МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.4

А.П. ЯНКОВСКИЙ, д-р физ.-мат. наук
ведущий научный сотрудник лаборатории «Физики быстропротекающих процессов»
E-mail: yankovsky_ap@itam.nsc.ru

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Российская Федерация

Поступила в редакцию 05.12.2024.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗГИБНОГО НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ВЯЗКОУПРУГО-ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПОЛОГИХ АРМИРОВАННЫХ ОБОЛОЧЕК. ЧАСТЬ 1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Сформулирована задача динамического неизотермического вязкоупруго-вязкопластического деформирования гибких армированных пологих оболочек и искривленных панелей. Волновые процессы и плохое сопротивление таких конструкций поперечному сдвигу моделируются в рамках неклассической теории изгиба Амбарцумяна. Учитывается трансверсальное обжатие композитных оболочек. Температурное поле в поперечном направлении аппроксимируется полиномом высокого порядка. Геометрическая нелинейность моделируется в приближении Кармана. Вязкоупругое поведение компонентов композиции описывается моделью тела Максвелла–Больцмана. Неупругое деформирование описывается соотношениями теории пластического течения с изотропным упрочнением, причем функции нагружения фазовых материалов зависят не только от параметра упрочнения и температуры, но и от интенсивности скоростей деформаций. Использованы структурные соотношения термомеханики композитов, учитывающие сложное напряженно-деформированное состояние (НДС) во всех фазовых материалах композиции. Эти структурные соотношения позволяют проводить расчеты температурных полей и НДС в пологих оболочках не только с традиционными «плоско»-перекрестными, но и с пространственными структурами армирования. Представлены приведенные двумерные уравнения теплофизической составляющей задачи, соответствующие полиномиальному разложению температуры в трансверсальном направлении тонкостенной композитной конструкции. При этом учитываются термические граничные условия общего вида на лицевых поверхностях пологой оболочки и термочувствительность материалов компонентов ее композиции. Для интегрирования поставленной нелинейной связанной задачи использована явная численная схема. Механическая составляющая динамической задачи интегрируется с применением схемы типа «крест» на трехточечном шаблоне по времени; теплофизическая составляющая — по явной схеме на двухточечном шаблоне по времени. Необходимым условием устойчивости численной схемы является ограничение Куранта на шаг по времени.

Ключевые слова: *пологие оболочки, искривленные панели, армирование, связанная термомеханическая задача, вязкоупруго-вязкопластичность, неупругая динамика, теория изгиба Амбарцумяна, остаточное состояние, численное решение, явная схема шагов по времени*

DOI: https://doi.org/10.46864/1995-0470-2025-2-71-62-69

Введение. Современные изделия из композиционных материалов (КМ) могут подвергаться высокоинтенсивному как силовому [1–11], так и тепловому [2, 3, 11–14] нагружению, при котором они деформируются неупруго [2, 5, 6, 8, 10]. Следовательно, актуальной является проблема моделирования термопластического поведения КМ-конструкций, которая на сегодняшний день находится в стадии становления [6–8, 10, 11, 15–26]. Так, в работе [26] моделировалось неизотермическое вязкоупругопластическое деформирование армированных гибких пологих оболочек при их динамическом нагружении и было исследовано влияние как теплового отклика, так и наличия стационарного температурного поля немеханического происхождения на величину остаточного прогиба и остаточного деформированного состояния компонентов композиции цилиндрических искривленных панелей.

Известно, что при динамическом нагружении пластические свойства многих материалов существенно зависят не только от температуры [2, 27], как и учитывалось в [26], но и от скорости их деформирования — вязкопластичности [18, 23, 24, 27]. Согласно этому, в [23] была разработана модель вязкоупруго-вязкопластического деформирования изотропных пологих оболочек, однако температурный отклик в них не учитывался. В работе [24] была построена модель термовязкоупруго-вязкопластического деформирования изгибаемых армированных пластин при их динамическом нагружении. Там же было показано, что в тех случаях, когда отсутствуют интенсивные источники тепла немеханического происхождения, механический отклик таких КМ-конструкций даже при пластическом деформировании компонентов их композиций можно рассчитывать, не учитывая возникающие при этом тепловые поля. Однако аналогичные исследования для пологих КМ-оболочек из материалов, обладающих указанными выше свойствами, до настоящего времени не проводились.

Для моделирования волновых процессов в динамически изгибаемых тонкостенных КМ-конструкциях и для учета их ослабленного сопротивления поперечным сдвигам традиционно используют простейшие неклассические теории Рейсснера–Тимошенко [4, 6, 9, 10, 28], Амбарцумяна [1, 23, 24, 26], Редди [13]; реже применяют теории более высоких порядков точности [6, 9, 12], базирующиеся, как правило, на кинематической гипотезе ломаной линии.

Нелинейные динамические задачи изгиба тонкостенных элементов конструкций интегрируют в основном численно, применяя при этом как явные [6, 23, 24, 26], так и неявные [8] схемы шагов по времени.

Согласно всему вышеизложенному, в данной работе моделируется неизотермическая вязкоупруго-вязкопластическая динамика пологих армированных оболочек при использовании теории изгиба Амбарцумяна [1]. Численное решение соответствующей связанной нелинейной термомеханической задачи строится с использованием явной схемы [6, 23, 24, 26].

Исходные предпосылки и формулировка задачи. Рассматривается пологая оболочка толщиной $2h$ (рисунок 1), с которой связана ортогональная глобальная система координат x_i ($i=\overline{1,3}$) так, что срединная поверхность ($x_3 = 0$) является отсчетной ($|x_3| \le h$), а координатные линии x_1 и x_2 совпадают с ее линиями главной кривизны. Панель усилена K семействами волокон с интенсивностями армирования ω_k ($1 \le k \le K$). В поперечном направлении x_3 структура армирования (которая может быть и пространственной [3]) квазиоднородна. Так, на рисунке 1 *a* изображена традиционная ортогональная 2D-структура ($K = 2$) [2, 3, 5], а на рисунке 1 *b* — пространственная 4D-структура ($K = 4$) [3]. На рисунке 1 искривленность элемента пологой КМ-оболочки не отражена в силу ее малости.

С каждым k-м семейством волокон свяжем свою ортогональную локальную систему координат $x_i^{(k)}$ таким образом, чтобы ось $x_1^{(k)}$ была направлена вдоль касательной к траектории армирования. Ориентация этой оси в пространстве $Ox_1x_2x_3$ задается двумя углами сферической системы координат θ_k и φ_k (рисунок 2). Направляющие косинусы $l_{ij}^{(k)}$ локальных осей $x_i^{(k)}$ относительно глобальных осей x_j ($i, j = \overline{1,3}$) определяются через θ_k и φ_k ($1 \le k \le K$) по формулам (2.19) из [24].

