

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3

Ю.М. ПЛЕСКАЧЕВСКИЙ, чл.-корр. НАН Беларуси, д-р техн. наук, проф.
E-mail: pleskym@mail.ru

Э.И. СТАРОВОЙТОВ, д-р физ.-мат. наук, проф.
профессор кафедры «Строительная механика, геотехника и строительные конструкции»¹
E-mail: edstar0@yandex.by

Д.В. ЛЕОНЕНКО, д-р физ.-мат. наук, проф.
заведующий кафедрой «Строительная механика, геотехника и строительные конструкции»¹
E-mail: leoden@list.ru

¹Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 25.09.2024.

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРУГОВЫХ СЭНДВИЧ-ПЛАСТИН В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

Исследовано воздействие однородного температурного поля на частоты собственных колебаний круговой сэндвич-пластины. В качестве кинематической использована гипотеза ломаной линии: для одинаковых высокопрочных тонких несущих слоев — гипотезы Кирхгофа; для легкого несжимаемого по толщине более толстого заполнителя — гипотеза Тимошенко о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали. Дифференциальные уравнения поперечных колебаний пластины получены вариационным методом. Искомые функции являются прогиб пластины и сдвиг в заполнителе. Аналитическое решение начально-краевой задачи построено путем разложения в ряд по системе собственных ортонормированных функций при шарнирном опирании или заделке контура пластины. Приведены расчетные формулы для перемещений. Проведен числовой параметрический анализ зависимости частот колебаний пластины от материалов несущих слоев и температуры.

Ключевые слова: круговая сэндвич-пластина, собственные колебания, частоты, температура

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2024-4-69-70-77>

Введение. Современные требования машиностроительного комплекса к прочности и надежности конструкций, работающих в условиях воздействия комплексных динамических и температурных нагрузок, обуславливают применение композитных материалов. Возникающие проблемы исследования напряженно-деформированного состояния подобных элементов конструкций при динамическом или квазистатическом термосиловом воздействии относят к числу наиболее актуальных в настоящее время. Для проведения соответствующих расчетов возникает необходимость создания механико-математических моделей, чему и посвящен многочисленный ряд публикаций.

Монографии [1–7] посвящены разработке расчетных моделей статического и динамического деформирования слоистых конструкций при учете различных физико-механических полей. Предлагаются подходы к выбору кинематических гипотез, постановке и методике решения краевых и начально-краевых задач, отмечаются возникающие особенности при тепловых воздействиях. Проводится анализ термического напряжения композитных балок, пластин и оболочек, проведенный с помощью вычислительного моделирования.

Собственные и вынужденные колебания слоистых оболочек исследуются в работах [8–14].

Нестационарное нагружение стержней типа Тимошенко и неоднородных элементов анализируются в публикациях [15–18]. Колебания и изгиб трехслойных элементов конструкций, связанных с упругим основанием или вязкой жидкостью, рассмотрены в статьях [19–27]. Динамике трехслойной ступенчатой пластины при ударном периодическом воздействии посвящены работы [28, 29].

Геометрически нелинейная теория трехслойных пластин и оболочек рассмотрена в работах [30–33]. Поведение круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем исследовалось в [34]. Статья [35] посвящена неосесимметричному квазистатическому нагружению трехслойных пластин в своей плоскости. В публикациях [36, 37] исследуется деформирование трехслойных стержней в температурном поле.

Здесь предложены постановка и решение начально-краевой задачи о собственных колебаниях круговой сэндвич-пластины в однородном температурном поле.

Постановка начально краевой задачи. Собственные колебания круговой сэндвич-пластины рассматриваются в цилиндрической системе координат, связанной со срединной плоскостью заполнителя (рисунок 1). Толщины тонких несущих слоев $h_1 = h_2 = h$ в относительно толстом наполнителе $h_3 = 2c$.

Для тонких жестких несущих слоев пластины принимаются гипотезы Кирхгофа о прямолинейности, несжимаемости и перпендикулярности нормали к деформированной срединной поверхности. В легком наполнителе нормаль к срединной поверхности после приложения нагрузки остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(r, t)$ — гипотеза Тимошенко. Деформации связаны с напряжениями термоупругими соотношениями закона Гука:

$$s_{\alpha}^{(k)} = 2G_k \varepsilon_{\alpha}^{(k)}; s_{rz}^{(3)} = 2G_k \varepsilon_{rz}^{(3)} \quad (\alpha = r, \varphi; k = 1, 2, 3);$$

$$\sigma^{(k)} = 3K_k (\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k} T), \quad (1)$$

где $s_{\alpha}^{(k)}, s_{rz}^{(3)}$ — девиаторы тензора напряжений; $\varepsilon_{\alpha}^{(k)}, \varepsilon_{rz}^{(3)}$ — девиаторы тензора деформаций; $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ — гидростатическое напряжение и средняя деформация; G_k, K_k — модули сдвига и объемного деформирования, причем, $G_1 = G_2 = G, K_1 = K_2 = K$; $T = \text{const}$ — известная температура, отсчитываемая

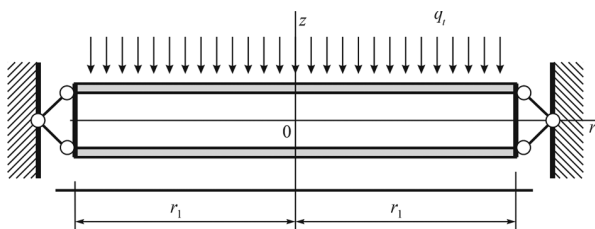


Рисунок 1 — Расчетная схема шарнирно опертой трехслойной круговой пластины
Figure 1 — Calculation diagram of a hinged circular three-layer plate

мая от некоторого начального значения T_0 ; α_{0k} — коэффициент линейного температурного расширения материала k -го слоя ($k = 1, 2, 3$).

