем правом углу рисунка 1. Стоит также отметить, что в общем случае наряду с векторами инерционных нагрузок в силовом анализе могут использоваться и другие векторы внешних сил, приложенные к произвольным точкам рассматриваемой СГ.

Будем считать, что для некоторого плоского рычажного механизма заранее уже выполнен кинематический анализ, после которого для одного из положений механизма требуется провести силовой анализ его двухповодковой СГ предложенным векторным методом. В работах [8–11] представлен метод аналитического описания кинематики механизмов, основанный на применении векторного анализа, логическим продолжением которого является предложенный метод силового анализа. Проведенный кинематический анализ предполагает, что известны все векторы линейных и угловых ускорений характерных точек и звеньев меха-

низма, а, следовательно, известны все векторы сил инерции, приложенные к центрам масс, а также векторы моментов сил инерции звеньев.

Согласно рисунку 1 рассматриваемая СГ лежит в плоскости  $XU$  правой декартовой системы координат, начало которой совпадает с шарниром  $A$ , а ось  $Z$  направлена на наблюдателя. Действие отброшенных звеньев в шарнирах  $B$  и  $C$  (показаны пунктирными линиями в отличие от штрихпунктирных линий, изображающих тела, жестко связанные со звеньями  $AB$  и  $AC$ ) представим в виде реакций (неизвестными, как по модулю, так и по направлению), которые разложим на векторы нормальных и тангенциальных составляющих, направив их вдоль и перпендикулярно к соответствующим звеньям.

**Аналитические зависимости.** Единичный вектор (орт) любого произвольного вектора будет найдется путем деления данного вектора на его длину:

$$\text{Ort}(\vec{V}) = \vec{V} / |\vec{V}|, \quad (1)$$

где  $\vec{V}$  — исходный произвольный вектор.

Единичные орты для каждой неподвижной оси принятой декартовой системы координат представим в виде транспонированных векторов (для более компактной записи):

$$\vec{e}_x = (1 \ 0 \ 0)^T; \quad \vec{e}_y = (0 \ 1 \ 0)^T; \quad \vec{e}_z = (0 \ 0 \ 1)^T. \quad (2)$$

**Силовой анализ.** При проведении силового анализа плоского рычажного механизма векторным методом последовательно рассматривается равновесие каждой его отдельной СГ в порядке, обратном кинематическому анализу, т. е. начиная с последней присоединительной СГ, к которой, будем считать, относится рассматриваемая двухповодковая СГ. Такой порядок вызван тем, что в начале проведения силового анализа последняя присоединительная СГ имеет связи только с предшествующей, а, следовательно, является

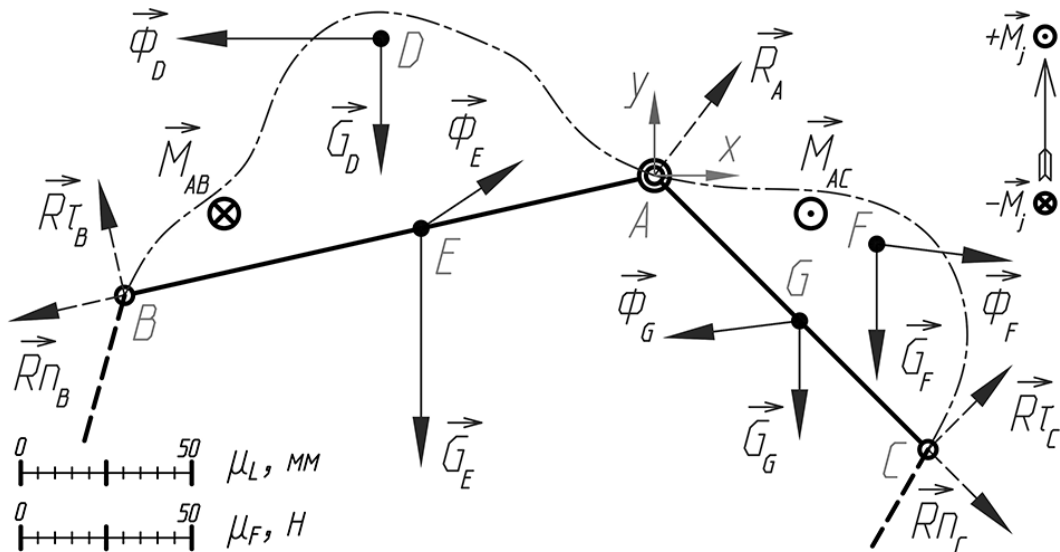


Рисунок 1 — Расчетная схема двухповодковой структурной группы  
Figure 1 — Analytical model of a two-drive structural group

статически определимой [2, 12]. В случае если двухповодковая СГ не является последней присоединительной, то перед проведением ее силового анализа векторным методом необходимо заранее найти все неизвестные векторы реакций в шарнирах, действующих со стороны последующих присоединенных СГ.