Предполагаем, что внешние нагрузки, касательно распределенные по лицевым поверхностям КМ-панели, можно традиционно не учитывать,

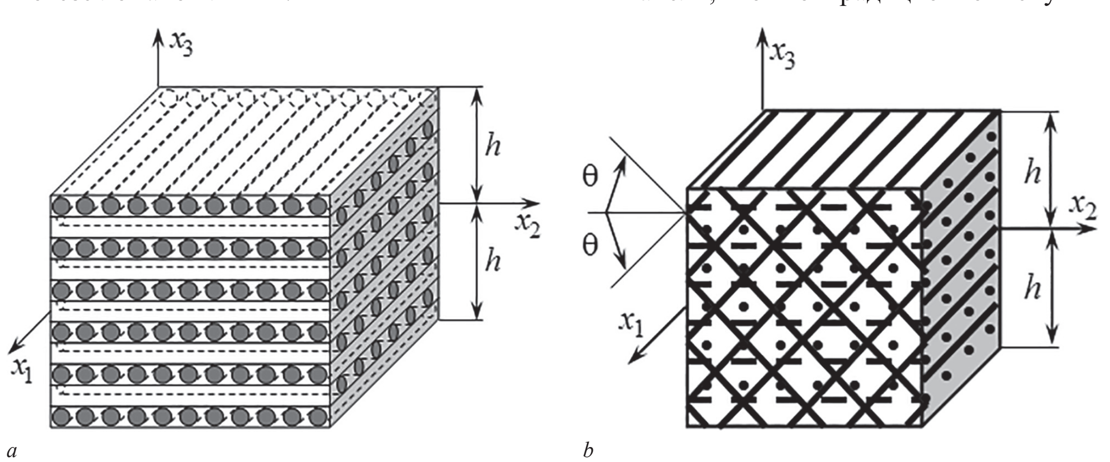

Рисунок 1 — Элемент пологой оболочки: *a* — с ортогональной 2D-структурой армирования; *b* — с пространственной 4D-структурой армирования

Figure 1 — Shallow shell element: *a* — with orthogonal 2D reinforcement structure; *b* — with spatial 4D reinforcement structure

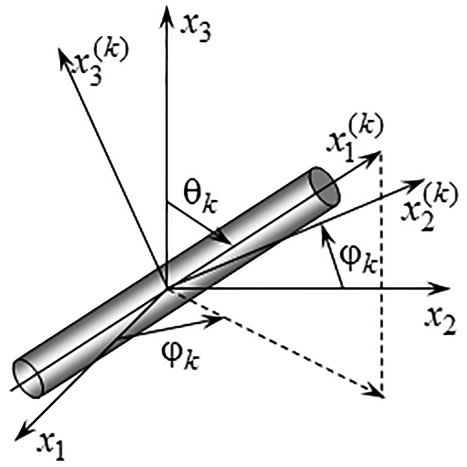

Рисунок 2 — Взаимная ориентация локальной (связанной с арматурой *k*-го семейства) и глобальной систем координат
Figure 2 — Mutual orientation of the local (associated with the reinforcement of the *k*-th family) and global coordinate systems

а структуры армирования обладают зеркальной симметрией относительно плоскостей, касательных к эквидистантным поверхностям x_3 = const, в частности и к отсчетной поверхности Ox_1x_2 [24, 26]. Так, структуры, представленные на рисунке 1, заведомо удовлетворяют последнему требованию. При выполнении этих условий перемещения точек гибкой искривленной КМ-панели U_i и осредненные деформации ее композиции ε_{ij} в рамках теории изгиба Амбарцумяна имеют следующие выражения [1, 26]:

$$\begin{gathered} U_i\left(t,\mathbf{r}\right)=u_i\left(t,\mathbf{x}\right)-x_3\partial_i w+\frac{2x_3}{3h^2}\left(3h^2-x_3^2\right)\varepsilon_{i3}^0; \\ U_3\left(t,\mathbf{r}\right)=w\left(t,\mathbf{x}\right),\quad i=1,2,\quad \mathbf{x}\in\Omega,\quad \left|x_3\right|\le h, \\ t\ge t_0,\quad \mathbf{x}=\left(x_1,x_2\right),\quad \mathbf{r}=\left(x_1,x_2,x_3\right); \end{gathered} \tag{1}$$

$$\begin{gathered} \varepsilon_{ij}\left(t,\mathbf{r}\right)=\frac{1}{2}\left(\partial_i u_j+\partial_j u_i\right)-x_3\partial_i\partial_j w+ \\ +\frac{x_3}{3h^2}\left(3h^2-x_3^2\right)\left(\partial_i\varepsilon_{j3}^0+\partial_j\varepsilon_{i3}^0\right)+\delta_{ij}\frac{w}{R_i}+\frac{1}{2}\partial_i w\partial_j w; \\ \varepsilon_{i3}\left(t,\mathbf{r}\right)=\frac{h^2-x_3^2}{h^2}\varepsilon_{i3}^0\left(t,\mathbf{x}\right),\quad \mathbf{x}\in\Omega,\quad \left|x_3\right|\le h, \\ t\ge t_0,\quad i,\ j=1,2, \end{gathered} \tag{2}$$

где w — прогиб; u_i — тангенциальные перемещения точек отсчетной поверхности ($x_3 = 0$) в направлениях x_i; ε_{i3}^0 — деформации трансверсальных сдвигов в точках той же поверхности; R_i — главные радиусы кривизны срединной поверхности; t_0 — начальный момент времени t; ∂_i — оператор частного дифференцирования по переменной x_i (i = 1, 2); δ_{ij} — символ Кронекера; Ω — область, занимаемая конструкцией в плане. В соотношениях (1) и (2) неизвестными являются двумерные нестационарные функции w, u_i и ε_{i3}^0 (i = 1, 2).

