

ДИНАМИКА, ПРОЧНОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 539.384.2

И.В. МЕРКУРЬЕВ, д-р техн. наук, проф.

заведующий кафедрой робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин¹

E-mail: merkuryeviv@ya.ru

М. НАИМ

аспирант¹

E-mail: alisamdoaaa@gmail.com

Г.Р. САЙПУЛАЕВ, канд. техн. наук

доцент кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин¹

E-mail: saypulaevgr@mail.ru

¹ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет «МЭИ», г. Москва, Российская Федерация

Поступила в редакцию 27.12.2024.

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА, ДВИЖУЩЕГОСЯ ПО УПРУГОМУ ОСНОВАНИЮ, С КОНТАКТОМ В ОДНОЙ ТОЧКЕ ОПОРЫ

В работе рассматривается динамика твердого тела, движущегося вдоль упругой балки. Целью работы является математическое моделирование динамики системы «твердое тело — упругая балка» с учетом силового взаимодействия указанных тел в одной точке соприкосновения. На основе теории балок Эйлера–Бернулли и общих теорем динамики построены уравнения движения системы «твердое тело — упругая балка» в частных производных. С помощью метода Бубнова–Галеркина получены обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) для весовых коэффициентов приближенного решения уравнения в частных производных. По результатам численного интегрирования ОДУ получены зависимости прогиба и угла поворота поперечного сечения упругой балки от времени. В отличие от ранее используемых, разработанная модель позволяет учесть влияние силового воздействия подвижного твердого тела на изгиб упругой балки. Результаты работы могут быть использованы при проектировании и изготовлении новых транспортных систем.

Ключевые слова: динамика, изгиб, упругая балка, метод Бубнова–Галеркина, балка Эйлера–Бернулли

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2025-2-71-15-21>

Введение. В настоящее время существует множество научных работ, посвященных теоретическим и экспериментальным исследованиям проблем, связанных с разработкой моделей движения твердых тел на гибких платформах или балках [1] для обеспечения оптимальной устойчивости движущихся объектов [2]. Зачастую [3–8] при моделировании динамики ограничения на силы контактного взаимодействия (силы трения и нормальную реакцию опоры) не учитываются, а ограничиваются только наложенными кинематическими связями. Учет контактных сил трения и нормальной

реакции опоры приводит к усложнению математической модели динамики системы «твердое тело — упругая балка». Так, в работе [9] исследована эквивалентная жесткость вязкоупругого полупространства для периодически поддерживаемой балки под действием движущейся нагрузки в качестве модели взаимодействия железнодорожного полотна с рельсами. Развитие волновой динамики распределенных механических систем, взаимодействующих с упруго-инерционными и неоднородными основаниями, несущих, в частности, подвижные нагрузки, рассмотрено в [10].

Анализ динамического поведения конструкции под действием вибрационных нагрузок в случае изменения условий опирания на упругое основание приведен в [11]. Моделирование поведения бесконечно длинной балки, лежащей на сплошном упругом основании, произведено в контексте определения воздействия высокоскоростного подвижного состава на верхнее строение пути в [12]. В результате видно, что все три рассмотренные модели изгибаемых балок дают очень близкие результаты для систем, несущих подвижные нагрузки, по основным направлениям разработки и совершенствования методов расчета конструкций на действие подвижных нагрузок [13]. История развития метода Бубнова–Галеркина приведена в работе [14]. Зависимости амплитудного и частотного характера, проявляющиеся в движении динамических объектов по рельсовой линии, приведены в работе [15].

Таким образом, необходимо учитывать силы контактного взаимодействия и характеристики движущегося тела при проведении динамического моделирования упругой балки и твердого тела с целью получения физически реалистичных законов движения тел.

В данной работе рассмотрена задача моделирования твердого тела, движущегося по упругой балке, закрепленной на обоих концах. Схема системы представлена на рисунке 1.

Целью данной работы является математическое моделирование динамики системы «твердое тело — упругая балка» с учетом силового взаимодействия указанных тел в единственной точке соприкосновения.

Постановка задачи. В рамках данной работы задача заключается в нахождении прогиба и угла поворота поперечного сечения изгибающейся балки при различных скоростях движущегося твердого тела.

Используя теорему об изменении количества движения твердого тела, уравнения динамики твердого тела можно записать в виде:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x_c}{dt^2} &= F(t) - F_{fr}; \\ m \frac{d^2 y_c}{dt^2} &= N - mg, \end{aligned} \quad (1)$$

где x_c, y_c — координаты центра масс твердого тела, моделируемого материальной точкой; m — масса твердого тела; g — ускорение свободного падения;



Рисунок 1 — Схема движения твердого тела по упругой балке, закрепленной на обоих концах
Figure 1 — Schematic of motion of a solid body on an elastic beam fixed at both ends

N — нормальная реакция опоры; F_{fr} — сила контактного трения; $F(t)$ — разгоняющая сила, приводящая твердое тело в движение по упругой балке.