Предполагается, что трехслойная круговая пластина шарнирно оперта по контуру. Общие уравнения собственных колебаний подобной трехслойной пластины при изотермическом нагружении приведены в [1]. В нашем случае для сэндвич-пластины они упрощаются и принимают вид:

$$L_2(a_4 \psi - a_5 w_{,r}) = 0;$$

$$L_3(a_5 \psi - a_6 w_{,r}) - M_0 \ddot{w} = 0, \quad (2)$$

где $w(r, t)$, $\psi(r, t)$ — искомые функции (прогиб и относительный сдвиг в наполнителе); $M_0 \ddot{w}$ — инерционные силы, причем $M_0 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3) r_1^2$, ρ_k — плотность материала, две точки сверху обозначают вторую производную по времени; дифференцирование по координате обозначено запятой в нижнем индексе; L_2, L_3 — дифференциальные операторы; a_i — коэффициенты:

$$L_2(g) \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}; L_3(g) \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3};$$

$$a_4 = c^2 \left(2hK^+ + \frac{2}{3} cK_3^+ \right); a_5 = c \left[2h \left(c + \frac{1}{2} h \right) K^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right];$$

$$a_6 = 2h \left(c^2 + ch + \frac{1}{3} h \right) K^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+,$$

$$K^+ = K + \frac{4}{3} G, \quad K_3^+ = K_3 + \frac{4}{3} G_3.$$

Для описания зависимости упругих характеристик материалов слоев от температуры применялась формула Белла [2]:

$$\{G(T), K(T)\} = \{G(0), K(0)\} \varphi(T);$$

$$\varphi(T) = \begin{cases} 1, & 0 < T/T_m \leq 0,06, \\ 1,03(1 - T/(2T_m)), & 0,06 < T/T_m \leq 0,57, \end{cases} \quad (3)$$

где T_m — температура плавления материала.

Значения модулей упругости $G(0), K(0), E(0)$ при так называемом нулевом напряжении определяются из эксперимента. Например, зная G_0 , при некоторой начальной температуре T_0 получим, что $G(0) = G_0 / \varphi(T_0)$.

На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, не допускающей относительный сдвиг слоев. Граничные условия на контуре ($r = r_1$) принимаются следующие:

- при заделке контура пластины:

$$\psi = w = w_{,r} = 0; \quad (4)$$

- при шарнирном опирании пластины (см. рисунок 1):

$$\psi = w = 0; \quad M_r = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_r^{(k)} dz = 0, \quad (5)$$

где $\sigma_r^{(k)}$ — радиальные напряжения; M_r — обобщенный радиальный изгибающий момент:

$$M_r = a_5 \Psi_{,r} - a_6 w_{,rr} - a_{60} \frac{w_{,r}}{r_1};$$

$$a_{60} = 2hK^-(c^2 + ch + \frac{1}{3}h^2) + \frac{2}{3}c^3 K_3^-;$$

$$K^- = K - \frac{2}{3}G, K_3^- = K_3 - \frac{2}{3}G_3.$$

Также должны выполняться следующие начальные условия движения ($t = 0$):

$$w(r, 0) = f(r); \dot{w}(r, 0) = g(r); T(z, 0) = 0, \quad (6)$$

где $f(r)$, $g(r)$ — начальные прогиб и поперечная скорость пластины.

Температура ни в уравнения движения (2), ни в граничные условия (4), (5) явным образом не входит, она влияет только на упругие модули материалов слоев в соответствии с (3).

С помощью первого уравнения в системе (2) можно выделить отдельное уравнение для прогиба. Относительный сдвиг при этом выражается через производную от прогиба по радиальной координате. В результате

$$\Psi = \frac{a_5}{a_4} w_{,r} + C_3 r + \frac{C_4}{r}; L_3(w_{,r}) + M^4 \ddot{w} = 0, \quad (7)$$

где коэффициент $M^4 = \frac{a_4}{a_6 a_4 - a_5^2} M_0$.

В (7) необходимо положить константу интегрирования $C_4 = 0$, т. к. относительный сдвиг Ψ ограничен в центре пластины. Подставив первое уравнение (7) в граничные условия (5), выразим оставшуюся константу интегрирования через производную от прогиба на контуре:

$$C_3 = -\frac{a_5}{a_4 r_1} w_{,r}(r_1, t).$$

Используя это соотношение можно получить второе граничное условие для прогиба при шарнирном опирании. В результате имеем:

$$w = 0; a_6 w_{,rr} + \frac{a_{60}}{r_1} w_{,r} = 0; r = r_1. \quad (8)$$

Таким образом, искомым динамический прогиб круговой трехслойной пластины должен удовлетворять однородному дифференциальному уравнению в частных производных (7), граничным условиям (8) и начальным условиям (6).

Решение задачи о собственных колебаниях. Относительный сдвиг и прогиб сэндвич-пластины следуют из общего решения для несимметричной по толщине трехслойной пластины при изотермическом нагружении [1]. В нашем случае имеем:

$$\Psi(r, t) = b_2 \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t));$$

$$w(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)); \quad (9)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots,$$

где ω_n — собственные частоты колебаний; v_n, ϕ_n — системы собственных функций:

$$v_n(\beta_n r) \equiv \frac{1}{d_n} \left[J_0(\beta_n r) - \frac{J_0(\beta_n r_1)}{I_0(\beta_n r_1)} I_0(\beta_n r) \right];$$

$$\phi_n = \frac{\beta_n}{d_n} \left[J_1(\beta_n r_1) \frac{r}{r_1} - J_1(\beta_n r) + \frac{J_0(\beta_n r_1)}{I_0(\beta_n r_1)} \left(I_1(\beta_n r_1) \frac{r}{r_1} - I_1(\beta_n r) \right) \right],$$

где β_n — собственные числа оператора L_3 ; d_n — нормировочные коэффициенты; $J_n(r)$, $I_n(r)$ — функции Бесселя n -го порядка.