Материалы компонентов композиции изотропны; вязкоупругое поведение их описывается уравнениями модели Максвелла–Больцмана, а вязкопластическое деформирование — соотношениями теории течения с изотропным упрочнением. При этом функции нагружения фаз композиции зависят не только от параметров их упрочнения и температуры, но и от скорости деформирования. Согласно этому, в произвольный момент времени t определяющие уравнения, связывающие между собой скорости осредненных деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ и скорости осредненных напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$ в композиции с температурой Θ в ней, можно представить в следующей матричной форме [24]:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}=\mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}+\mathbf{p}, \tag{3}$$

где

$$\begin{gathered} \dot{\boldsymbol{\sigma}}\equiv\left(\dot{\sigma}_{11}\ \dot{\sigma}_{22}\ \dot{\sigma}_{33}\ \dot{\sigma}_{23}\ \dot{\sigma}_{31}\ \dot{\sigma}_{12}\right)^{\mathrm{T}}; \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\equiv\left(\dot{\varepsilon}_{11}\ \dot{\varepsilon}_{22}\ \dot{\varepsilon}_{33}\ 2\dot{\varepsilon}_{23}\ 2\dot{\varepsilon}_{31}\ 2\dot{\varepsilon}_{12}\right)^{\mathrm{T}}; \end{gathered} \tag{4}$$

6×6-матрица $\mathbf{B} = (b_{ij})$ и шестикомпонентный вектор-столбец $\mathbf{p} = (p_i)$ определяются по структурным формулам (2.16)–(2.19) из [24]; индекс T означает операцию транспонирования; точка над символом — частную производную по времени t. Элементы b_{ij} и p_i ($i, j = \overline{1,6}$) матрицы $\mathbf{B}$ и вектора $\mathbf{p}$ зависят от структуры армирования (плотностей ω_k и углов θ_k, φ_k, $1 \le k \le K$), от физико-механических параметров материалов композиции и их текущего термомеханического состояния.

Так как в данной работе моделируется динамическое поведение пологой КМ-оболочки как гибкой тонкостенной механической системы, нормальное напряжение $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$ с приемлемой для практических приложений точностью в трансверсальном направлении x_3 можно аппроксимировать так [4]:

$$\begin{gathered} \sigma_{33}\left(t,\mathbf{r}\right)=\frac{\sigma_{33}^{(+)}\left(t,\mathbf{x}\right)-\sigma_{33}^{(-)}\left(t,\mathbf{x}\right)}{2h}x_3+ \\ +\frac{\sigma_{33}^{(+)}\left(t,\mathbf{x}\right)+\sigma_{33}^{(-)}\left(t,\mathbf{x}\right)}{2},\quad \mathbf{x}\in\Omega,\quad \left|x_3\right|\le h,\quad t\ge t_0, \end{gathered} \tag{5}$$

где $\sigma_{33}^{(\pm)}\left(t,\mathbf{x}\right)\equiv\sigma_{33}\left(t,\mathbf{x},\pm h\right)$ — известные из силовых граничных условий напряжения на верхней (+) и нижней (–) лицевых поверхностях искривленной панели.

Исходя из структуры вектор-столбцов $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ и $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ (см. соотношения (4)), из третьего равенства системы уравнений (3) выразим скорость линейной деформации в поперечном направлении тонкостенной конструкции:

$$\begin{gathered} \dot{\varepsilon}_{33}=b_{33}^{-1}\left(\dot{\sigma}_{33}-p_3-b_{31}\dot{\varepsilon}_{11}-b_{32}\dot{\varepsilon}_{22}-\right. \\ \left.-2b_{34}\dot{\varepsilon}_{23}-2b_{35}\dot{\varepsilon}_{31}-2b_{36}\dot{\varepsilon}_{12}\right), \end{gathered} \tag{6}$$

где скорость напряжения $\dot{\sigma}_{33}$ можно заранее вычислить, дифференцируя (5) по времени t. Скорости же деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ в правой части равенства (6) получаются дифференцированием по t кинематических соотношений (2), т. е. они выражаются через подлежащие определению функции w, $\dot{w}$, $\dot{u}_l$ и $\dot{\varepsilon}_{l3}^0$ (l = 1, 2).

К приведенным выше равенствам необходимо добавить уравнения динамического равновесия гибкой пологой оболочки [1]; их конечно-разностные по времени t аналоги будут приведены ниже.

Как и в работах [24, 26], температуру Θ в трансверсальном направлении пологой оболочки аппроксимируем полиномом L-го порядка:

$$\begin{gathered}\Theta(t,\mathbf{r})-\Theta^0=\sum_{l=0}^{L}\Theta_l(t,\mathbf{x})x_3^l,\\ \mathbf{x}\in\Omega,\quad |x_3|\le h,\quad t\ge t_0,\end{gathered}\tag{7}$$

где Θ_l $(0\le l\le L)$ — искомые двумерные нестационарные функции; $\Theta^0=\mathrm{const}$ — температура естественного состояния КМ-конструкции.

Для окончательного замыкания рассматриваемой связной задачи неизотермического вязкоупруго-вязкопластического деформирования искривленной КМ-панели к соотношениям (1)–(7) следует присоединить уравнение нестационарной теплопроводности [24, 26]. Конечно-разностные по времени t аналоги приведенных двумерных нестационарных уравнений теплового баланса для коэффициентов $\Theta_l(t,\mathbf{x})$ $(0\le l\le L)$ в разложении (7) будут приведены ниже. Кроме того, на кромках оболочки нужно задать как механические [1], так и тепловые [24, 26] граничные условия, а при $t=t_0$ — начальные условия [1, 26].

Численный метод решения. Основываясь на результатах работ [24, 26], для построения решения сформулированной связанной нелинейной (как физически, так и геометрически) термомеханической задачи используем явную схему численного интегрирования, т. е. неизвестные функции будем определять лишь в дискретные моменты времени $t=t_n$ $(n=0,1,2,\ldots)$. При этом предполагаем, что при $t=t_m$ уже известны значения следующих функций [24, 26]:

$$\begin{gathered}\overset{m}{w}(\mathbf{x})\equiv w(t_m,\mathbf{x});\quad \overset{m}{u}_l(\mathbf{x})\equiv u_l(t_m,\mathbf{x});\quad \overset{m}{\gamma}_l(\mathbf{x})\equiv\gamma_l(t_m,\mathbf{x});\\ \overset{m}{\sigma}_{ij}(\mathbf{r})\equiv\sigma_{ij}(t_m,\mathbf{r});\quad \overset{m}{\sigma}{}_{33}^{(\pm)}(\mathbf{x})\equiv\sigma_{33}^{(\pm)}(t_m,\mathbf{x});\\ \overset{n}{U}{}^{(r)}(\mathbf{x})\equiv U^{(r)}(t_n,\mathbf{x});\quad \overset{n}{q}_i(\mathbf{r})\equiv q_i(t_n,\mathbf{r});\\ \overset{m}{\Theta}_s(\mathbf{x})\equiv\Theta_s(t_m,\mathbf{x});\quad \overset{n-1}{\dot{\Theta}}_s(\mathbf{x})\equiv\dot{\Theta}_s(t_{n-1},\mathbf{x});\\ \overset{n}{q}{}_{\infty}^{(\pm)}(\mathbf{x})\equiv q_{\infty}^{(\pm)}(t_n,\mathbf{x});\quad \overset{m}{\sigma}{}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r})\equiv\sigma_{ij}^{(k)}(t_m,\mathbf{r});\\ \overset{m}{\varepsilon}{}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r})\equiv\varepsilon_{ij}^{(k)}(t_m,\mathbf{r});\quad \overset{n-1}{\dot{\sigma}}{}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r})\equiv\dot{\sigma}_{ij}^{(k)}(t_{n-1},\mathbf{r});\\ \overset{n-1}{\dot{\varepsilon}}{}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r})\equiv\dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)}(t_{n-1},\mathbf{r});\quad \overset{n-1}{\ddot{\varepsilon}}{}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r})\equiv\ddot{\varepsilon}_{ij}^{(k)}(t_{n-1},\mathbf{r});\\ \overset{n}{\dot{p}}{}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r})\equiv\dot{p}_{ij}^{(k)}(t_n,\mathbf{r});\quad \overset{n}{\chi}_k(\mathbf{r})\equiv\chi_k(t_n,\mathbf{r});\\ \overset{n}{\Theta}{}_{\infty}^{(\pm)}(\mathbf{x})\equiv\Theta_{\infty}^{(\pm)}(t_n,\mathbf{x}),\quad l=1,2,\quad i,j=\overline{1,3},\\ m=n-1,n,\quad 0\le p\le M+1,\quad 0\le r\le L-2,\\ 0\le s\le L,\quad 0\le k\le K,\quad \mathbf{x}\in\Omega,\quad |x_3|\le h,\end{gathered}\tag{8}$$

где

$$\begin{gathered}\gamma_l(t,\mathbf{x})\equiv\frac{8}{5}\varepsilon_{l3}^0-\partial_l w,\quad U^{(r)}(t,\mathbf{x})\equiv\int_{-h}^{h}U(t,\mathbf{r})x_3^r\,dx_3;\\ \sigma_{ij}(t,\mathbf{r})=\sum_{k=0}^{K}\omega_k(\mathbf{x})\sigma_{ij}^{(k)}(t,\mathbf{r});\\ \varepsilon_{ij}(t,\mathbf{r})=\sum_{k=0}^{K}\omega_k(\mathbf{x})\varepsilon_{ij}^{(k)}(t,\mathbf{r});\\ \omega_0\equiv1-\sum_{k=1}^{K}\omega_k,\quad l=1,2,\quad 0\le r\le L-2;\end{gathered}\tag{9}$$

U — удельная внутренняя энергия композиции оболочки; $\sigma_{ij}^{(k)}$, $\varepsilon_{ij}^{(k)}$, $p_{ij}^{(k)}$ — напряжения, полные и пластические деформации в k-й фазе композиции ($k=0$ — связующая матрица; $k\ge1$ — арматура k-го семейства); χ_k — параметр Одквиста (упрочнения) в том же материале; q_i — компоненты осредненного теплового потока в композиции; $q_{\infty}^{(\pm)}$ — заданные тепловые потоки через нижнюю (–) и верхнюю (+) лицевые поверхности КМ-панели; γ_1 — введенные для удобства новые кинематические переменные.

В механической составляющей рассматриваемой задачи производные по времени заменим их центральными конечными разностями на трехточечном шаблоне $\{t_{n-1},t_n,t_{n+1}\}$. Это позволяет разработать явную схему шагов по времени [24, 26]. После замены в уравнениях динамического равновесия гибкой пологой оболочки вторых производных по t от функций w, u_i и γ_i их конечными разностями, учитывая при этом (1), (5), (9) и обозначения, аналогичные (8), получим дискретизированные по t уравнения движения [26]:

$$\begin{gathered}\frac{2h\rho}{\tau^2}\left(\overset{n+1}{w}-2\overset{n}{w}+\overset{n-1}{w}\right)=\\ =\sum_{l=1}^{2}\left[\partial_l\left(\overset{n}{F}_{l3}+\sum_{j=1}^{2}\overset{n}{F}_{lj}\partial_j\overset{n}{w}\right)+R_l^{-1}\overset{n}{F}_{ll}\right]+\overset{n}{\sigma}{}_{33}^{(+)}-\overset{n}{\sigma}{}_{33}^{(-)};\\ \frac{2h\rho}{\tau^2}\left(\overset{n+1}{u}_i-2\overset{n}{u}_i+\overset{n-1}{u}_i\right)=\\ =\sum_{j=1}^{2}\partial_j\left(\overset{n}{F}_{ij}-\overset{n}{F}_{j3}\partial_i\overset{n}{w}\right)+R_i^{-1}\overset{n}{F}_{i3}-\left(\overset{n}{\sigma}{}_{33}^{(+)}-\overset{n}{\sigma}{}_{33}^{(-)}\right)\partial_i\overset{n}{w};\\ \frac{2h^3\rho}{3\tau^2}\left(\overset{n+1}{\gamma}_i-2\overset{n}{\gamma}_i+\overset{n-1}{\gamma}_i\right)=\sum_{j=1}^{2}\partial_j\overset{n}{M}_{ij}-\overset{n}{F}_{i3},\\ \mathbf{x}\in\Omega,\quad i=1,2,\quad n=1,2,3,\ldots,\end{gathered}\tag{10}$$

где

$$\begin{gathered}\rho=\sum_{k=0}^{K}\rho_k\omega_k,\quad F_{ij}(t,\mathbf{x})=\int_{-h}^{h}\sigma_{ij}(t,\mathbf{r})\,dx_3;\\ F_{i3}(t,\mathbf{x})=\int_{-h}^{h}\sigma_{i3}(t,\mathbf{r})\,dx_3;\\ M_{ij}(t,\mathbf{x})=\int_{-h}^{h}\sigma_{ij}(t,\mathbf{r})x_3\,dx_3,\quad i,j=1,2;\end{gathered}\tag{11}$$

ρ_k — объемная плотность материала k-й фазы композиции; $\tau=\mathrm{const}>0$ — заданный шаг по времени

($t_{n+1} = t_n + \tau$). Внешними массовыми силами в равенствах (10) пренебрегли. Осредненные напряжения σ_{ij} и деформации ε_{ij} в композиции панели связаны с напряжениями $\sigma_{ij}^{(k)}$ и деформациями $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ ($i, j = \overline{1,3}$, $0 \le k \le K$) в субструктурных элементах композиции соотношениями, приведенными в (9).