В рамках теории Эйлера–Бернулли уравнение изгиба упругой балки с учетом ее веса имеет вид:

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} = -\rho F \frac{d^2 w}{dt^2} + q(x, t), \quad (2)$$

где EJ — жесткость балки при изгибе; ρ — плотность материала упругой балки; F — площадь поперечного сечения упругой балки; $w(x, t)$ — прогиб срединной линии балки в точке x в момент времени t ; $q(x, t)$ — распределенная нагрузка, действующая на упругую балку.

С учетом одноточечного контакта твердого тела с упругой балкой в точке выражение для распределенной нагрузки имеет вид:

$$q(x, t) = -N\delta(x - x_c(t)), \quad (3)$$

где $\delta(x - x_c) = \begin{cases} 0, & x \neq x_c, \\ \infty, & x = x_c \end{cases}$ — дельта-функция Дирака.

Тогда модель динамики системы «твердое тело — упругая балка» представлена уравнениями (1)–(3) при наличии краевых условий, соответствующих шарнирным связям на концах балки:

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} = -\rho F \frac{d^2 w}{dt^2} - N\delta(x - x_c(t)). \quad (4)$$

Отметим, что первое уравнение из системы (1) может быть рассмотрено отдельно от остальных. Поэтому из указанного уравнения можно сделать вывод, что сила $F(t)$ может быть подобрана таким образом, чтобы твердое тело двигалось по требуемому (заданному) закону движения $a(t)$, т. е. $x_c(t) = a(t)$.

Учитывая, что твердое тело движется по упругой балке без отрыва, имеем $y_c = w(x_c(t), t)$. Исключая нормальную реакцию опоры из уравнения изгиба балки, получим математическую модель динамики системы в виде:

$$\begin{aligned} EJ \frac{d^4 w(x, t)}{dx^4} &= -\rho F \frac{d^2 w(x, t)}{dt^2} - \\ &- m \left(\frac{d^2 w(a(t), t)}{dt^2} + g \right) \delta(x - a(t)); \\ w(0, t) &= w(L, t) = 0; \\ \frac{d^2 w(0, t)}{dx^2} &= \frac{d^2 w(L, t)}{dx^2} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Далее будем искать приближенное решение системы методом Бубнова–Галеркина.

Приближенное решение задачи методом Бубнова–Галеркина. Будем искать решение задачи (5) в следующем виде:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right), \quad (6)$$

где L — длина балки; n — количество гармоник; $\varphi_i(t)$ — искомые функции, называемые весовыми коэффициентами. Указанный вид решения удовлетворяет краевым условиям из модели (5).

Дифференцируя приближенное решение (6), получим:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 w(x, t)}{dx^4} &= \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \sum_{i=1}^n i^4 \varphi_i(t) \sin\left(\frac{i\pi x}{L} \right); \\ \frac{d^2 w(x, t)}{dt^2} &= \sum_{i=1}^n \frac{d^2 \varphi_i(t)}{dt^2} \sin\left(\frac{i\pi x}{L} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя выражения (6) и (7) в уравнение динамики, получим:

$$\begin{aligned} EJ \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \sum_{i=1}^n i^4 \varphi_i(t) \sin\left(\frac{i\pi x}{L} \right) &= \\ = -\rho F \sum_{i=1}^n \frac{d^2 \varphi_i(t)}{dt^2} \sin\left(\frac{i\pi x}{L} \right) - mg \delta(x - a(t)) - \\ - m \sum_{i=1}^n \frac{d^2 \varphi_i(t)}{dt^2} \sin\left(\frac{i\pi a(t)}{L} \right) \delta(x - a(t)). \end{aligned} \quad (8)$$

Далее ограничимся рассмотрением первых двух гармоник решения ($n = 2$):

$$\begin{aligned} EJ \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \left[\varphi_1(t) \sin\left(\frac{\pi x}{L} \right) + 16\varphi_2(t) \sin\left(\frac{2\pi x}{L} \right) \right] &= \\ = -\rho F \left[\ddot{\varphi}_1(t) \sin\left(\frac{\pi x}{L} \right) + \ddot{\varphi}_2(t) \sin\left(\frac{2\pi x}{L} \right) \right] - \\ - mg \delta(x - a(t)) - m \left[\ddot{\varphi}_1(t) \sin\left(\frac{\pi a(t)}{L} \right) + \right. \\ \left. + \ddot{\varphi}_2(t) \sin\left(\frac{2\pi a(t)}{L} \right) \right] \delta(x - a(t)). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь и далее точкой над искомыми функциями обозначена производная по времени.