Трансцендентное уравнение для определения собственных чисел β_n при защемленном контуре следует из условий (4):

$$I_1(\beta r_1) J_0(\beta r_1) + J_1(\beta r_1) I_0(\beta r_1) = 0. \quad (10)$$

При шарнирно опертом контуре аналогичное уравнение получаем из условий (5):

$$J_0(\beta r_1) \left[a_7 \left(\beta I_0(\beta r_1) - \frac{I_1(\beta r_1)}{r_1} \right) + \frac{a_8}{r_1} I_1(\beta r_1) \right] +$$

$$+ I_0(\beta r_1) \left[a_7 \left(\beta J_0(\beta r_1) - \frac{J_1(\beta r_1)}{r_1} \right) + \frac{a_8}{r_1} J_1(\beta r_1) \right] = 0, \quad (11)$$

где коэффициенты $a_7 = a_6 - a_{25}/a_4$, $a_8 = a_{60} + a_{25}/a_4$.

Константы интегрирования A_n, B_n в (9) следуют из начальных условий (6):

$$A_n = \int_0^{r_1} f(r) v_n r dr; B_n = \frac{1}{\omega_n} \int_0^{r_1} g(r) v_n r dr.$$

Частоты собственных колебаний ω_n выражаются через собственные числа β_n :

$$\omega_n^2 = \frac{\beta_n^4}{M^4}. \quad (12)$$

Численная апробация решения. Численные результаты получены для круговой трехслойной пластины. Толщины слоев принимались $h = 0,02$ м, $h_3 = 0,1$ м; радиус пластины $r_1 = 1$ м. Материалы в сэндвич-пакете рассматривались следующие: Д16-Т-фторопласт-4–Д16-Т; ВТ-20–фторопласт-4–ВТ-20.

В таблице 1 приведены собственные числа β_n для трехслойных пластин, которые в соответ-

Таблица 1 — Собственные числа при защемленном контуре сэндвич-пластины
Table 1 — Eigenvalues at the pinched contour of the sandwich plate

Номер n	Собственное число β_n	Номер n	Собственное число β_n
0	3,196	8	28,279
1	6,306	9	31,378
2	9,439	10	34,561
3	12,577	11	37,702
4	15,716	12	40,844
5	18,857	13	43,985
6	21,997	14	47,126
7	25,138		

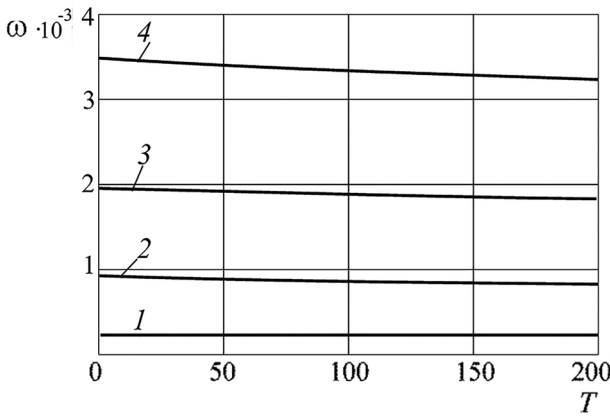


Рисунок 2 — Зависимость собственных частот колебаний от температуры пластины Д16-Т-фторопласт-4-Д16-Т (заделка): 1 — ω_0 ; 2 — ω_1 ; 3 — ω_2 ; 4 — ω_3
 Figure 2 — Dependence of natural oscillation frequencies on temperature of the D16-T-fluoroplast-4-D16-T plate (termination): 1 — ω_0 ; 2 — ω_1 ; 3 — ω_2 ; 4 — ω_3

ствии с уравнением (10) не зависят от материалов и толщин слоев. Первые четыре числа совпадают с обычно приводимыми в литературе для защемленной однослойной пластины.

Собственные частоты колебаний ω_n вычислялись по формуле (12) с использованием собственных чисел из таблицы 1. Рисунок 2 показывает зависимость первых четырех собственных частот колебаний пластины Д16-Т-фторопласт-4-Д16-Т с заделанным контуром от температуры: 1 — ω_0 ; 2 — ω_1 ; 3 — ω_2 ; 4 — ω_3 . Предполагалось, что вся пластина прогревается равномерно до заданной температуры. В соответствии с формулой Белла (3), нагревание пластины на 100° приводит к уменьшению частот на 3,6 %, при нагревании на 200° — к уменьшению на 7 %.