В предложенном силовом анализе векторным методом первым подлежащим определению является вектор тангенциальной составляющей реакции в кинематической паре, который находится для каждого отдельного звена СГ путем составления уравнения равновесия моментов сил относительно внутренней кинематической пары с последующим его решением. При составлении уравнений равновесия моментов сил воспользуемся известным свойством векторного произведения двух векторов [13]. Если первый множитель векторного произведения представляет собой радиус-вектор точки приложения вектора силы, а второй — вектор самой этой силы, то результатом такого векторного произведения будет являться вектор момента, направленный перпендикулярно плоскости перемножаемых векторов.

Используя вышеописанное свойство векторного произведения, определим для каждого из звеньев рассматриваемой СГ (см. рисунок 1) суммарный вектор моментов от всех известных силовых факторов (векторов сил и моментов), действующих на звенья  $AB$  и  $AC$  относительно их общего шарнира  $A$ :

$$\vec{M}_{\Sigma AB} = \vec{AD} \times \vec{G}_D + \vec{AD} \times \vec{\Phi}_D + \vec{AE} \times \vec{G}_E + \vec{AE} \times \vec{\Phi}_E + \vec{M}_{AB}; \quad (3)$$

$$\vec{M}_{\Sigma AC} = \vec{AF} \times \vec{G}_F + \vec{AF} \times \vec{\Phi}_F + \vec{AG} \times \vec{G}_G + \vec{AG} \times \vec{\Phi}_G + \vec{M}_{AC}. \quad (4)$$

Векторы неизвестных тангенциальных составляющих реакций в шарнирах  $B$  и  $C$  представим в виде произведения их длин (модулей) на единичные векторы (орты) их направления, которые заранее известны (перпендикулярны звеньям  $AB$  и  $AC$ ):

$$\vec{R}\tau_B = R\tau_B \cdot \vec{e}_{R\tau B}; \quad \vec{R}\tau_C = R\tau_C \cdot \vec{e}_{R\tau C}. \quad (5)$$

Единичные векторы (орты) тангенциальных составляющих реакций в шарнирах  $B$  и  $C$  можно найти различными способами, например, используя разложение на плоскости скалярного произведения в координатной форме [14]:

$$\vec{e}_{R\tau B} = \text{Ort}((1 \quad -\vec{AB} \cdot \vec{e}_X / \vec{AB} \cdot \vec{e}_Y \quad 0)^T); \quad (6)$$

$$\vec{e}_{R\tau C} = \text{Ort}((1 \quad -\vec{AC} \cdot \vec{e}_X / \vec{AC} \cdot \vec{e}_Y \quad 0)^T).$$

В правой части выражений (6) в скобках определены произвольные векторы, перпендикулярные соответственно звеньям  $AB$  и  $AC$ . После чего

с помощью выражения (1) для данных векторов находятся единичные векторы (орты) тангенциальных составляющих реакций в шарнирах  $B$  и  $C$ . Используемое в выражении (6) скалярное произведение векторов звеньев  $AB$  и  $AC$  на орты осей  $X$  и  $Y$  дает в соответствии со свойством скалярного произведения [13] проекции данных векторов на каждую из осей принятой системы координат с учетом его направления (знака).

Используя выражения (3)–(6), модули векторов тангенциальных составляющих реакций в шарнирах  $B$  и  $C$  рассматриваемой СГ представим в следующем векторном виде:

$$R\tau_B = -\frac{\vec{M}_{\Sigma AB} \cdot \vec{e}_Z}{(\vec{AB} \times \vec{e}_{R\tau B}) \cdot \vec{e}_Z}; \quad R\tau_C = -\frac{\vec{M}_{\Sigma AC} \cdot \vec{e}_Z}{(\vec{AC} \times \vec{e}_{R\tau C}) \cdot \vec{e}_Z}. \quad (7)$$

В результате с помощью выражений (7) для звеньев  $AB$  и  $AC$  рассматриваемой СГ (см. рисунок 1) находятся скалярные значения модулей векторов тангенциальных составляющих реакций в шарнирах  $B$  и  $C$ , а с помощью выражений (5) — соответствующие им векторы.