Следуя процедуре метода Бубнова–Галеркина [14], получим систему уравнений для весовых коэффициентов в виде:

$$\begin{aligned} EJL \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \left[\varphi_1(t) \cdot \frac{1}{2} + 16\varphi_2(t) \cdot 0 \right] &= \\ = -\rho FL \left[\ddot{\varphi}_1(t) \cdot \frac{1}{2} + \ddot{\varphi}_2(t) \cdot 0 \right] - \\ - mg \sin\left(\frac{\pi a(t)}{L} \right) - m \left[\ddot{\varphi}_1(t) \sin\left(\frac{\pi a(t)}{L} \right) + \right. \\ \left. + \ddot{\varphi}_2(t) \sin\left(\frac{2\pi a(t)}{L} \right) \right] \sin\left(\frac{\pi a(t)}{L} \right); \\ EJL \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \left[\varphi_1(t) \cdot 0 + 16\varphi_2(t) \cdot \frac{1}{2} \right] &= \\ = -\rho FL \left[\ddot{\varphi}_1(t) \cdot 0 + \ddot{\varphi}_2(t) \cdot \frac{1}{2} \right] - \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} -mg \sin\left(\frac{2\pi a(t)}{L} \right) - m \left[\ddot{\varphi}_1(t) \sin\left(\frac{\pi a(t)}{L} \right) + \right. \\ \left. + \ddot{\varphi}_2(t) \sin\left(\frac{2\pi a(t)}{L} \right) \right] \sin\left(\frac{2\pi a(t)}{L} \right) \end{aligned}$$

или после упрощений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} EJL \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \varphi_1(t) &= -\frac{1}{2} \rho FL \ddot{\varphi}_1(t) - \\ - mg \sin\left(\frac{\pi a(t)}{L} \right) - m \left[\ddot{\varphi}_1(t) \sin\left(\frac{\pi a(t)}{L} \right) + \right. \\ \left. + \ddot{\varphi}_2(t) \sin\left(\frac{2\pi a(t)}{L} \right) \right] \sin\left(\frac{\pi a(t)}{L} \right); \\ \frac{16}{2} EJL \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \varphi_2(t) &= -\frac{1}{2} \rho FL \ddot{\varphi}_2(t) - \\ - mg \sin\left(\frac{2\pi a(t)}{L} \right) - m \left[\ddot{\varphi}_1(t) \sin\left(\frac{\pi a(t)}{L} \right) + \right. \\ \left. + \ddot{\varphi}_2(t) \sin\left(\frac{2\pi a(t)}{L} \right) \right] \sin\left(\frac{2\pi a(t)}{L} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений (11) может быть численно проинтегрирована методами Рунге–Кутты. Для удобства приведем уравнения (11) в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1(\tau) &= -\tilde{\varphi}_1''(\tau) - K \sin(\pi V_* \tau) - \\ - m_0 \left[\tilde{\varphi}_1''(\tau) \sin(\pi V_* \tau) + \tilde{\varphi}_2''(\tau) \sin(2\pi V_* \tau) \right] \sin(\pi V_* \tau); \\ 16\tilde{\varphi}_2(\tau) &= -\tilde{\varphi}_2''(\tau) - K \sin(2\pi V_* \tau) - \\ - m_0 \left[\tilde{\varphi}_1''(\tau) \sin(\pi V_* \tau) + \tilde{\varphi}_2''(\tau) \sin(2\pi V_* \tau) \right] \sin(2\pi V_* \tau). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь введены следующие безразмерные пере-

менные $\tilde{\varphi}_i = \frac{\varphi_i}{L}$, $\tau = \omega_0 t$ и безразмерные параметры:

$$\begin{aligned} K &= \frac{2mg}{\rho FL^2 \omega_0^2}; \quad m_0 = \frac{2m}{\rho FL}; \\ V_* &= \frac{V}{L\omega_0}; \quad \omega_0^2 = \frac{EJ}{\rho F} \left(\frac{\pi}{L} \right)^4. \end{aligned} \quad (13)$$

В результате обыкновенные дифференциальные уравнения для весовых функций при нахождении функции прогиба с точностью до N -й гармоники имеют вид:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_i''(\tau) + m_0 \sin(i\pi V_* \tau) \times \\ \times \sum_{j=1}^N \tilde{\varphi}_j''(\tau) \sin(j\pi V_* \tau) + i^4 \tilde{\varphi}_i(\tau) &= \\ = -K \sin(i\pi V_* \tau), \quad (i = 1, \dots, N). \end{aligned} \quad (14)$$

Полученные уравнения (14) могут быть проинтегрированы численно с заданной точностью.

Результаты численного интегрирования. Зададим следующие размерные параметры систе-

мы и начальные условия для весовых коэффициентов:

$$\begin{aligned} E &= 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}; \quad J = 5,2083 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4; \\ L &= 10 \text{ м}; \quad \rho = 7800 \text{ кг/м}^3; \\ F &= 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2; \quad \tilde{\varphi}_i(0) = 0; \quad \tilde{\varphi}'_i(0) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Результаты численного интегрирования уравнений (14) при параметрах системы (13) и (15) представлены на рисунках 2–4.