Трансцендентное уравнение для собственных чисел при шарнирном опирании (11) численно исследовано для пакетов Д16-Т-фторопласт-Д16-Т и ВТ-20-фторопласт-4-ВТ-20 при тех же толщинах слоев. Первые 15 корней, вычисленные с точностью до 0,001, приведены в таблице 2. Их значения в случае дюралюминиевых несущих слоев

Таблица 2 — Отношение собственных чисел β_n для пластин Д16-Т-фторопласт-4-Д16-Т / ВТ-20-фторопласт-4-ВТ-20 (шарнирное закрепление)
 Table 2 — Eigenvalue ratio β_n for plates D16-T-fluoroplast-4-D16-T / VT-20-fluoroplast-4-VT-20 (hinged fastening)

Номер n	Собственные числа β_n	Номер n	Собственные числа β_n
0	3,141 / 3,177	8	27,950 / 28,134
1	6,203 / 6,270	9	31,069 / 31,262
2	9,293 / 9,426	10	34,191 / 34,390
3	12,392 / 12,507	11	37,314 / 37,519
4	15,497 / 15,63	12	40,439 / 40,649
5	18,605 / 18,755	13	43,565 / 43,778
6	21,717 / 21,88	14	46,692 / 46,909
7	24,832 / 25,007		

несколько ниже, чем при защемленном контуре (см. таблицу 1). Это объясняется уменьшением жесткости конструкции при переходе к шарнирному опиранию. При использовании в качестве материала несущих слоев титанового сплава ВТ-20 частоты собственных колебаний увеличиваются.

На рисунке 3 приведены графики зависимости собственных чисел и частот колебаний от температуры у шарнирно опертой пластины с несущими слоями Д16-Т-фторопласт-4-Д16-Т: 1 — ω_0 ; 2 — ω_1 ; 3 — ω_2 ; 4 — ω_3 . Здесь, как и у защемленной пластины, нагревание на 100° приводит к уменьшению частот на 3,6 %, при нагревании на 200° — на 7 %.

Рисунок 4 иллюстрирует соответствующие графики для пластины с несущими слоями из титанового сплава ВТ-20. Нумерация кривых прежняя. Собственные числа здесь практически такие же, как и в предыдущем случае (отличие менее 1 %). Частоты при титановых несущих слоях больше примерно на 15 %.

При нагревании пластины на 100 °С частоты уменьшаются на 1,6 %, при нагревании на 200 °С — на 3,2 %. Это вызвано тем, что у титанового сплава температура плавления выше, чем у дюралюминия. Это, в соответствии с фор-

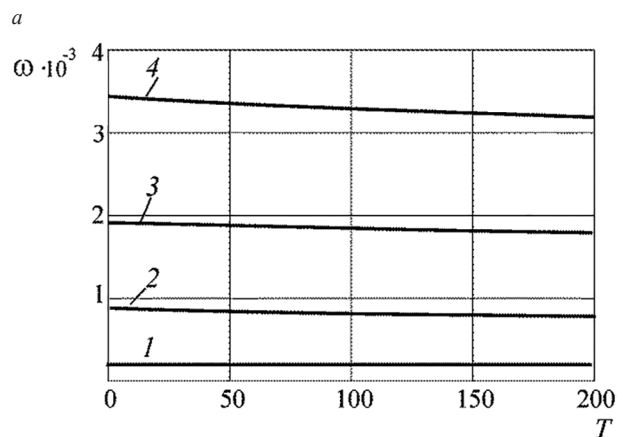
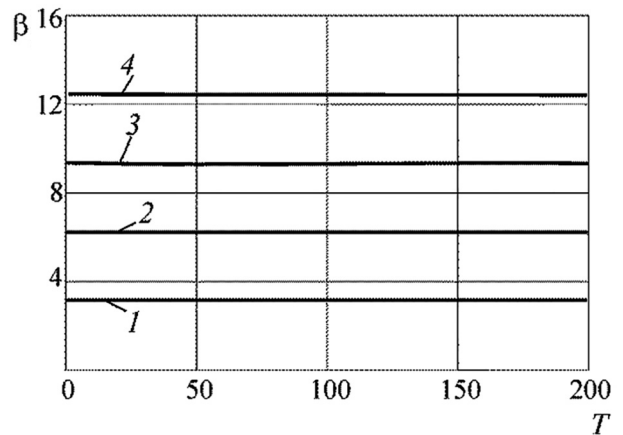


Рисунок 3 — Зависимость собственных чисел и частот колебаний от температуры пластины Д16-Т-фторопласт-4-Д16-Т (шарнир)
 Figure 3 — Dependence of eigenvalues and natural oscillation frequencies on temperature of D16-T-fluoroplast-4-D16-T plate (hinge)

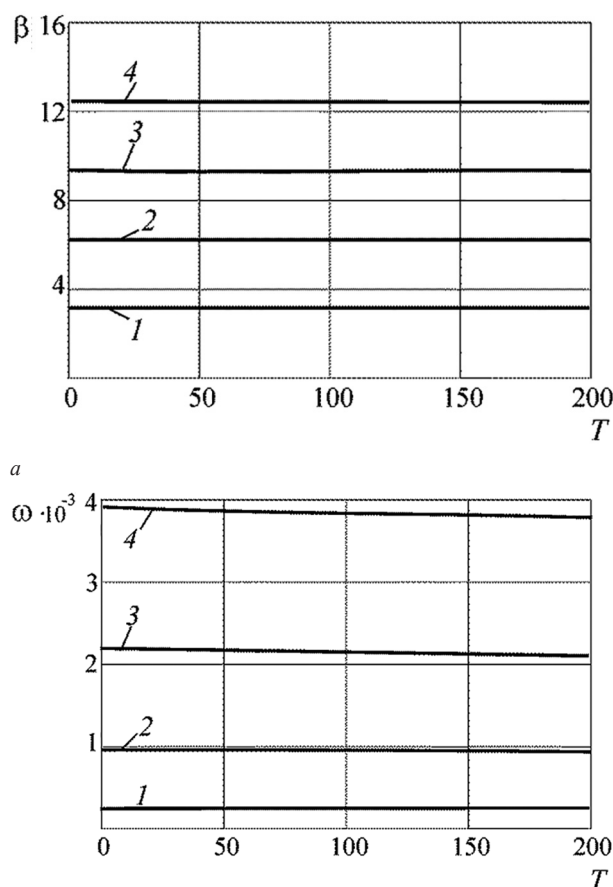


Рисунок 4 — Зависимость собственных чисел и частот колебаний от температуры пластины VT-20–фторопласт-4–VT-20 (шарнир)

Figure 4 — Dependence of eigenvalues and natural oscillation frequencies on temperature of VT-20–fluoroplast-4–VT-20 plate (hinge)

мулой Белла, приводит к тому, что модули упругости в меньшей степени зависят от температуры пластины. Отличия в процентах роста частот $\omega_0, \dots, \omega_3$ от температуры здесь, как и у заземленной пластины, незначительно.