Далее найдем вспомогательный вектор силы, равный сумме всех известных векторов сил, действующих на рассматриваемую СГ (включая векторы найденных тангенциальных составляющих реакций в шарнирах  $B$  и  $C$ ), но взятый с противоположным знаком:

$$\vec{R}_{ABC} = -(\vec{G}_D + \vec{G}_E + \vec{G}_F + \vec{G}_G + \vec{\Phi}_D + \vec{\Phi}_E + \vec{\Phi}_F + \vec{\Phi}_G + \vec{R}\tau_B + \vec{R}\tau_C). \quad (8)$$

Согласно принципу построения плана сил, при графоаналитическом методе силового анализа [12] стрелки всех известных векторов сил должны соответствовать одному направлению обхода замкнутого векторного контура (рисунок 2). Поэтому знак «минус» в выражении (8) указывает на то, что вспомогательный вектор сил также обходит векторный контур плана сил в одном направлении с остальными векторами, а не является замыкающим.

Следующим этапом проведения силового анализа векторным методом является определение нормальных составляющих реакций в шарнирах, для нахождения которых в учебной литературе не приводятся соответствующие аналитические зависимости. При графоаналитическом способе решения данной задачи на плане сил (см. рисунок 2) проводятся две прямые, совпадающие с направлением звеньев рассматриваемой СГ. Пересечение данных прямых дает точку, определяющую направление искомого векторов неизвестных нормальных составляющих реакций в шарнирах [12].

Представим векторы неизвестных нормальных составляющих реакций в шарнирах  $B$  и  $C$  в виде произведения их длин (модулей) на единичные век-

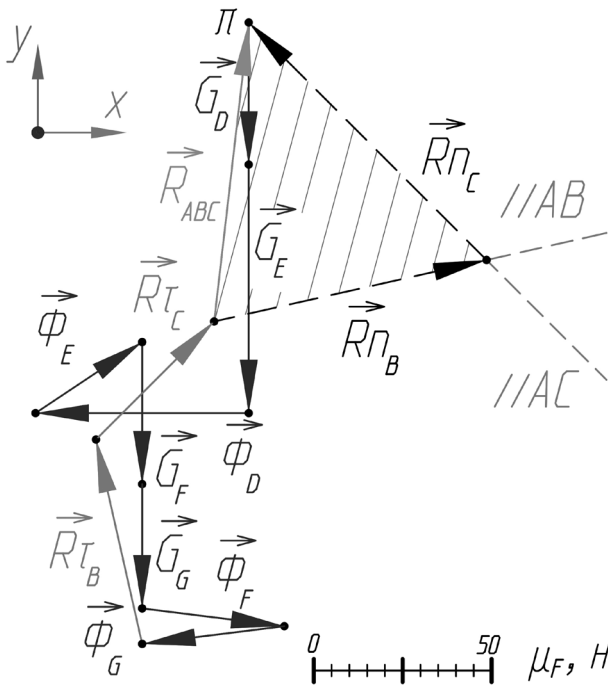


Рисунок 2 — План сил при графоаналитическом силовом анализе

Figure 2 — Diagram of component forces for graphic-analytical force analysis

торы (орты) их направления, которые заранее известны (параллельны звеньям  $AB$  и  $AC$ ):

$$\vec{Rn}_B = Rn_B \cdot \vec{e}_{RnB}; \vec{Rn}_C = Rn_C \cdot \vec{e}_{RnC}. \quad (9)$$

Единичные векторы (орты) нормальных составляющих реакций в шарнирах  $B$  и  $C$  найдем с помощью выражения (1):

$$\vec{e}_{RnB} = \text{Ort}(\vec{AB}); \vec{e}_{RnC} = \text{Ort}(\vec{AC}). \quad (10)$$

Для нахождения модулей векторов нормальных составляющих реакций в шарнирах рассматриваемой СГ воспользуемся еще одним свойством векторного произведения. Если в векторном произведении второй из перемножаемых векторов

(вектор силы) представить в виде единичного вектора (орта), то результатом такого произведения будет новый вектор, модуль которого численно равен плечу, отложенному от первого перемножаемого вектора на единичное направление второго перемножаемого вектора. Используем это свойство для нахождения модулей векторов нормальных составляющих реакций в шарнирах  $B$  и  $C$  рассматриваемой СГ в следующем векторном виде:

$$Rn_B = \frac{(\vec{R}_{ABC} \times \vec{e}_{RnC}) \cdot \vec{e}_z}{(\vec{e}_{RnB} \times \vec{e}_{RnC}) \cdot \vec{e}_z}; Rn_C = \frac{(\vec{R}_{ABC} \times \vec{e}_{RnB}) \cdot \vec{e}_z}{(\vec{e}_{RnC} \times \vec{e}_{RnB}) \cdot \vec{e}_z}. \quad (11)$$

Графические пояснения к описанным выше действиям показаны на увеличенном участке плана сил, приведенном на рисунке 3. В результате с помощью выражений (11) для звеньев  $AB$  и  $AC$  рассматриваемой СГ (см. рисунок 1) найдутся скалярные значения модулей векторов нормальных составляющих реакций в шарнирах  $B$  и  $C$ , а с помощью выражений (9) — соответствующие им векторы.