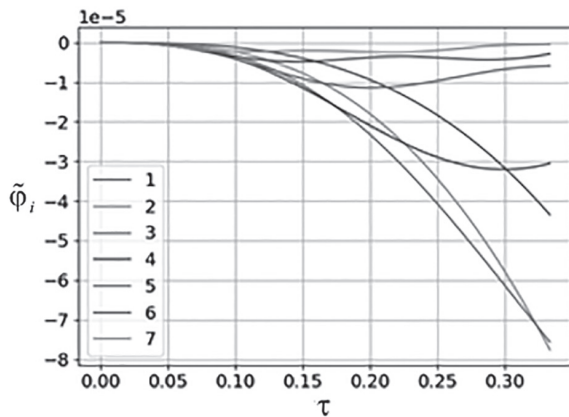
По графикам, представленным на рисунке 2, можно сделать вывод, что с увеличением массы твердого тела, движущегося по упругой балке, весовые коэффициенты $\tilde{\varphi}_i(\tau)$ растут по величине.

Для наглядности представим на рисунке 3 зависимость безразмерного прогиба упругой балки

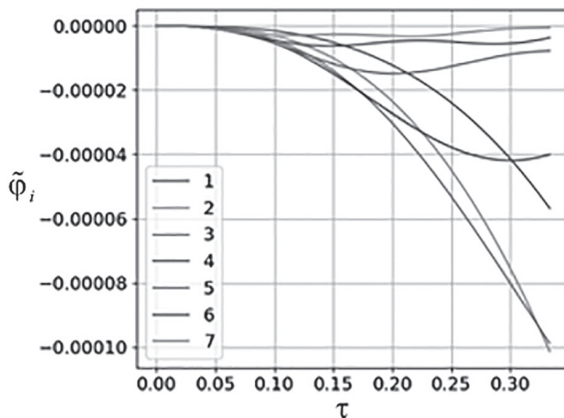
$$\tilde{w} = \frac{w}{L}, \text{ рассчитанный по разложению решения (6)}$$

и найденным весовым коэффициентам.

По графикам, представленным на рисунке 3, можно сделать вывод, что с увеличением массы твердого тела, движущегося по упругой балке, экстремальные значения безразмерного прогиба упругой балки увеличиваются.

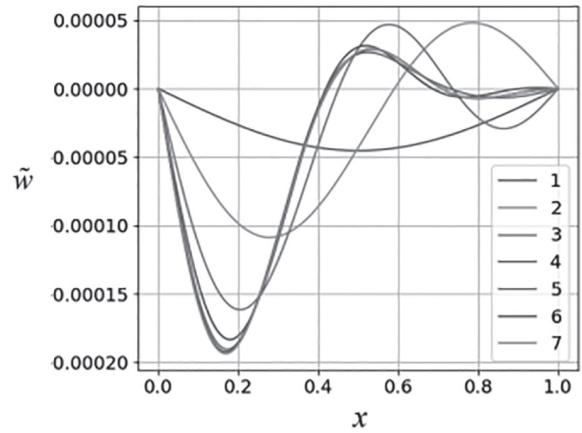


a

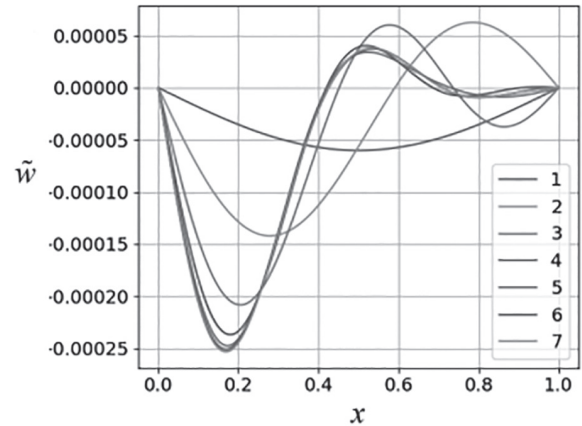


b

Рисунок 2 — Зависимость $\tilde{\varphi}_i(\tau)$ при скорости твердого тела $V = 30 \text{ м/с}$: а — $m = 30 \text{ кг}$; б — $m = 40 \text{ кг}$
Figure 2 — Dependence $\tilde{\varphi}_i(\tau)$ at the velocity of the solid body $V = 30 \text{ м/с}$: а — $m = 30 \text{ кг}$; б — $m = 40 \text{ кг}$



a



b

Рисунок 3 — Зависимость безразмерного прогиба балки $\tilde{w}\left(\frac{x}{L}\right)$