Используя предположения (8) и выражения (11), в текущий дискретный момент времени t_n можно определить все внутренние силовые факторы F_{ij}, F_{i3} и M_{ij} в КМ-панели, которые входят в правые части уравнений (10). Следовательно, из этих равенств, учитывая соответствующие начальные (заданные при $t = t_0$) и граничные условия [1], по явной схеме можно вычислить значения искомых функций $\overset{n+1}{w}, \overset{n+1}{u}_i, \overset{n+1}{\gamma}_i$ при $t = t_{n+1}$, а затем на основании первого соотношения (9) — и деформации $\overset{n+1}{\varepsilon}{}^{0}_{i3}$ ($i = 1, 2$).

Для интегрирования теплофизической составляющей связанной задачи термопластичности также используем явную схему шагов по времени t, но на двухточечном шаблоне $\{t_n, t_{n+1}\}$. Приведенные двумерные нестационарные уравнения теплопроводности после их дискретизации по времени с учетом соотношений (7), (9) и обозначений, подобных (8), примут вид [24, 26]:

$$\frac{\rho}{\tau}\left(\overset{n+1}{U}{}^{(m)} - \overset{n}{U}{}^{(m)}\right) = -\partial_1 \overset{n}{Q}{}_1^{(m)} - \partial_2 \overset{n}{Q}{}_2^{(m)} - \overset{n}{\bar{Q}}{}_3^{(m)} + \overset{n}{W}{}^{(m)}, \tag{12}$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 \le m \le L-2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$\begin{gathered}
-\sum_{l=0}^{L}(-1)^l h^{l-1}\left(l\lambda_{33}^{(-)} + h\alpha^{(-)}\right)\Theta_l(t,\mathbf{x}) = \\
= \alpha^{(-)}\left(\Theta_\infty^{(-)} - \Theta^0\right) + q_\infty^{(-)}(t,\mathbf{x}); \\
\sum_{l=0}^{L} h^{l-1}\left(l\lambda_{33}^{(+)} + h\alpha^{(+)}\right)\Theta_l(t,\mathbf{x}) = \\
= \alpha^{(+)}\left(\Theta_\infty^{(+)} - \Theta^0\right) - q_\infty^{(+)}(t,\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \ge t_0;
\end{gathered} \tag{13}$$

$$\begin{gathered}
C_0 \sum_{i=0}^{L} H(i+m)\Theta_i + \frac{C_1}{2}\sum_{i=0}^{L}\sum_{j=0}^{L} H(i+j+m)\Theta_i\Theta_j + \\
+ \frac{C_2}{3}\sum_{i=0}^{L}\sum_{j=0}^{L}\sum_{l=0}^{L} H(i+j+l+m)\Theta_i\Theta_j\Theta_l = U^{(m)}(t,\mathbf{x}), \\
\mathbf{x} \in \Omega, \quad t \ge t_0, \quad 0 \le m \le L-2,
\end{gathered} \tag{14}$$

где

$$\begin{gathered}
H(s) \equiv \frac{h^{s+1}}{s+1}\left[1 - (-1)^{s+1}\right]; \\
Q_i^{(m)}(t,\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^{h} q_i(t,\mathbf{r}) x_3^m \, dx_3 \quad (i = \overline{1,3}); \\
\bar{Q}_3^{(m)}(t,\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^{h} \partial_3 q_3(t,\mathbf{r}) x_3^m \, dx_3 = \\
= h^m\left[q_3^{(+)} - (-1)^m q_3^{(-)}\right] - mQ_3^{(m-1)}(t,\mathbf{x}); \\
W^{(m)}(t,\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^{h} \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} x_3^m \, dx_3; \\
C_l(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\rho}\sum_{k=0}^{K} c_l^{(k)}\rho_k\omega_k(\mathbf{x}) \quad (l = 0, 1, 2); \\
\lambda_{33}^{(\pm)} \equiv \lambda_{33}\big|_{\Theta = \Theta(t,\mathbf{x},\pm h)}; \\
q_3^{(\pm)}(t,\mathbf{x}) \equiv q_3(t,\mathbf{x},\pm h) = q_\infty^{(\pm)}(t,\mathbf{x});
\end{gathered} \tag{15}$$

λ_{33} — коэффициент теплопроводности КМ в поперечном направлении панели x_3, рассчитанный по структурным формулам из [29]; $\alpha^{(\pm)}$ — коэффициент теплоотдачи на нижней (–) и верхней (+) лицевых поверхностях оболочки; $\Theta_\infty^{(\pm)}$ — заданные температуры окружающей среды со стороны тех же поверхностей; $c_l^{(k)}$ — экспериментально полученные коэффициенты квадратичной аппроксимации по температуре Θ удельной теплоемкости c_k k-й фазы композиции (случай термочувствительности):

$$\begin{gathered}
c_k(\Theta - \Theta^0) = \\
= c_0^{(k)} + c_1^{(k)} \cdot (\Theta - \Theta^0) + c_2^{(k)} \cdot (\Theta - \Theta^0)^2, \quad 0 \le k \le K.
\end{gathered} \tag{16}$$

Соотношения (13) представляют собой термические граничные условия на лицевых поверхностях тонкостенной КМ-конструкции, преобразованные с учетом аппроксимации температуры (7). Равенства же (14) выражают двумерные нестационарные функции $U^{(m)}$ (см. (9)) через коэффициенты разложения (7) с учетом формулы (16). Уравнения (13) и (14) выполняются в любой момент времени, а не только при дискретных значениях $t = t_n$.