Теперь, зная векторы тангенциальных и нормальных составляющих реакций в шарнирах  $B$  и  $C$ , можно определить векторы их полных реакций:

$$\vec{R}_B = \vec{R}\tau_B + \vec{R}n_B; \vec{R}_C = \vec{R}\tau_C + \vec{R}n_C. \quad (12)$$

Найденные векторы полных реакций в шарнирах  $B$  и  $C$  в дальнейшем используются для силового анализа следующей присоединительной СГ, для которой данные векторы реакций уже будут являться внешними силовыми факторами (аналогично векторам сил тяжести или инерции), но взятыми с противоположным знаком [2, 12]. Это позволяет учесть влияние массово-инерционных характеристик рассматриваемой СГ на нагруженность следующей присоединительной СГ.

Оставшийся вектор реакции во внутренней кинематической паре (в шарнире  $A$ ) найдем из уравнения равновесия сил, действующих на одно из звеньев:

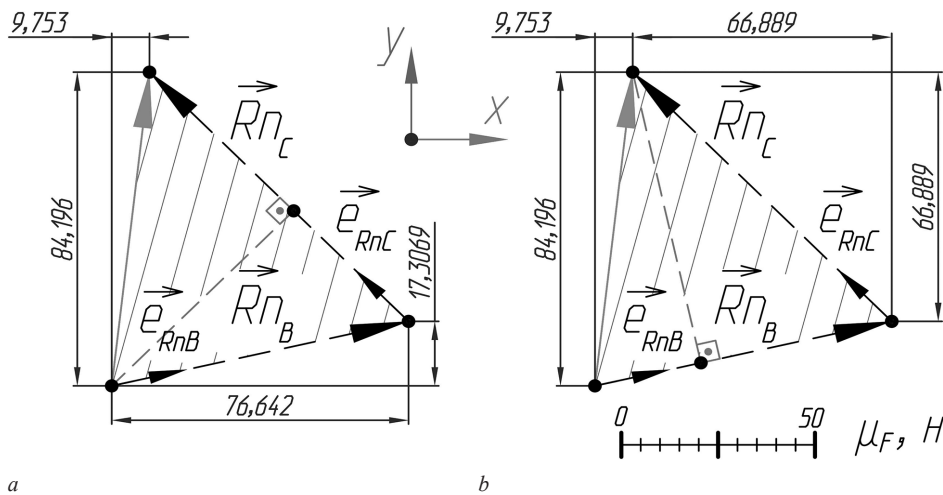


Рисунок 3 — Увеличенный участок плана сил для нахождения векторов нормальных составляющих:

$a$  — для шарнира  $B$ ;  $b$  — для шарнира  $C$

Figure 3 — Enlarged section of the diagram of component forces for finding vectors of normal components:  $a$  — for joint  $B$ ;  $b$  — for joint  $C$

$$\vec{R}_{A-AB} = -(\vec{R}_B + \vec{G}_D + \vec{G}_E + \vec{\Phi}_D + \vec{\Phi}_E) \tag{13}$$

или

$$\vec{R}_{A-AC} = -(\vec{R}_C + \vec{G}_F + \vec{G}_G + \vec{\Phi}_F + \vec{\Phi}_G).$$

Таким образом, с помощью выражений (3)–(13) проведен полный силовой анализ рассматриваемой СГ предложенным векторным методом. Как видно, достоинством данного метода является простота и наглядность, а также высокая точность получаемых результатов, т. к. все значения реакций находятся аналитически без использования графических построений.

Стоит отметить, если СГ содержит звено «ползун», то для такого звена порядок нахождения векторов тангенциальной и нормальной составляющей предложенным векторным методом будет немного отличаться. Для звена «ползун» вектор тангенциальной составляющей будет равен нулю, а вектор нормальной составляющей будет определяться направлением, перпендикулярным оси, направляющей движения ползуна.