в конечный момент времени при скорости твердого тела $V = 30 \text{ м/с}$: а — $m = 30 \text{ кг}$; б — $m = 40 \text{ кг}$

Figure 3 — Dependence of dimensionless beam deflection $\tilde{w}\left(\frac{x}{L}\right)$

at the final moment of time at the velocity of the solid body $V = 30 \text{ м/с}$: а — $m = 30 \text{ кг}$; б — $m = 40 \text{ кг}$

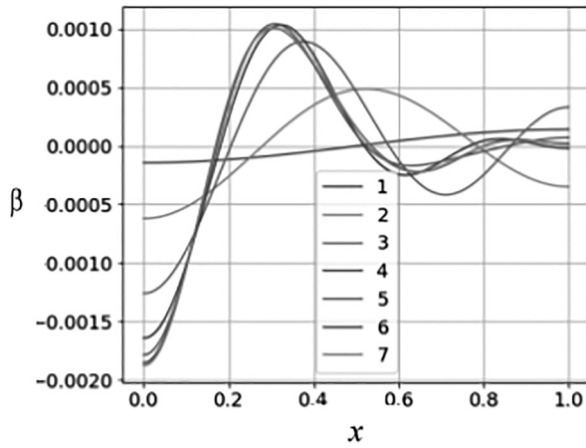
Также построим зависимости (см. рисунок 4) угла поворота поперечного сечения балки

$$\beta = \frac{dw(x,t)}{dx} \text{ в момент времени, когда твердое тело}$$

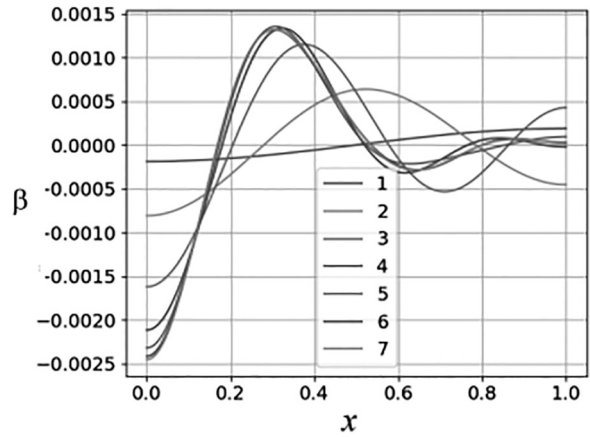
достигает конца балки, т. е. $a(t) = L$.

По графикам, представленным на рисунке 4, можно сделать вывод, что с увеличением массы твердого тела, движущегося по упругой балке, экстремальные значения угла поворота поперечного сечения балки увеличиваются.

По графикам, представленным на рисунках 3 и 4, можно сделать вывод, что безразмерный прогиб упругой балки и угол поворота ее поперечного сечения при учете 7-й гармоники приближенного решения незначительно отличаются от соответствующих зависимостей, построенных при учете только первых шести гармоник приближенного решения. Отличия в расчете безразмерного прогиба и угла поворота поперечного сечения упругой балки при рассмотрении семи и шести гармоник



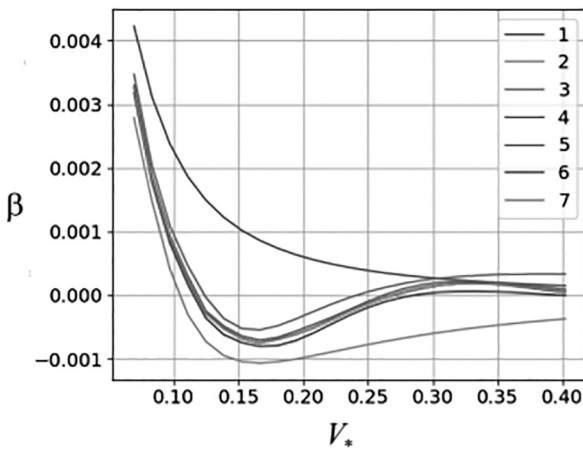
a



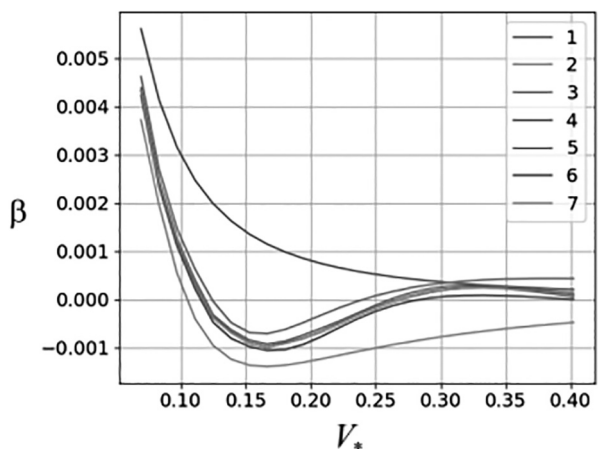
b

Рисунок 4 — Зависимость угла поворота поперечного сечения балки $\beta\left(\frac{x}{L}\right)$ (рад) в конечный момент времени при скорости твердого тела $V = 30$ м/с: а — $m = 30$ кг; б — $m = 40$ кг