По формулам (15), учитывая предположения (8), в рассматриваемый момент времени t_n можно определить правые части в дискретизированных двумерных уравнениях (12). Затем, используя тепловые начальные и граничные условия, которые задаются на контуре Γ, ограничивающем область Ω, из соотношений (12) по явной численной схеме можно получить функции $\overset{n+1}{U}{}^{(m)}$ в следующий момент времени t_{n+1}. Поскольку правые части в (13) и (14) при $t = t_{n+1}$ уже известны, учитывая выражения (15), из равенств (13) и (14) можно вычислить и коэффициенты разложения температуры $\overset{n+1}{\Theta}_l(\mathbf{x})$, $0 \le l \le L$ (см. (7)). При учете термочувствительности материалов композиции (если в (16) коэффициенты $c_1^{(k)} \ne 0$ и/или $c_2^{(k)} \ne 0$, $0 \le k \le K$) система уравнений (13) и (14) является нелинейной, поэтому для ее решения необходимо организовать итерационный процесс, например аналогичный методу переменных параметров упругости [24, 26]. В остальном предложенная явная схема (10) и (12) с учетом равенств (2), (6), (11), (15) и структурных формул, полученных в [24, 29], реализуется совершенно так же, как и в [24, 26], где показано, что шаг интегрирования τ в равенствах (10) и (12) следует задавать так, чтобы выполнялись необходимые условия устойчивости Куранта–Фридрихса–Леви [6].

Заключение. Поставлена задача, описывающая неупругое термомеханическое поведение изгибаемых армированных пологих оболочек и искривленных панелей при их динамическом нагружении. Для моделирования волновых процессов и ослабленного сопротивления таких КМ-конструкций поперечному сдвигу использована традиционная неклассическая теория Амбарцумяна [1]. При этом учитывается геометрическая нелинейность в приближении Кармана, а также обжатие оболочек в трансверсальном направлении.

Вязкоупругое деформирование фаз композиции характеризуется определяющими соотношениями модели тела Максвелла–Больцмана [24]. Неупругое же деформирование этих материалов описывается уравнениями теории пластического течения с изотропным упрочнением; функции нагружения компонентов композиции, которые являются обобщением условия текучести Мизеса, зависят от параметра упрочнения (параметра Одквиста), температуры и интенсивности скоростей деформаций. Во всех фазовых материалах учитывается сложное НДС.

В отличие от традиционных подходов, использующих квадратичное приближение температуры в поперечном направлении тонкостенных конструкций (что приемлемо в случаях квазистатического их нагружения [1, 10, 13]), в настоящей работе температура в трансверсальном направлении оболочек и панелей аппроксимирована полиномами более высоких порядков. В механической и теплофизической составляющих рассматриваемой связанной задачи определяющие уравнения для композиции получены на основе структурных формул из [24, 29], позволяющих проводить расчеты не только в случаях плоско-перекрестных (см. рисунок 1 *a*), но и для пространственных (см. рисунок 1 *b*) структур армирования. Представлены двумерные уравнения нестационарной теплопроводности, соответствующие полиномиальному разложению температуры в поперечном направлении тонкостенной КМ-конструкции.

Разработана явная численная схема интегрирования сформулированной нелинейной термомеханической задачи. Для механической составляющей этой задачи использована явная схема типа «крест» на трехточечном шаблоне по времени, а для теплофизической составляющей — явная схема с шагом вперед. Необходимым условием устойчивости используемой численной схемы является условие Куранта [6].

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124021400036-7).

Список литературы

1. Амбарцумян, С.А. Общая теория анизотропных оболочек / С.А. Амбарцумян. — М.: Наука, 1974. — 448 с.
2. Композиционные материалы: справочник / Л.Р. Вишняков, Т.В. Грудина, В.Х. Кадыров [и др.]; под ред. Д.М. Карпиноса. — Киев: Наук. думка, 1985. — 592 с.
3. Тарнопольский, Ю.М. Пространственно-армированные композиционные материалы: справочник / Ю.М. Тарнопольский, И.Г. Жигун, В.А. Поляков. — М.: Машиностроение, 1987. — 224 с.
4. Богданович, А.Е. Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек / А.Е. Богданович. — Рига: Зинатне, 1987. — 295 с.
5. Справочник по композитным материалам: в 2 кн. / под ред. Дж. Любина; пер. с англ. А.Б. Геллера, М.М. Гельмонта; под ред. Б.Э. Геллера. — М.: Машиностроение, 1988. — Кн. 1. — 448 с.
6. Абросимов, Н.А. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций / Н.А. Абросимов, В.Г. Баженов. — Нижний Новгород: Изд-во Нижегор. госун-та, 2002. — 399 с.
7. Qatu, M.S. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009 / M.S. Qatu, R.W. Sullivan, W. Wang // Composite Structures. — 2010. — Vol. 93, iss. 1. — P. 14–31. — DOI: https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.05.014.
8. Kazanci, Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses / Z. Kazanci // International Journal of Non-Linear Mechanics. — 2011. — Vol. 46, iss. 5. — P. 807–817. — DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.011.
9. Vasiliev, V.V. Advanced mechanics of composite materials and structural elements / V.V. Vasiliev, E.V. Morozov. — 3rd ed. — Amsterdam: Elsevier, 2013. — 832 p. — DOI: https://doi.org/10.1016/C2011-0-07135-1.
10. Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек / Ю.С. Соломонов, В.П. Георгиевский, А.Я. Недбай, В.А. Андрюшин. — М.: Физматлит, 2014. — 408 с.
11. Gibson, R.F. Principles of composite material mechanics / R.F. Gibson. — 4th ed. — Boca Raton: CRC Press, 2016. — 700 p. — DOI: https://doi.org/10.1201/b19626.
12. Куликов, Г.М. Термоупругость гибких многослойных анизотропных оболочек / Г.М. Куликов // Известия Академии наук. Механика твердого тела. — 1994. — № 2. — С. 33–42.
13. Reddy, J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis / J.N. Reddy. — 2nd ed. — Boca Raton: CRC Press, 2003. — 858 p. — DOI: https://doi.org/10.1201/b12409.
14. Димитриенко, Ю.И. Механика композитных конструкций при высоких температурах / Ю.И. Димитриенко. — М.: Физматлит, 2018. — 447 с.
15. Ramu, S.A. Plastic response of orthotropic spherical shells under blast loading / S.A. Ramu, K.J. Iyengar // Nuclear Engineering and Design. — 1979. — Vol. 55, iss. 3. — P. 363–373. — DOI: https://doi.org/10.1016/0029-5493(79)90115-8.
16. Vena, P. Determination of the effective elastic-plastic response of metal-ceramic composites / P. Vena, D. Gastaldi, R. Contro // International Journal of Plasticity. — 2008. — Vol. 24, iss. 3. — P. 483–508. — DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2007.07.001.
17. Leu, S.-Y. Exact solutions for plastic responses of orthotropic strain-hardening rotating hollow cylinders / S.-Y. Leu, H.-C. Hsu // International Journal of Mechanical Sciences. — 2010. — Vol. 52, iss. 12. — P. 1579–1587. — DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2010.07.006.
18. Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle / L. Brassart, L. Stainier, I. Doghri, L. Delannay // International Journal of Plasticity. — 2012. — Vol. 36. — P. 86–112. — DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.03.010.
19. Morinière, F.D. Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates – A review / F.D. Morinière, R.C. Alderliesten, R. Benedictus // International Journal of Impact Engineering. — 2014. — Vol. 67. — P. 27–38. — DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2014.01.004.
20. Ахундов, В.М. Инкрементальная каркасная теория сред волокнистого строения при больших упругих и пластических деформациях / В.М. Ахундов // Механика композитных материалов. — 2015. — Т. 51, № 3. — С. 539–558.
21. Sekkate, Z. Elastoplastic mean-field homogenization: recent advances review / Z. Sekkate, A. Aboutajeddine, A. Seddouki // Mechanics of Advanced Materials and Structures. — 2020. — Vol. 29, iss. 3. — P. 449–474. — DOI: https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1776431.
22. A historical review of the traditional methods and the internal state variable theory for modeling composite materials / G. He, Y. Liu, T.E. Lacy, M.F. Horstemeyer // Mechanics of Advanced Materials and Structures. — 2022. — Vol. 29, iss. 18. — P. 2617–2638. — DOI: https://doi.org/10.1080/15376494.2021.1872124.