Представленный порядок нахождения векторов тангенциальных (3)–(7) и нормальных (8)–(11) составляющих реакций легко может быть алгоритмизирован в любом математическом пакете или языке программирования, что позволяет существенно сократить большое число промежуточных вычислений. Так, на рисунке 4 показан пример реализации в математическом пакете РТС MathCAD двух функций пользователя, позволяющих рассчитывать векторы тангенциальных и нормальных составляющих реакций в шарнирах СГ плоских рычажных механизмов [15]. Для приведенных функций пользователя в качестве входных параметров выступают:  $P_0$  — вектор точки общего шарнира;  $P_1$  и  $P_2$  — векторы точек шарниров, в которых требуется найти векторы реакций;  $P_F$  и  $F$  — массивы векторов-точек и векторов-сил внешних нагрузок соответственно;  $M$  — суммарный вектор моментов сил;  $R_{012}$  — вспомогательный вектор силы;  $P$  — оператор, отвечающий за вывод вектора нормальной составляющей реакции для интересующего шарнира.

$$Rt(P_0, P_1, P_F, F, M) := \left| \begin{array}{l} P_{01} \leftarrow P_1 - P_0 \\ e_{Rt} \leftarrow \text{Ort} \left[ \begin{pmatrix} 1 & -\frac{P_{01} \cdot e_X}{P_{01} \cdot e_Y} & 0 \end{pmatrix}^T \right] \\ M_{\Sigma} \leftarrow \sum_{i=0}^{\text{rows}(P_F)-1} [(P_{F_i} - P_0) \times F_i] + M \\ Rt \leftarrow \frac{M_{\Sigma} \cdot e_Z}{(P_{01} \times e_{Rt}) \cdot e_Z} \cdot e_{Rt} \end{array} \right.$$

a

$$Rn(P_0, P_1, P_2, R_{012}, P) := \left| \begin{array}{l} P_{01} \leftarrow P_1 - P_0 \\ P_{02} \leftarrow P_2 - P_0 \\ Rn \leftarrow \begin{cases} \frac{R_{012} \times \text{Ort}(P_{02}) \cdot e_Z}{\text{Ort}(P_{01}) \times \text{Ort}(P_{02}) \cdot e_Z} \cdot \text{Ort}(P_{01}) & \text{if } P = P_1 \\ \frac{R_{012} \times \text{Ort}(P_{01}) \cdot e_Z}{\text{Ort}(P_{02}) \times \text{Ort}(P_{01}) \cdot e_Z} \cdot \text{Ort}(P_{02}) & \text{if } P = P_2 \end{cases} \end{array} \right.$$

b

Рисунок 4 — Функции пользователя для нахождения векторов реакций в шарнирах:

a — тангенциальных составляющих; b — нормальных составляющих

Figure 4 — User functions for finding reactions vectors in joints: a — tangential components; b — normal components

Таблица 1 — Исходные данные для расчета рассматриваемой структурной группы  
Table 1 — Initial data for calculating the structural group under consideration

Ось	Проекция координат точек, мм					Проекция силовых факторов, Н (Н·мм)									
	A	B	C	D	F	$G_{D(F)}$	$G_E$	$G_G$	$\Phi_D$	$\Phi_E$	$\Phi_F$	$\Phi_G$	$M_{AB}$	$M_{AC}$	
X	0	-155	80	-80	65	0	0	0	-60	30	40	-40	0	0	
Y	0	-35	-80	40	-20	-40	-70	-35	0	20	-5	5	0	0	
Z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-100	200	
Длины звеньев, мм						$L_{AE} = 70; L_{AG} = 60$									

**Результаты и их обсуждение.** Используя приведенные на рисунке 4 функции пользователя, покажем, как будет выглядеть аналитическое описание предложенного силового анализа векторным методом, а также полученные результаты расчета. Принятые в качестве примера исходные данные, необходимые для расчета рассматриваемой СГ (см. рисунок 1), приведены в таблице 1.

Аналитическое описание нахождения векторов тангенциальных и нормальных составляющих реакций в шарнирах *B* и *C* рассматриваемой СГ векторным методом (с использованием функций пользователя) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \vec{R}_{\tau B} &= R_{\tau}(\vec{A}, \vec{B}, (\vec{D} \ \vec{D} \ \vec{E} \ \vec{E})^T, (\vec{G}_D \ \vec{\Phi}_D \ \vec{G}_E \ \vec{\Phi}_E)^T, \vec{M}_{AB}); \\ \vec{R}_{\tau C} &= R_{\tau}(\vec{A}, \vec{C}, (\vec{F} \ \vec{F} \ \vec{G} \ \vec{G})^T, (\vec{G}_F \ \vec{\Phi}_F \ \vec{G}_G \ \vec{\Phi}_G)^T, \vec{M}_{AC}); \\ \vec{R}_{nB} &= R_n(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{R}_{ABC}, \vec{B}); \quad \vec{R}_{nC} = R_n(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{R}_{ABC}, \vec{C}). \end{aligned}$$

Для нахождения векторов полных реакций в шарнирах *B* и *C* можно воспользоваться выражениями (12), а для нахождения вектора полной реакции в общем шарнире *A* — выражениями (13). Результаты проведенного силового анализа предложенным векторным методом показаны в таблице 2.