Figure 4 — Dependence of the rotation angle of the beam cross section $\beta\left(\frac{x}{L}\right)$ (rad) at the final moment of time at the velocity of the solid body $V = 30$ m/s: а — $m = 30$ kg; б — $m = 40$ kg



a



b

Рисунок 5 — Зависимость угла поворота поперечного сечения правого конца балки $\beta(V_*)$ в конечный момент времени от безразмерной скорости тела: а — $m = 30$ кг; б — $m = 40$ кг

Figure 5 — Dependence of the rotation angle of the cross section of the right end of the beam $\beta(V_*)$ at the final moment of time on the dimensionless velocity of the body: а — $m = 30$ kg; б — $m = 40$ kg

в решении (6) составляет менее 0,3 %. Из этого можно сделать вывод о том, что при дальнейших расчетах достаточно ограничиться шестью гармониками при нахождении приближенного решения (6).

На рисунке 5 показана зависимость угла поворота поперечного сечения упругой балки во время достижения твердым телом конца балки от безразмерной скорости твердого тела.

По рисунку 5 можно сделать вывод о том, что с увеличением скорости твердого тела угол поворота поперечного сечения правого конца балки будет уменьшаться. Таким образом, твердое тело, движущееся с большой скоростью по упругой балке, будет вылетать из нее под близким к нулю углом наклона к горизонту, что может иметь существенное прикладное значение.

Заключение. В работе рассмотрена задача математического моделирования динамики системы «твердое тело — упругая балка» с учетом силового взаимодействия указанных тел в единственной точке соприкосновения. Полученная система дифференциальных уравнений с частными производными, описывающих изгиб упругой балки и динамику твердого тела, во взаимосвязанной форме.

Предложена форма приближенного решения для функции прогиба упругой балки, используемая в методе Бубнова–Галеркина для сведения задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно весовых коэффициентов.

По результатам численного интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений получены формы прогиба упругой балки и угла поперечного сечения балки при разных

массах твердого тела. Сделан вывод о том, что для получения высокой точности решения достаточно учитывать первые шесть гармоник приближенного решения (6).

На основе результатов моделирования сделан вывод о том, что с увеличением скорости твердого тела угол поворота поперечного сечения правого конца балка будет уменьшаться. Таким образом, твердое тело, движущееся с большой скоростью по упругой балке, будет вылетать с нее под близким к нулю углом наклона к горизонту, что может иметь существенное прикладное значение.

Результаты работы могут быть использованы при проектировании новых робототехнических и авиационных систем.

