

УДК 539.3

Э.И. СТАРОВОЙТОВ, д-р физ.-мат. наук, проф.

профессор кафедры «Строительная механика, геотехника и строительные конструкции»¹
E-mail: edstar0@yandex.by

Д.А. БУДНИКОВА

магистрант кафедры «Строительная механика, геотехника и строительные конструкции»¹
E-mail: d_oshik@mail.ru¹Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 21.02.2025.

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЯТИСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ, ВЫЗВАННЫЕ НАЧАЛЬНЫМ ПРОГИБОМ

Рассмотрена задача о собственных колебаниях пятислойного симметричного по толщине стержня, возникающих вследствие начального прогиба. Три несущих слоя предполагаются тонкими, высокопрочными. Для них приняты гипотезы Бернулли. В двух относительно толстых легких заполнителях выполняется гипотеза Тимошенко, т. е. учитывается дополнительный сдвиг. Система дифференциальных уравнений собственных колебаний получена вариационным методом с учетом поперечных сил инерции. Для симметричного по толщине стержня система сведена к двум уравнениям в частных производных относительно прогиба и относительного сдвига в заполнителях. Аналитическое решение соответствующей начально-краевой задачи получено с помощью разложения искомого перемещения в ряд по построенной системе собственных функций. Приведено алгебраическое уравнение для определения собственных чисел. Приведены графики зависимости первых трех частот от толщин центрального несущего слоя и заполнителей. Рассмотрен пример возникновения собственных колебаний за счет начального прогиба. Проведен численный анализ полученных решений.

Ключевые слова: симметричный пятислойный стержень, начальный прогиб, аналитическое решение, собственные числа и частоты, численные результаты

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2025-2-71-70-77>

Введение. Повсеместное применение деталей, выполненных из композиционных материалов, служит основанием для создания расчетных математических моделей квазистатического и динамического деформирования неоднородных тел. Монография [1] содержит полное и подробное описание различных теорий, аналитических решений и конечно-элементных моделей многослойных композитных пластин и оболочек. В ней отражены достижения в области моделирования материалов в целом и композитных материалов и конструкций в частности. Монографии [2–4] посвящены исследованию температурных деформаций и напряжений в стержнях, пластинах и оболочках, рассмотрению конкретных прикладных задач механики твердого тела.

Постановки и решения краевых и начально-краевых задач для упругих и неупругих слоистых элементов конструкций, учитывающих воздействие внешней среды, предложены в монографиях [5–10]. Кинематические гипотезы, как правило, предполагают выполнение гипотезы Ти-

мошенко в заполнителе, деформирование тонких, но достаточно жестких несущих слоев, подчиняется гипотезам Бернулли.

Свободные колебания упругих слоистых балок, пластин и цилиндрических оболочек рассмотрены в работах [11–15]. Получены аналитические решения соответствующих начально-краевых задач, численно исследована зависимость собственных частот от толщин и упругих параметров материалов слоев. Резонансные режимы колебаний трехслойных цилиндрических оболочек моделировались в статьях [16–18]. Динамическое деформирование неоднородных тел под действием нестационарных нагрузок рассматривалось в работах [19–21].

Публикации [22–25] посвящены анализу динамического поведения трехслойных и композитных пластин. Геометрические гипотезы соответствуют ломаной линии, заполнители приняты легкими, т. е. в них не учитывается работа касательных напряжений. Аналитические решения, описывающие собственные и вынужденные колебания,

отклик на нестационарные нагружения, получены в виде разложения искомым перемещений в ряд по системам собственных функций. В статьях [26–31] исследуется влияние упругого основания Винклера и Пастернака на частоты и формы колебаний композитных балок и пластин, учитывается его жесткостные и демпфирующие свойства. Проведена численная апробация полученных аналитических решений.

Алгоритмы роста повреждений в многослойных композитах при статических нагрузках исследованы в [32]. Показано, что разрушение композита с поперечным армированием наблюдается между волокнами.