**Проверка адекватности.** Проверка адекватности полученных значений векторов тангенциальных и нормальных составляющих реакций в шарнирах проводилась известным графоаналитическим способом путем построения плана сил (см. рисунок 2) и соответствующих измерений проекций интересующих векторов. Так, на рисунке 3

в качестве примера на увеличенном участке плана сил показаны значения проекций векторов нормальных составляющих реакций в шарнирах *B* и *C* по координатным осям, которые полностью совпадают с результатами, полученными аналитическим путем (см. таблицу 2). Аналогичную проверку можно провести при помощи различных программных комплексов динамического анализа систем твердых тел или в конечно-элементных пакетах. Так, на рисунке 5 приведена рассматриваемая СГ с учетом всех приложенных нагрузок, а также с автоматически выведенными значениями реакций в шарнирах *B* и *C*, разложенными на тангенциальные и нормальные составляющие, значения которых также полностью совпадают с аналитическими результатами. Кроме того, адекватность представленного силового анализа векторным методом подтверждена многолетним опытом его применения автором на практике.

**Выводы.** В данной работе на примере двухповодковой СГ представлен аналитический способ силового анализа плоских рычажных механизмов, основанный на векторном методе. Рассмотрен частный случай силового анализа, при котором двухповодковая СГ является последней присоединительной СГ плоского рычажного механизма. Предложенный силовой анализ позволяет с помощью оригинальных аналитических выражений для нахождения векторов нормальных и тангенциальных составляющих реакций доступно и наглядно определять силовые нагрузки, действующие во всех кинематических парах. Этот метод

Таблица 2 — Результаты силового анализа рассматриваемой структурной группы  
Table 2 — Results of force analysis of the structural group under consideration

Ось	Значения проекций сил, Н								
	$R_{\tau B}$	$R_{nB}$	$R_B$	$R_{\tau C}$	$R_{nC}$	$R_C$	$R_{ABC}$	$R_{A-AB}$	$R_{A-AC}$
X	-12,99	76,64	63,64	33,24	-66,88	-33,64	9,75	-33,64	33,64
Y	57,55	17,30	74,86	33,24	66,88	100,13	84,19	15,13	-15,13
Z	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Модуль	59,00	78,57	98,26	47,01	94,59	105,63	84,75	36,89	36,89

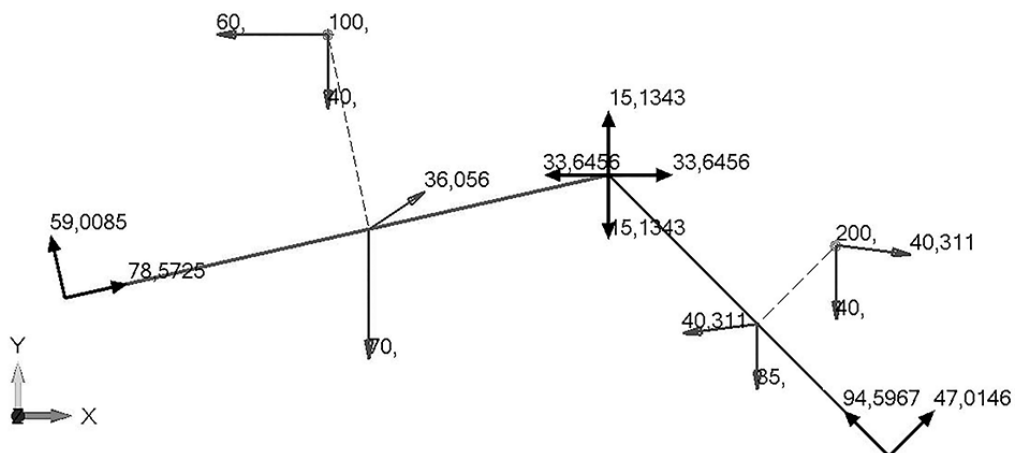


Рисунок 5 — Проверка реакций в шарнирах при помощи виртуального моделирования  
Figure 5 — Checking joint reactions using virtual simulation

легко поддается формализации и алгоритмизации в любых современных математических пакетах и языках программирования, а также позволяет применять различные методы оптимизации и параметризации для решения поставленной технической задачи. Предложенный силовой анализ плоских рычажных механизмов векторным методом может найти свое применение как в учебной, так и в инженерной практике, несмотря на то, что в настоящее время все более широкое распространение получают программные комплексы динамического анализа систем твердых тел.