23. Янковский, А.П. Моделирование вязкоупругопластического поведения пологих оболочек с учетом скорости деформирования материала / А.П. Янковский // Прикладная механика и техническая физика. — 2022. — Т. 63, № 2(372). — С. 140–150. — DOI: http://dx.doi.org/10.15372/PMTF20220213.
24. Янковский, А.П. Моделирование неизотермического вязкоупруго-вязкопластического деформирования изгибаемых армированных пластин / А.П. Янковский // Известия РАН. Механика твердого тела. — 2023. — № 5. — С. 147–169. — DOI: https://doi.org/10.31857/S0572329923700071.
25. Romanova, T.P. Rigid-plastic behavior and bearing capacity of thin flat reinforced rotating disks / T.P. Romanova // Mechanics of Advanced Materials and Structures. — 2024. — Vol. 31, iss. 30. — P. 12721–12739. — DOI: https://doi.org/10.1080/15376494.2024.2328751.
26. Янковский, А.П. Моделирование неизотермического вязкоупругопластического деформирования гибких пологих армированных оболочек при динамическом нагружении / А.П. Янковский // Конструкции из композиционных материалов. — 2024. — Вып. 1(173). — С. 11–21.
27. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур / Н.И. Безухов, В.Л. Бажанов, И.И. Гольденблат [и др.]; под ред. И.И. Гольденблата. — М.: Машиностроение, 1965. — 566 с.
28. Reissner, E. On transverse vibrations of thin shallow elastic shells / E. Reissner // Quarterly of Applied Mathematics. — 1955. — Vol. 13, no. 2. — P. 169–176. — DOI: https://doi.org/10.1090/qam/69715.
29. Янковский, А.П. Моделирование процессов теплопроводности в пространственно-армированных композитах с произвольной ориентацией волокон / А.П. Янковский // Прикладная физика. — 2011. — № 3. — С. 32–38.

YANKOVSKII Andrei P., D. Sc. in Phys. and Math.
Leading Research Scientist of the Laboratory of Fast Processes Physics
E-mail: yankovsky_ap@itam.nsc.ru

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation

Received December 5, 2024.

MODELING OF BENDING NON-ISOTHERMAL VISCOELASTIC-VISCOPLASTIC DYNAMIC DEFORMATION OF SHALLOW REINFORCED SHELLS. PART 1. PROBLEM FORMULATION AND SOLUTION METHOD

The problem of dynamic non-isothermal viscoelastic-viscoplastic deformation of flexible reinforced shallow shells and curved panels is formulated. Wave processes and poor resistance of such structures to transverse shear are modeled in terms of Ambartsumian's non-classical bending theory. Transverse compression of composite shells is taken into account. The temperature field in the transverse direction is approximated by a high order polynomial. The geometric nonlinearity is taken into account in the Karman approximation. The viscoelastic behavior of the composition components is described by the Maxwell–Boltzmann body model. Inelastic deformation is described by the relations of the theory of plastic flow with isotropic hardening, and the loading functions of phase materials depend not only on the hardening parameter and temperature, but also on the intensity of the strains speed. Structural relationships of thermomechanics of composites are used, taking into account the complex stress-strain state (SSS) in all phase materials of the composition. These structural relationships make it possible to calculate the temperature fields and SSS in shallow shells not only with traditional "flat"-criss-cross, but also with spatial reinforcement structures. The reduced two-dimensional equations of the thermophysical component of the problem are written out, corresponding to the polynomial expansion of the temperature in the transverse direction of a thin-walled composite structure. In this case, the thermal boundary conditions of the general type on the front surfaces of the shallow shell and the thermal sensitivity of the materials of the components of its composition are taken into account. An explicit numerical scheme is used to integrate the formulated nonlinear coupled problem. The mechanical component of the dynamic problem is integrated using a "cross" type scheme on a three-point template in time; the thermal-physical component is integrated using an explicit scheme on a two-point template in time. A necessary condition for the stability of the numerical scheme is the Courant limitation on the time step.

***Keywords:** shallow shells, curved panels, reinforcement, coupled thermomechanical problem, viscoelastic-viscoplasticity, inelastic dynamics, Ambartsumian's bending theory, residual state, numerical solution, explicit time stepping scheme*