В работах [33–36] исследован изгиб трехслойных круговых и кольцевых пластин, связанных с упругими основаниями Винклера и Пастернака. Аналитические решения краевых задач учитывают сдвиговые свойства и обжатие упругих оснований. Воздействие стационарного температурного поля на деформирование трехслойных стержней и пластин рассмотрено в статьях [37–39].

Здесь предложена новая постановка и решение задачи о собственных колебаниях пятислойного стержня, симметричного по толщине.

Постановка задачи. Решение проводится в декартовой системе координат, связанной со срединной плоскостью внутреннего несущего слоя толщиной $2h_1$ (рисунок 1).

Для тонких жестких несущих слоев 1, 2, 4 принимаются гипотезы Бернулли, в соответствии с которыми поперечные сечения слоев остаются плоскими и нормальными деформированной осевой линии после приложения нагрузки. В сравнительно толстых заполнителях 3, 5 справедлива гипотеза Тимошенко: поперечные сечения после приложения нагрузки остаются плоскими, несжимаемыми по толщине, но поворачиваются на дополнительный угол $\psi(x, t)$. Искомыми функциями являются прогиб стержня $w(x, t)$ и относительный сдвиг $\psi(x, t)$. Нагрузка $q(x, t)$ предполагается распределенной по верхней плоскости стержня.

Выражения продольных перемещений $u_x^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5$ — номер слоя) через прогиб и относительный сдвиг:

$$\begin{aligned} u_x^{(4)} &= -zw_{,x} + c\psi, & (c + h_1 \leq z \leq c + h_1 + h_2); \\ u_x^{(5)} &= -zw_{,x} + (z - h_1)\psi, & (h_1 \leq z \leq c + h_1); \\ u_x^{(1)} &= -zw_{,x}, & (-h_1 \leq z \leq h_1); \end{aligned} \quad (1)$$

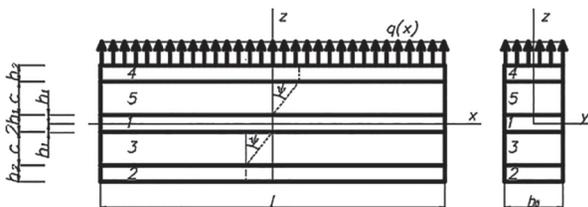


Рисунок 1 — Расчетная схема пятислойного стержня
Figure 1 — Calculation diagram of the five-layer rod

$$\begin{aligned} u_x^{(3)} &= -zw_{,x} + (z + h_1)\psi, & (-h_1 - c \leq z \leq -h_1); \\ u_x^{(2)} &= -zw_{,x} - c\psi, & (-h_1 - h_2 - c \leq z \leq -h_1 - c), \end{aligned}$$

где z — координата точки в поперечном сечении стержня; запятая в нижнем индексе обозначает производную по следующей за ней координате x ; толщины слоев $h_2 = h_4, h_3 = h_5 = c$.

Используя соотношения Коши [6], из перемещений (1) получим продольные деформации. После этого напряжения следуют из закона Гука:

$$s_{xx}^{(k)} = 2G_k \varepsilon_{xx}^{(k)}; \quad \sigma^{(k)} = 3K_k \varepsilon^{(k)}; \quad (2)$$

$$s_{xz}^{(3)} = 2G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)}; \quad s_{xz}^{(5)} = 2G_5 \varepsilon_{xz}^{(5)}, \quad (3)$$

где $s_{xx}^{(k)}, s_{xz}^{(3)}, s_{xz}^{(5)}$ — компоненты девиатора тензора напряжений; $\sigma^{(k)} = \frac{1}{3} \sigma_{xx}^{(k)}$ — среднее напряжение;

$\varepsilon_{xx}^{(k)}, \varepsilon_{xz}^{(3)}, \varepsilon_{xz}^{(5)}$ — девиатор тензора деформаций;

$\varepsilon^{(k)} = \frac{1}{3} \varepsilon_{xx}^{(k)}$ — средняя деформация; G_k, K_k — модули сдвига и объемного деформирования.