### Список литературы

1. Теория механизмов и машин: учеб. пособие / М.З. Коловский [и др.]. — М.: Академия, 2008. — 560 с.
2. Чёрная, Л.А. Теория механизмов и машин. Курсовое проектирование: учеб. пособие / Л.А. Чёрная, Г.А. Тимофеев. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2019. — 172 с.
3. Бертяев, В.Д. Теоретическая механика на базе MathCAD. Практикум / В.Д. Бертяев. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005. — 734 с.
4. Семенов, Ю.А. Статика механизмов / Ю.А. Семенов, Н.С. Семенова // Теория механизмов и машин. — 2006. — Т. 4, № 2(8). — С. 47–58.
5. Кіницький, Я.Т. Теорія механізмів і машин в системі MathCAD: навч. посіб. / Я.Т. Кіницький, В.О. Харжевський, М.В. Марченко. — Хмельницький: ХНУ, 2014.
6. Dynamic force analysis of a six-link planar mechanism / Y. Umbetkulov [et al.] // MATEC Web of conferences. — 2018. — Vol. 251. — DOI: <https://doi.org/10.1051/mateconf/201825104028>.
7. Dien, N.P. Dynamic force analysis of a six-link planar mechanism under consideration of friction at the joints / N.P. Dien, N.V. Khang // Vietnam Journal of Mechanics. — 2004. — Vol. 26, no. 2. — Pp. 65–75. — DOI: <https://doi.org/10.15625/0866-7136/26/2/5690>.
8. Дюжев, А.А. Обеспечение универсальности навесного устройства энергосредства УЭС-2-250А «Полесье» с целью создания сельскохозяйственных агрегатов модульного типа / А.А. Дюжев, А.В. Котов, Ю.В. Чупрынин // Энергосберегающие технологии и технические средства в сельскохозяйственном производстве: докл. междунар. науч.-практ. конф.: в 2 ч. — Минск, 2008. — Ч. 1. — С. 78–84.
9. Бобыренко, С.В. Моделирование процесса работы механизма подпрессовки питающего аппарата кормоуборочного комбайна / С.В. Бобыренко, А.В. Котов // Вестник БРУ. — 2011. — № 1(30). — С. 18–26.
10. Математическая модель механизма уравнивания и подъема косилки-плющилки ротационной / Д.В. Джасов [и др.] // Актуальные вопросы машиноведения: сб. науч. тр. / Объедин. ин-т машиностроения НАН Беларуси; редкол.: С.Н. Поддубко [и др.]. — Минск, 2020. — Вып. 9. — С. 27–30.
11. Котов, А.В. Оптимизация параметров предохранительного элемента пальчикового механизма шнека жатки зерноуборочного комбайна / А.В. Котов // Тракторы и сельхозмашины. — 2023. — Т. 90, № 1. — С. 13–24. — DOI: <https://doi.org/10.17816/0321-4443-114970>.
12. Артоболевский, И.И. Теория механизмов и машин: учеб. для вузов / И.И. Артоболевский. — 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1988. — 640 с.
13. Канатников, А.Н. Аналитическая геометрия: учеб. для вузов / А.Н. Канатников, А.П. Крищенко; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. — 2-е изд. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. — 388 с.
14. Епихин, В.Е. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Теория и решение задач: учеб. пособие / В.Е. Епихин, С.С. Граськин. — М.: КНОРУС, 2021. — 609 с.
15. Воскобойников, Ю.Е. Основы вычислений и программирования в пакете MathCAD PRIME: учеб. пособие для вузов / Ю.Е. Воскобойников, А.Ф. Садорожный. — 3-е изд., стер. — СПб.: Лань, 2023. — 224 с.

KOTOV Andrey V., M. Sc. in Eng.

Leading Design Engineer  
E-mail: [androskv@mail.ru](mailto:androskv@mail.ru)

JSC “Seismotekhnika”, Gomel, Republic of Belarus

Received 13 October 2024.

## FORCE ANALYSIS OF PLAIN LEVER MECHANISMS BY VECTOR METHOD

*An analytical method is presented for force analysis of plain lever mechanisms with one degree of freedom, based on the vector method. Using the example of a two-drive structural group, a method is outlined for finding reaction vectors in all its kinematic pairs, while maintaining the clarity and consistency of the solution inherent in the graphic-analytical method of diagrams of component forces. An original analytical description is given for finding the vectors of tangential and normal components of reactions in kinematic pairs. Application of the proposed method of force analysis makes it possible to find reaction vectors in kinematic pairs without compiling and solving complex systems of equilibrium equations or graphical construction. Adaptation of the proposed force analysis in modern mathematical packages allows for the study of plain lever mechanisms with one degree of freedom in a short time and with high accuracy.*

**Keywords:** force analysis, vector method, lever mechanism, structural group, two-drive group, kinematic pair, tangential component of the reaction, normal component of the reaction