Выводы. Предложенная механико-математическая модель трехслойных круговых пластин позволяет учитывать влияние однородного температурного поля на динамические характеристики при свободных колебаниях. Численные результаты показали слабую зависимость собственных чисел и частот колебаний от стационарной температуры. При различных способах закрепления контура (заделка, шарнирное опирание) максимальное изменение частот при нагревании на 100 °C не превышает 3,6 %; при нагревании на 200 °C — 7 % независимо от материалов несущих слоев и наполнителя.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-2025».

Список литературы

1. Плещачевский, Ю.М. Динамика металлополимерных систем / Ю.М. Плещачевский, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. — Минск: Беларус. навука, 2004. — 385 с.

2. Горшков, А.Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. — М.: Физматлит, 2005. — 576 с.
3. Журавков, М.А. Математические модели механики твердых тел / М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов. — Минск: БГУ, 2021. — 535 с.
4. Zhuravkov, M. Mechanics of Solid Deformable Body / M. Zhuravkov, Y. Lyu, E. Starovoitov. — Singapore: Springer Verlag, 2023. — 317 p. — DOI: <https://doi.org/10.1007/978-981-19-8410-5>.
5. Абдусаттаров, А. Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях / А. Абдусаттаров, Э.И. Старовойтов, Н.Б. Рузиева. — Ташкент: Ideal Press, 2023. — 381 с.
6. Деформирование трехслойных пластин при термосиловых нагрузках / Э.И. Старовойтов, Ю.В. Шафиева, А.В. Нестерович, А.Г. Козел. — Гомель: БелГУТ, 2024. — 395 с.
7. Carrera, E. Thermal stress analysis of composite beams, plates and shells: computational modelling and applications / E. Carrera, F.A. Fazzolari, M. Cinefra. — 1st ed. — Academic Press, 2016. — 440 p.
8. Mikhasev, G.I. Free vibrations of elastic laminated beams, plates and cylindrical shells / G.I. Mikhasev, H. Altenbach // Thin-walled Laminated Structures. Advanced Structured Materials. — 2019. — Vol. 106. — Pp. 157–198. — DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-12761-9_4.
9. Leonenko, D.V. Vibrations of cylindrical sandwich shells with elastic core under local loads / D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // International Applied Mechanics. — 2016. — Vol. 52, iss. 4. — Pp. 359–367. — DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-016-0760-8>.
10. Старовойтов, Э.И. Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2015. — Т. 21, № 2. — С. 162–169.
11. Bakulin, V.N. Panel flutter of a variable-thickness composite shell / V.N. Bakulin, M.A. Konopelchev, A.Ya. Nedbai // Mechanics of Composite Materials. — 2020. — Vol. 56, iss. 5. — Pp. 629–638. — DOI: <https://doi.org/10.1007/s11029-020-09909-y>.
12. Bakulin, V.N. Parametric resonance of a three-layered cylindrical composite rib-stiffened shell / V.N. Bakulin, D.A. Boitsova, A.Ya. Nedbai // Mechanics of Composite Materials. — 2021. — Vol. 57, iss. 5. — Pp. 623–634. — DOI: <https://doi.org/10.1007/s11029-021-09984-9>.
13. Tarlakovskii, D.V. Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells / D.V. Tarlakovskii, G.V. Fedotenkov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. — 2014. — Vol. 43, iss. 2. — Pp. 145–152. — DOI: <https://doi.org/10.3103/S1052618814010178>.
14. Дзэбисашвили, Г.Т. Частоты собственных колебаний призматических тонких оболочек / Г.Т. Дзэбисашвили, А.Л. Смирнов, С.Б. Филиппов // Известия Саратовского ун-та. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2024. — Т. 24, вып. 1. — С. 49–56. — DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-49-56>.
15. Fedotenkov, G.V. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam / G.V. Fedotenkov, D.V. Tarlakovsky, Y.A. Vahterova // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2019. — Vol. 40, iss. 4. — Pp. 439–447. — DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080219040061>.
16. Igumnov, L.A. A Two-Dimensional Nonstationary Problem of Elastic Diffusion for an Orthotropic One-Component Layer / L.A. Igumnov, D.V. Tarlakovskii, A.V. Zemskov // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2017. — Vol. 38, iss. 5. — Pp. 808–817. — DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080217050146>.
17. Вестяк, В.А. Распространение нестационарных объемных возмущений в упругой полуплоскости / В.А. Вестяк, А.С. Садков, Д.В. Тарлаковский // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2011. — № 2. — С. 130–140.
18. Тарлаковский, Д.В. Нестационарные задачи для упругой полуплоскости с подвижной точкой смены граничных условий / Д.В. Тарлаковский, Г.В. Федотенков // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. — 2016. — № 3. — С. 188–206. — DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2016.3.13>.