Список литературы

- Ivanchenko, I.I. The development of models for high-speed railway track dynamics / I.I. Ivanchenko, S.N. Shapovalov // International Symposium on Speed-up and Service Technology for Railway and Maglev Systems (STECH'09). — Niigata, 2009. — DOI: https://doi.org/10.1299/jsmestech.2009_352225-1.
- Ivanchenko, I.I. Design of composite, long structures modeling railway tracks for moving loads / I.I. Ivanchenko, S.N. Shapovalov // EUROMECH Colloquium 484 on Wave Mechanics and Stability of Long Flexible Structures Subject to Moving Loads and Flows, Delft, September 19–22, 2006 / TU Delft. — Delft, 2006. — P. 30–31.
- Dynamic analysis of a series-of-types of steel beam bridges loaded by a Shinkansen train moving at high speeds / M. Kłasztorny, K. Myślecki, C. Machelski, M. Podworna // EURO-DYN'2022: 5th European conf. on structural dynamics. — Munich, 2002. — P. 1179–1184.
- Metrikine, A.V. Vibration of a periodically supported beam on an elastic half-space / A.V. Metrikine, K. Popp // European J. of Mechanics A. Solids. — 1999. — Vol. 18, iss. 4. — P. 679–701. — DOI: [https://doi.org/10.1016/S0997-7538\(99\)00141-2](https://doi.org/10.1016/S0997-7538(99)00141-2).
- Zoller, V. Analysis of railway track dynamics by using Winkler model with initial geometrical irregularity / V. Zoller, I. Zobory // 7th Mini Conference on Vehicle System Dynamics, Identification and Anomalies, Budapest, November 6–8, 2000 / Budapest University of Technology and Economics. — Budapest, 2000. — P. 113–118.
- Кадисов, Г.М. Динамика складчатых систем при подвижных нагрузках: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 05.23.17 / Кадисов Григорий Михайлович; МИИТ. — М., 1998. — 18 с.
- Дерендяев, Н.В. О движении точечной массы вдоль колеблющейся струны / Н.В. Дерендяев, И.Н. Солдатов // Прикладная математика и механика. — 1997. — Т. 61, вып. 4. — С. 703–705.
- Каплунов, Ю.Д. Действие равнопеременно движущейся силы на балку Тимошенко, лежащую на упругом основании. Переходы через критические скорости / Ю.Д. Каплунов, Г.Б. Муравский // Прикладная математика и механика. — 1987. — Т. 51, вып. 3. — С. 475–482.
- Lu, T. The equivalent dynamic stiffness of a visco-elastic half-space in interaction with a periodically supported beam under a moving load / T. Lu, A.V. Metrikine, M.J.M.M. Steenbergen // European J. of Mechanics A. Solids. — 2020. — Vol. 84. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2020.104065>.
- Колесов, Д.А. Волны в одномерных распределенных механических системах, взаимодействующих с упруго-инерционными и неоднородными основаниями: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.06 / Колесов Даниил Александрович; Институт проблем машиностроения РАН. — Нижний Новгород, 2019. — 133 с.
- Леонтьев, Е.В. К вопросу о поперечных колебаниях балок на упругом основании при изменении условий опирания / Е.В. Леонтьев // Строительство и реконструкция. — 2020. — Т. 91, № 5. — С. 70–76. — DOI: <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2020-91-5-70-77>.
- Курбацкий, Е.Н. Применение обобщенных функций и интегрального преобразования Фурье при моделировании воздействия подвижной нагрузки на балку, лежащую на упругом основании / Е.Н. Курбацкий, И.И. Зернов, Е.С. Бадина // Транспортные сооружения. — 2023. — Т. 10, № 3. — DOI: <https://doi.org/10.15862/05SATS323>.
- Динамика деформируемых систем, несущих движущиеся нагрузки (обзор публикаций и диссертационных исследований) / С.И. Герасимов, В.И. Ерофеев, Д.А. Колесов, Е.Е. Лисенкова // Вестник научно-технического развития. — 2021. — № 160. — С. 25–47. — DOI: <https://doi.org/10.18411/vntr2021-160-3>.
- Афендикова, Н.Г. История метода Галеркина и его роль в творчестве М.В. Келдыша / Н.Г. Афендикова // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — 2014. — № 77. — С. 1–16 с.
- Радковский, С.А. Моделирование колебаний железнодорожного рельса при воздействии на него подвижной вертикальной динамической нагрузки / С.А. Радковский, А.М. Трунаев, В.Д. Пойманов // Сборник научных трудов Донецкого института железнодорожного транспорта. — 2016. — № 43. — URL: <https://clck.ru/3LeS8V>.

MERKURYEV Igor V., D. Sc. in Eng., Prof.

Head of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Machine Strength¹

E-mail: merkuryeviv@ya.ru

NAIM Muhannad

Postgraduate Student¹

E-mail: alisamdoaaa@gmail.com

SAYPULAEV Gasan R., Ph. D. in Eng.

Associate Professor of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Machine Strength¹

E-mail: saypulaevgr@mail.ru

¹National Research University “Moscow Power Engineering Institute”, Moscow, Russian Federation

Received December 27, 2024.

DYNAMICS OF A RIGID BODY MOVING ON AN ELASTIC BASE WITH A SINGLE POINT OF CONTACT

The paper considers the dynamics of a body moving along an elastic beam. The aim of the work is mathematical modeling of the dynamics of the “solid body — elastic beam” system, taking into account the force interaction of these bodies at one point of contact. Based on the Euler–Bernoulli beam theory and general dynamics theorems, partial differential equations of motion of the “solid body — elastic beam” system are constructed. Using the Bubnov–Galerkin method, ordinary differential equations (ODEs) for the weight coefficients of the approximate solution of the partial differential equation are obtained. Based on the results of numerical integration of the ODE, the dependences of the deflection and the angle of rotation of the elastic beam cross section on time are obtained. Unlike the previously used models, the developed model makes it possible to take into account the effect of the force action of a moving solid on the bending of the elastic beam. The results of the work can be used in the design and manufacture of new transport systems.