DOI: https://doi.org/10.46864/1995-0470-2025-2-71-62-69

References

1. Ambartsumian S.A. *Obshchaya teoriya anizotropnykh obolochek* [General theory of anisotropic shells]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 448 p. (in Russ.).
2. Vishnyakov L.R., et al. *Kompozitsionnye materialy* [Composite materials]. Kiev, Nauchnaya mysl Publ., 1985. 592 p. (in Russ.).
3. Tarnopolskiy Yu.M., Zhigun I.G., Polyakov V.A. *Prostranstvenno-armirovannye kompozitsionnye materially* [Spatially reinforced composite materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1987. 224 p. (in Russ.).
4. Bogdanovich A.E. *Nelineynye zadachi dinamiki tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek* [Nonlinear problems of the dynamics of cylindrical composite shells]. Riga, Zinatne Publ., 1987. 295 p. (in Russ.).
5. *Handbook of composites*. New York, Van Nostrand Reinhold Company Inc., 1982. 786 p.
6. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G. *Nelineynye zadachi dinamiki kompozitnykh konstruktsiy* [Nonlinear problems of dynamics composites designs]. Nizhny Novgorod, Nizhegorodskiy gosudarstvennyy universitet im. N.I. Lobachevskogo Publ., 2002. 399 p. (in Russ.).
7. Qatu M.S, Sullivan R.W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009. *Composite structures*, 2010, vol. 93, iss. 1, pp. 14–31. DOI: https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.05.014.
8. Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses. *International journal of non-linear mechanics*, 2011, vol. 46, iss. 5, pp. 807–817. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.011.
9. Vasiliev V.V., Morozov E.V. *Advanced mechanics of composite materials and structural elements*. Amsterdam, Elsevier, 2013. 832 p. DOI: https://doi.org/10.1016/C2011-0-07135-1.
10. Solomonov Yu.S., Georgievskiy V.P., Nedbai A.Ya., Andryushin V.A. *Prikladnye zadachi mekhaniki kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek* [Applied problems of mechanics of composite cylindrical shells]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2014. 408 p. (in Russ.).
11. Gibson R.F. *Principles of composite material mechanics*. Boca Raton, CRC Press, 2016. 700 p. DOI: https://doi.org/10.1201/b19626.
12. Kulikov G.M. Termouprugost gibkikh mnogosloynykh anizotropnykh obolochek [Thermo-elasticity flexible multilayered anisotropic shells]. *Izvestiya Akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*, 1994, no. 2, pp. 33–42 (in Russ.).
13. Reddy J.N. *Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis*. Boca Raton, CRC Press, 2003. 858 p. DOI: https://doi.org/10.1201/b12409.
14. Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika kompozitnykh konstruktsiy pri vysokikh temperaturakh* [Mechanics of composite structures at high temperatures]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2018. 447 p. (in Russ.).
15. Ramu S.A., Iyengar K.J. Plastic response of orthotropic spherical shells under blast loading. *Nuclear engineering and design*, 1979, vol. 55, iss. 3, pp. 363–373. DOI: https://doi.org/10.1016/0029-5493(79)90115-8.
16. Vena P., Gastaldi D., Contro R. Determination of the effective elastic-plastic response of metal-ceramic composites. *International journal of plasticity*, 2008, vol. 24, iss. 3, pp. 483–508. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2007.07.001.
17. Leu S.-Y., Hsu H.-C. Exact solutions for plastic responses of orthotropic strain-hardening rotating hollow cylinders. *International journal of mechanical sciences*, 2010, vol. 52, iss. 12, pp. 1579–1587. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2010.07.006.
18. Brassart L., Stainier L., Doghri I., Delannay L. Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle. *International journal of plasticity*, 2012, vol. 36, pp. 86–112. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.03.010.
19. Morinière F.D., Alderliesten R.C., Benedictus R. Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates – A review. *International journal of impact engineering*, 2014, vol. 67, pp. 27–38. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2014.01.004.
20. Akhundov V.M. Inkrementalnaya karkasnaya teoriya sred voloknistogo stroeniya pri bolshikh uprugikh i plasticheskikh deformatsiyakh [Incremental carcass theory of fibrous media under large elastic and plastic deformations]. *Mekhanika kompozitnykh materialov*, 2015, vol. 51, no. 3, pp. 539–558 (in Russ.).
21. Sekkate Z., Aboutajeddine A., Seddouki A. Elastoplastic mean-field homogenization: recent advances review. *Mechanics of advanced materials and structures*, 2020, vol. 29, iss. 3, pp. 449–474. DOI: https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1776431.
22. He G., Liu Y., Lacy T.E., Horstemeyer M.F. A historical review of the traditional methods and the internal state variable theory for modeling composite materials. *Mechanics of advanced materials and structures*, 2022, vol. 29, iss. 18, pp. 2617–2638. DOI: https://doi.org/10.1080/15376494.2021.1872124.
23. Yankovskii A.P. Modelirovanie vyazkouprugoplasticheskogo povedeniya pologikh obolochek s uchetom skorosti deformirovaniya materiala [Simulation of viscoelastic-plastic behavior of shallow shells with account for strain rate of materials]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 2022, vol. 63, no. 2(372), pp. 140–150. DOI: http://dx.doi.org/10.15372/PMTF20220213 (in Russ.).
24. Yankovskii A.P. Modelirovanie neizotermicheskogo vyazkouprugo-vyazkoplasticheskogo deformirovaniya izgibaemykh armirovannykh plastin [Modeling of non-isothermal viscoelastic-viscoplastic deformation of bending reinforced plates]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela*, 2023, no. 5, pp. 147–169. DOI: https://doi.org/10.31857/S0572329923700071 (in Russ.).
25. Romanova T.P. Rigid-plastic behavior and bearing capacity of thin flat reinforced rotating disks. *Mechanics of advanced materials and structures*, 2024, vol. 31, iss. 30, pp. 12721–12739. DOI: https://doi.org/10.1080/15376494.2024.2328751.
26. Yankovskii A.P. Modelirovanie neizotermicheskogo vyazkouprugoplasticheskogo deformirovaniya gibkikh pologikh armirovannykh obolochek pri dinamicheskom nagruzhenii [Modeling of nonisothermal viscoelastic-plastic deformation of flexible shallow reinforced shells under dynamic loading]. *Composite materials constructions*, 2024, iss. 1(173), pp. 11–21 (in Russ.).
27. Bezukhov N.I., Bazhanov V.L., Goldenblat I.I., Nikolaenko N.A., Sinyukov A.M. *Raschety na prochnost, ustoychivost i kolebaniya v usloviyakh vysokikh temperatur* [Calculations on strength, stability and fluctuations in conditions of high temperatures]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1965. 566 p. (in Russ.).
28. Reissner E. On transverse vibrations of thin shallow elastic shells. *Quarterly of applied mathematics*, 1955, vol. 13, no. 2, pp. 169–176. DOI: https://doi.org/10.1090/qam/69715.
29. Yankovskii A.P. Modelirovanie protsessov teploprovodnosti v prostranstvenno-armirovannykh kompozitakh s proizvolnoy orientatsiey volokon [Modelling of processes of thermal conductivity in spatially reinforced composites with any orientation of fibres]. *Prikladnaya fizika*, 2011, no. 3, pp. 32–38 (in Russ.).