19. Агеев, Р.В. Колебания стенок щелевого канала с вязкой жидкостью, образованного трехслойным и твердым диском / Р.В. Агеев, Л.И. Могилевич, В.С. Попов // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 2014. — № 1. — С. 3–11.
20. Hydroelastic oscillations of a circular plate, resting on Winkler foundation / D.V. Kondratov, L.I. Mogilevich, V.S. Popov, A.A. Popova // Journal of Physics: Conference Series. — 2018. — Vol. 944. — DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/944/1/012057>.
21. Pradhan, M. Static and dynamic stability analysis of an asymmetric sandwich beam resting on a variable Pasternak foundation subjected to thermal gradient / M. Pradhan, P.R. Dash, P.K. Pradhan // Meccanica. — 2016. — Vol. 51, iss. 3. — Pp. 725–739. — DOI: <https://doi.org/10.1007/s11012-015-0229-6>.
22. Трацевская, Е.Ю. Динамическая неустойчивость квазитиксотропных моренных грунтов / Е.Ю. Трацевская // Литосфера. — 2017. — № 1(46). — С. 107–112.
23. Трацевская, Е.Ю. Демпфирующие свойства слабосвязных трехфазных грунтов / Е.Ю. Трацевская // Литосфера. — 2019. — № 2(51). — С. 115–121.
24. Плескачевский, Ю.М. Динамика круглых металлополимерных пластин на упругом основании. Часть 1. Свободные колебания / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. — 2008. — № 4(5). — С. 48–51.
25. Плескачевский, Ю.М. Динамика круговых металлополимерных пластин на упругом основании. Часть II. Вынужденные колебания / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. — 2009. — № 1(6). — С. 48–51.
26. Козел, А.Г. Сравнение решений задач изгиба трехслойных пластин на основаниях Винклера и Пастернака / А.Г. Козел // Механика машин, механизмов и материалов. — 2021. — № 1(54). — С. 30–37. — DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2021-1-54-30-37>.
27. Starovoitov, E.I. Deformation of a composite plate on an elastic foundation by local loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, M. Suleyman // Mechanics of Composite Materials. — 2007. — Vol. 43, iss. 1. — Pp. 75–84. — DOI: <https://doi.org/10.1007/s11029-007-0008-0>.
28. Леоненко, Д.В. Колебания круговой трехслойной ступенчатой пластины при ударном периодическом воздействии / Д.В. Леоненко, М.В. Маркова // Механика машин, механизмов и материалов. — 2022. — № 3(60). — С. 68–76. — DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2022-3-60-68-76>.
29. Леоненко, Д.В. Колебания круговой трехслойной пластины под действием внешней нагрузки / Д.В. Леоненко, М.В. Маркова // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. — 2023. — № 1. — С. 49–63. — DOI: <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-1-49-63>.
30. Paimushin, V.N. Theory of moderately large deflections of sandwich shells having a transversely soft core and reinforced along their contour / V.N. Paimushin // Mechanics of Composite Materials. — 2017. — Vol. 53, iss. 1. — Pp. 1–16. — DOI: <https://doi.org/10.1007/s11029-017-9636-1>.
31. Паймушин, В.Н. Нелинейная теория трехслойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем, имеющих участки расслоений и контурную подкрепляющую диафрагму / В.Н. Паймушин // Прикладная математика и механика. — 2018. — Т. 82. — Вып. 1. — С. 44–57.
32. Load-Carrying Capacity of Circular Sandwich Plates at Large Deflection / Z. Wang [et al.] // Journal of Engineering Mechanics. — 2017. — Vol. 143, iss. 9. — DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001243](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001243).
33. Babaytsev, A.V. Defect development in multilayer composites under static loads / A.V. Babaytsev, M.Yu. Kalyagin, L.N. Rabinskiy // Russian Engineering Research. — 2024. — Vol. 44, iss. 1. — P. 112–115. — DOI: <https://doi.org/10.3103/S1068798X24010064>.
34. Захарчук, Ю.В. Деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем / Ю.В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. — 2017. — № 4(33). — С. 53–57.
35. Нестерович, А.В. Деформирование трехслойной круговой пластины при косинусоидальном нагружении в своей плоскости / А.В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. — 2020. — № 1(42). — С. 85–90.
36. Deformation of a step composite beam in a temperature field / E.I. Starovoitov, Yu.M. Pleskachevskii, D.V. Leonenko, D.V. Tarlakovskii // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. — 2015. — Vol. 88, iss. 4. — Pp. 1023–1029. — DOI: <https://doi.org/10.1007/s10891-015-1280-9>.
37. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойного стержня в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. — 2013. — № 1(22). — С. 31–35.

PLESKACHEVSKY Yuriy M., Corresponding Member of the NAS of Belarus,
D. Sc. in Eng., Prof.

E-mail: pleskym@mail.ru

STAROVOITOV Eduard I., D. Sc. in Phys. and Math., Prof.

Professor of the Department “Structural Mechanics, Geotechnical and Structural Engineering”¹

E-mail: edstar0@yandex.by

LEONENKO Denis V., D. Sc. in Phys. and Math., Prof.

Head of the Department “Structural Mechanics, Geotechnical and Structural Engineering”¹

E-mail: leoden@tut.by

¹Belarusian State University of Transport, Gomel, Republic of Belarus

Received September 25, 2024.

NATURAL OSCILLATIONS OF CIRCULAR SANDWICH PLATES IN THE TEMPERATURE FIELD

The effect of a homogeneous temperature field on the frequencies of natural oscillations of a circular sandwich plate is investigated. The hypothesis of a broken line is used as a kinematic one: for identical high-strength thin load-bearing layers, the Kirchhoff hypothesis; for a light incompressible thicker filler, the Timoshenko hypothesis on the straightness and incompressibility of a deformed normal. The differential equations of the transverse vibrations of the plate are obtained by the variational method. The desired

functions are plate deflection and displacement in the filler. The analytical solution of the initial boundary value problem is constructed by decomposing into a series according to a system of proper orthonormal functions with hinged support or sealing of the plate contour. Calculation formulas for displacements are given. A numerical parametric analysis is carried out for the dependence of the oscillation frequencies of the plate on the materials of the bearing layers and temperature.