Keywords: dynamics, bending, elastic beam, Bubnov–Galerkin method, Euler–Bernoulli beam

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2025-2-71-15-21>

References

- Ivanchenko I.I., Shapovalov S.N. The development of models for high-speed railway track dynamics. *Proc. international symposium on speed-up and service technology for railway and maglev systems (STECH'09)*. Niigata, 2009. DOI: https://doi.org/10.1299/jsmestech.2009_352225-1.
- Ivanchenko I.I., Shapovalov S.N. Design of composite, long structures modeling railway tracks for moving loads. *Proc. EUROMECH Colloquium 484 on wave mechanics and stability of long flexible structures subject to moving loads and flows*. Delft, 2006, pp. 30–31.
- Klasztorny M., Myslecki K., Machelski C., Podworna M. Dynamic analysis of a series-of-types of steel beam bridges loaded by a Shinkansen train moving at high speeds. *Proc. 5th European conference on structural dynamics EURO-DYN'2002*. Munich, 2002, pp. 1179–1184.
- Metrikine A.V., Popp K. Vibration of a periodically supported beam on an elastic half-space. *European journal of mechanics – A/Solids*, 1999, vol. 18, iss. 4, pp. 679–701. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0997-7538\(99\)00141-2](https://doi.org/10.1016/S0997-7538(99)00141-2).
- Zoller V., Zobory I. Analysis of railway track dynamics by using Winkler model with initial geometrical irregularity. *Proc. of the 7th mini conference on vehicle system dynamics, identification and anomalies*. Budapest, 2000, pp. 113–118.
- Kadisov G.M. *Dinamika skladchatykh sistem pri podvizhnykh nagruzkakh*. Avtoref. diss. dokt. tekhn. nauk [Dynamics of folded systems under moving loads. Abstract of D. Sc. thesis]. Moscow, 1998. 18 p. (in Russ.).
- Derendyaev N.V., Soldatov I.N. O dvizhenii tochechnoy massy vdol koleblyushcheyasya struny [On the motion of a point mass along an oscillating string]. *Journal of applied mathematics and mechanics*, 1997, vol. 61, iss. 4, pp. 703–705 (in Russ.).
- Kaplunov Yu.D., Muravsky G.B. Deystvie ravnopereменно dvizhushcheyasya sily na balku Timoshenko, lezhashchuyu na uprugom osnovanii. Perekhody cherez kriticheskie skorosti [The effect of an equally alternating moving force on a Timoshenko beam lying on an elastic base. Transitions through critical speeds]. *Journal of applied mathematics and mechanics*, 1987, vol. 51, iss. 3, pp. 475–482 (in Russ.).
- Lu T., Metrikine A.V., Steenberg M.J.M.M. The equivalent dynamic stiffness of a visco-elastic half-space in interaction with a periodically supported beam under a moving load. *European journal of mechanics – A/Solids*, 2020, vol. 84. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2020.104065>.
- Kolesov D.A. *Volny v odnomernykh raspredelennykh mekhanicheskikh sistemakh, vzaimodeystviyushchikh s uprugoinertionnymi i neodnorodnymi osnovaniyami*. Diss. kand. fiz.-mat. nauk [Waves in one-dimensional distributed mechanical systems interacting with elastically inertial and inhomogeneous bases. Ph. D. thesis]. Nizhny Novgorod, 2019. 133 p. (in Russ.).
- Leontiev E.V. K voprosu o poperechnykh kolebaniyakh balok na uprugom osnovanii pri izmenenii usloviy opiraniya [Lateral vibrations of beams on an elastic base at changing the supporting conditions]. *Building and reconstruction*, 2020, vol. 91, no. 5, pp. 70–76. DOI: <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2020-91-5-70-77> (in Russ.).
- Kurbatskiy E.N., Zernov I.I., Badina E.S. Primenenie obobshchennykh funktsiy i integralnogo preobrazovaniya Fure pri modelirovanii vozdeystviya podvizhnoy nagruзки na balku, lezhashchuyu na uprugom osnovanii [Application of generalised functions and Fourier's integral transformation in modelling the effect of a moving load on a beam resting on an elastic foundation]. *Russian journal of transport engineering*, 2023, vol. 10, no. 3. DOI: <https://doi.org/10.15862/05SATS323> (in Russ.).
- Gerasimov S.I., Erofeev V.I., Kolesov D.A., Lisenkova E.E. Dinamika deformiruemyykh sistem, nesushchikh dvizhushchiesya nagruзки (obzor publikatsiy i dissertatsionnykh issledovaniy) [Dynamics of deformable systems carrying moving loads (review of publication and dissertation research)]. *Bulletin of science and technical development*, 2021, no. 160, pp. 25–47. DOI: <https://doi.org/10.18411/vntr2021-160-3> (in Russ.).
- Afendikova N.G. *Istoriya metoda Galerkina i ego rol v tvorchestve M.V. Keldysha* [The history of Galerkin's method and its role in M.V. Keldysh work]. 2014. 16 p. (in Russ.).
- Radkovskiy S.A., Trunaev A.M., Poymanov V.D. Modelirovanie kolebaniy zheleznodorozhnogo relsa pri vozdeystvii na nego podvizhnoy vertikalnoy dinamicheskoy nagruзки [Modeling of railway rail vibrations under the influence of a mobile vertical dynamic load on it]. *The collection of scientific papers of the Donetsk Railway Transport Institute*, 2016, no. 43. Available at: <https://clck.ru/3LeS8V> (in Russ.).