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2024-2-67-36-43>

## References

1. Kozlovsky M.Z., et al. *Teoriya mekhanizmov i mashin* [Theory of mechanisms and machines]. Moscow, Akademiya Publ., 2008. 560 p. (in Russ.).
2. Chernaya L.A., Timofeev G.A. *Teoriya mekhanizmov i mashin* [Theory of mechanisms and machines]. Moscow, MG TU im. N.E. Bauman Publ., 2019. 172 p. (in Russ.).
3. Bertyaev V.D. *Teoreticheskaya mekhanika na baze MathCAD. Praktikum* [Theoretical mechanics based on MathCAD. Workshop]. Saint-Petersburg, BKhV-Peterburg Publ., 2005. 734 p. (in Russ.).
4. Semenov Yu.A., Semenova N.S. Statika mekhanizmov [Statics of mechanisms]. *Teoriya mekhanizmov i mashin*, 2006, vol. 4, no. 2(8), pp. 47–58 (in Russ.).
5. Kinytskyi Ya.T., Kharzhevskiy V.O., Marchenko M.V. *Teoriya mekhanizmov i mashin v sisteme MathCAD* [Theory of mechanisms and machines in the MathCAD system]. Khmelnytskyi, Khmelnytskyi natsionalnyy universitet Publ., 2014.
6. Umbetkulov Y., et al. Dynamic force analysis of a six-link planar mechanism. *MATEC Web of conferences*, 2018, vol. 251. DOI: <https://doi.org/10.15625/mateconf/201825104028>.
7. Dien N.P., Khang N.V. Dynamic force analysis of a six-link planar mechanism under consideration of friction at the joints. *Vietnam journal of mechanics*, 2004, vol. 26, no. 2, pp. 65–75. DOI: <https://doi.org/10.15625/0866-7136/26/2/5690>.
8. Dyuzhev A.A., Kotov A.V., Chuprynin Yu.V. Obespechenie universalnosti navesnogo ustroystva energosredstva UES-2-250A “Polesye” s tselyu sozdaniya selskokhozyaystvennykh agregatov modulnogo tipa [Ensuring the universality of the hinged device of the power facility UES-2-250A “Polesye” in order to create modular-type agricultural units]. *Doklady Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii “Energoberegayushchie tekhnologii i tekhnicheskie sredstva v selskokhozyaystvennom proizvodstve”* [Proc. International scientific and practical conference “Energy-saving technologies and technical means in agriculture production”]. Minsk, 2008, part 1, pp. 78–84 (in Russ.).
9. Bobyrenko S.V., Kotov A.V. Modelirovanie protsessa raboty mekhanizma podpressovki pitayushchego apparata kormoborochnogo kombayna [The simulation of the operation of pre-pressing mechanism of the feed unit of the fodder harvester]. *Vestnik Belorussko-Rossiyskogo universiteta*, 2011, no. 1(30), pp. 18–26 (in Russ.).
10. Jasov D.V., Konyavskiy A.D., Shantyko A.S., Chuprynin Yu.V. Matematicheskaya model mekhanizma uravnoveshivaniya i podema kosilki-plyushchilki rotatsionnoy [Mathematical model of the mechanism for balancing and lifting the rotary windrower]. *Aktualnye voprosy mashinovedeniya*, 2020, vol. 9, pp. 27–30 (in Russ.).
11. Kotov A.V. Optimizatsiya parametrov predokhranitel'nogo elementa palchikovogo mekhanizma shneka zhatki zernoborochnogo kombayna [The optimization of parameters of a safety element of the finger mechanism of the header auger of a combine harvester]. *Tractors and agricultural machinery*, 2023, vol. 90, no. 1, pp. 13–24. DOI: <https://doi.org/10.17816/0321-4443-114970> (in Russ.).
12. Artobolevskiy I.I. *Teoriya mekhanizmov i mashin* [Theory of mechanisms and machines]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 640 p. (in Russ.).
13. Kanatnikov A.N., Krishchenko A.P. *Analiticheskaya geometriya* [Analytical geometry]. Moscow, MG TU im. N.E. Bauman Publ., 2000. 388 p. (in Russ.).
14. Epikhin V.E. *Analiticheskaya geometriya i lineynaya algebra. Teoriya i reshenie zadach* [Analytical geometry and linear algebra. Theory and problem solving]. Moscow, KNORUS Publ., 2021. 609 p. (in Russ.).
15. Voskoboynikov Yu.E., Zadorozhnyy A.F. *Osnovy vychisleniy i programmirovaniya v pakete MathCAD PRIME* [Basics of calculations and programming in the package MathCAD PRIME]. Saint Petersburg, Lan Publ., 2023. 224 p. (in Russ.).