Keywords: circular sandwich plate, natural oscillations, frequencies, temperature

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2024-4-69-70-77>

References

- Pleskachevsky Yu.M., Starovoitov E.I., Yarovaya A.V. *Dinamika metallopolimernykh sistem* [Dynamics of metal polymer systems]. Minsk, Belorusskaya nauka Publ., 2004. 385 p. (in Russ.).
- Gorshkov A.G., Starovoitov E.I., Yarovaya A.V. *Mekhanika sloistykh vyazkoprugoplasticheskikh elementov konstruktivnykh* [Mechanics of layered viscoelastic-plastic structural elements]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005. 576 p. (in Russ.).
- Zhuravkov M.A., Starovoitov E.I. *Matematicheskie modeli mekhaniki tverdykh tel* [Mathematical models of solid mechanics]. Minsk, Belorusskiy gosudarstvennyy universitet Publ., 2021. 535 p. (in Russ.).
- Zhuravkov M., Lyu Y., Starovoitov E. *Mechanics of solid deformable body*. Singapore, Springer Verlag, 2023. 317 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-981-19-8410-5>.
- Abdusattarov A., Starovoitov E.I., Ruzieva N.B. *Deformirovaniye i povrezhdaemost uprugoplasticheskikh elementov konstruktivnykh pri tsiklicheskiykh nagruzheniyyakh* [Deformation and damage of elastic-plastic structural elements under cyclic loads]. Tashkent, Ideal Press, 2023. 381 p. (in Russ.).
- Starovoitov E.I., Shafieva Yu.V., Nesterovich A.V., Kozel A.G. *Deformirovaniye trekhslonnykh plastin pri termosilovykh nagruzheniyyakh* [Deformation of three-layer plates under thermal force loads]. Gomel, Belorusskiy gosudarstvennyy universitet transporta Publ., 2024. 395 p. (in Russ.).
- Carrera E., Fazzolari F.A., Cinefra M. *Thermal stress analysis of composite beams, plates and shells: computational modeling and applications*. Academic Press, 2016. 440 p.
- Mikhasev G.I., Altenbach H. Free vibrations of elastic laminated beams, plates and cylindrical shells. *Thin-walled laminated structures. Advanced structured materials*, 2019, vol. 106, pp. 157–198. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-12761-9_4.
- Leonenko D.V., Starovoitov E.I. Vibrations of cylindrical sandwich shells with elastic core under local loads. *International applied mechanics*, 2016, vol. 52, iss. 4, pp. 359–367. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-016-0760-8>.
- Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Issledovanie spektra chastot trekhslonnoy tsilindricheskoy obolochki s uprugim napolnitelem [Investigation of the frequency spectrum of a three-layered cylindrical shell with an elastic filler]. *Mechanics of composite materials and structures*, 2015, vol. 21, no. 2, pp. 162–169 (in Russ.).
- Bakulin V.N., Konopelchev M.A., Nedbai A.Ya. Panel flutter of a variable-thickness composite shell. *Mechanics of composite materials*, 2020, vol. 56, iss. 5, pp. 629–638. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11029-020-09909-y>.
- Bakulin V.N., Boitsova D.A., Nedbai A.Ya. Parametric resonance of a three-layered cylindrical composite rib-stiffened shell. *Mechanics of composite materials*, 2021, vol. 57, iss. 5, pp. 623–634. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11029-021-09984-9>.
- Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Two-dimensional non-stationary contact of elastic cylindrical or spherical shells. *Journal of machinery manufacture and reliability*, 2014, vol. 43, iss. 2, pp. 145–152. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1052618814010178>.
- Dzhebisashvili G.T., Smirnov A.L., Filippov S.B. Chastoty sobstvennykh kolebaniy prizmaticheskikh tonkikh obolochek [Free vibration frequencies of prismatic thin shells]. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 49–56. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-49-56> (in Russ.).
- Fedotenkov G.V., Tarlakovsky D.V., Vahterova Y.A. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam. *Lobachevskii journal of mathematics*, 2019, vol. 40, iss. 4, pp. 439–447. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080219040061>.
- Igumnov L.A., Tarlakovskii D.V., Zemskov A.V. A two-dimensional nonstationary problem of elastic diffusion for an orthotropic one-component layer. *Lobachevskii journal of mathematics*, 2017, vol. 38, iss. 5, pp. 808–817. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080217050146>.
- Vestyak V.A., Sadkov A.S., Tarlakovskiy D.V. Rasprostraneniye nestatsionarnykh obemnykh vozmushcheniy v uprugoy poluploskosti [Propagation of nonstationary volumetric perturbations in an elastic half-plane]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*, 2011, no. 2, pp. 130–140 (in Russ.).
- Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Nestatsionarnyye zadachi dlya uprugoy poluploskosti s podvizhnoy tochkoj smeny granichnykh usloviy [Non-stationary problems for elastic half-plane with moving point of changing boundary conditions]. *PNRPU mechanics bulletin*, 2016, no. 3, pp. 188–206. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2016.3.13> (in Russ.).
- Ageev R.V., Mogilevich L.I., Popov V.S. Kolebaniya stenok shchelevogo kanala s vyazkoy zhidkostyu, obrazovannogo trekhslonnyy i tverdym diskami [Vibrations of the walls of a slit channel with a viscous liquid formed by three-layer and solid disks]. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*, 2014, no. 1, pp. 3–11 (in Russ.).
- Kondratov D.V., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A. Hydroelastic oscillations of a circular plate, resting on Winkler foundation. *Journal of physics: conference series*, 2018, vol. 944. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/944/1/012057>.
- Pradhan M., Dash P.R., Pradhan P.K. Static and dynamic stability analysis of an asymmetric sandwich beam resting on a variable Pasternak foundation subjected to thermal gradient. *Meccanica*, 2016, vol. 51, iss. 3, pp. 725–739. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11012-015-0229-6>.
- Tratsevskaya E.Yu. Dinamicheskaya neustoychivost kvazitiksotoropnykh morennykh gruntov [Dynamic instability of quasi-thixotropic moraine soils]. *Litosfera*, 2017, no. 1(46), pp. 107–112 (in Russ.).
- Tratsevskaya E.Yu. Dempfiruyushchie svoystva slabosvyaznykh trekhfaznykh gruntov [Damping properties of loosely coupled three-phase soils]. *Litosfera*, 2019, no. 2(51), pp. 115–121 (in Russ.).
- Pleskachevsky Yu.M., Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Dinamika kruglykh metallopolimernykh plastin na uprugom osnovanii. Chast 1. Svobodnye kolebaniya [Dynamics of circular metal-polymeric plates on an elastic foundation. Part I. Free vibrations]. *Mechanics of machines, mechanisms and materials*, 2008, no. 4(5), pp. 48–51 (in Russ.).
- Pleskachevsky Yu.M., Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Dinamika krugovykh metallopolimernykh plastin na uprugom osnovanii. Chast 2. Vynuzhdennyye kolebaniya [Vibrations of circular metal-polymeric plates on an elastic foundation. Part 2. Forced vibrations]. *Mechanics of machines, mechanisms and materials*, 2009, no. 1(6), pp. 48–51 (in Russ.).
- Kozel A.G. Sravneniye resheniy zadach izgiba trekhslonnykh plastin na osnovaniyakh Vinklera i Pasternaka [Comparison of solutions to the bending problems of three-layer plates on the Winkler and Pasternak foundations]. *Mechanics of machines, mechanisms and materials*, 2021, no. 1(54), pp. 30–37. DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2021-1-54-30-37> (in Russ.).

27. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Suleyman M. Deformation of a composite plate on an elastic foundation by local loads. *Mechanics of composite materials*, 2007, vol. 43, iss. 1, pp. 75–84. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11029-007-0008-0>.
28. Leonenko D.V., Markova M.V. Kolebaniya krugovoy trekhsloynoy stupenchatoy plastiny pri udarnom periodicheskom vozdeystvii [Vibrations of a three-layer circular step plate under periodic impact]. *Mechanics of machines, mechanisms and materials*, 2022, no. 3(60), pp. 68–76. DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2022-3-60-68-76> (in Russ.).
29. Leonenko D.V., Markova M.V. Kolebaniya krugovoy trekhsloynoy plastiny pod deystviem vneshney nagruzki [Oscillations of a circular three-layer plate under external linear in time load]. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and informatics*, 2023, no. 1, pp. 49–63. DOI: <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-1-49-63> (in Russ.).
30. Paimushin V.N. Theory of moderately large deflections of sandwich shells having a transversely soft core and reinforced along their contour. *Mechanics of composite materials*, 2017, vol. 53, iss. 1, pp. 1–16. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11029-017-9636-1>.
31. Paymushin V.N. Nelineynaya teoriya trekhsloynnykh obolochek s transversalno-myagkim zapolnitelem, imeyushchikh uchastki rassloeniya i konturnuyu podkreplyayushchuyu diafragmu [Non-linear theory of three-layer shells with a transversally soft filler having stratification sites and a contour reinforcing diaphragm]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2018, vol. 82, iss. 1, pp. 44–57 (in Russ.).
32. Wang Z., Lu G., Zhu F., Zhao L. Load-carrying capacity of circular sandwich plates at large deflection. *Journal of engineering mechanics*, 2017, vol. 143, iss. 9. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001243](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001243).
33. Babaytsev A.V., Kalyagin M.Yu., Rabinskiy L.N. Defect development in multilayer composites under static loads. *Russian engineering research*, 2024, vol. 44, iss. 1, pp. 112–115. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1068798X24010064>.
34. Zakharchuk Yu.V. Deformirovanie krugovoy trekhsloynoy plastiny so szhimaemym zapolnitelem [Deformation of the circular three-layer plate with a compressible filler]. *Problems of physics, mathematics and technics*, 2017, no. 4 (33), pp. 53–57 (in Russ.).
35. Nestsiarovich A.V. Deformirovanie trekhsloynoy krugovoy plastiny pri kosinusoidalnom nagruzhении v svoey ploskosti [Deformation of a three-layer circular plate under cosine loading in its plane]. *Problems of physics, mathematics and technics*, 2020, no. 1(42), pp. 85–90 (in Russ.).
36. Starovoitov E.I., Pleskachevskii Yu.M., Leonenko D.V., Tarlakovskii D.V. Deformation of a step composite beam in a temperature field. *Journal of engineering physics and thermo-physics*, 2015, vol. 88, iss. 4, pp. 1023–1029. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10891-015-1280-9>.
37. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Deformirovanie trekhsloynno-go sterzhnya v temperaturnom pole [Deformation of three-layer beam in a temperature field]. *Mechanics of machines, mechanisms and materials*, 2013, no. 1(22), pp. 31–35 (in Russ.).