Для получения уравнений колебаний рассматриваемого стержня применим вариационный принцип Лагранжа:

$$\delta A = \delta W, \quad (4)$$

где δA — виртуальная работа внешней нагрузки, включая силы инерции $M_0 \ddot{w}$, δW — вариация работы внутренних усилий:

$$\delta A = \iint_S (q - M_0 \ddot{w}) \delta w dS = b_0 \int_0^l (q - M_0 \ddot{w}) \delta w dx; \quad (5)$$

$$\delta W = \iint_S \sum_{k=1}^5 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} \delta \varepsilon_x^{(k)} dz dS,$$

где $M_0 = 2\rho_1 h_1 + 2\rho_2 h_2 + 2\rho_3 c$; ρ_k — плотность материала k -го слоя.

Отметим, работа касательных напряжений в (5) не учитывается из-за их малости в легком заполнителе. После подстановки работ (5) в уравнение (4) и некоторых преобразований получим уравнения движения в перемещениях:

$$a_1 \psi_{,xx} - a_2 w_{,xxx} = 0; \quad (6)$$

$$a_2 \psi_{,xxx} - a_4 w_{,xxxx} - M_0 \ddot{w} = -q,$$

где a_i — коэффициенты:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2c^2 \left[\left(\frac{1}{3} K_2^+ c + K_3^+ h_2 \right) \right]; \\ a_2 &= K_2^+ h_2 c (h_2 + 2h_1 + 2c) + \frac{1}{3} K_3^+ c^2 (3h + 2c); \\ a_4 &= \frac{2}{3} \times \\ &\times \left[K_1^+ h_1^3 + K_2^+ h_2 (h_2^2 + 3(h_2 + h_1 + c)(h_1 + c)) + K_3^+ c (c^2 + 3h_1 c + 3h_1^2) \right]; \\ K_k &+ \frac{4}{3} G_k \equiv K_k^+. \end{aligned}$$

В начальный момент времени прогиб $w_0(x)$ стержня и его производная $\dot{w}_0(x)$ по времени (скорость) считаются заданными:

$$w(x, 0) = w_0(x); \quad \dot{w}(x, 0) = \dot{w}_0(x). \quad (7)$$

В качестве граничных условий принимаются условия жесткой заделки торцов стержня $x = 0; l$:

$$\begin{aligned} \psi(0, t) = w(0, t) = w_{,x}(0, t) = 0; \\ \psi(l, t) = w(l, t) = w_{,x}(l, t) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Собственные колебания. Соответствующая система дифференциальных уравнений следует из (6) при нагрузке $q = 0$. Проведя необходимые преобразования, получим отдельное уравнение для прогиба и выражение относительного сдвига через производную от прогиба:

$$\begin{aligned} \psi = \frac{a_2}{a_1} w_{,x} + C_5 x + C_6; \\ w_{,xxxx} - \frac{a_1 M_0}{a_2^2 - a_1 a_4} \dot{w} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Предполагается, что все частицы стержня колеблются синфазно. Поэтому прогиб стержня принимается как произведение искомой координатной функции $v(x)$ на гармоническую функцию времени:

$$w = v(x)[A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)], \quad (10)$$

где A, B — константы интегрирования, определяемые из начальных условий (7).

Поперечное ускорение:

$$\dot{w} = -v(x)\omega^2 [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]. \quad (11)$$

Подставим (10), (11) во второе уравнение системы (9) и вынесем функцию времени за скобки. Чтобы дифференциальное уравнение выполнялось в любой момент времени, нужно полученное выражение в скобках приравнять нулю. В результате получим дифференциальное уравнение для определения координатной функции $v(x)$:

$$v_{,xxxx} - \beta^4 v = 0, \quad (12)$$

где $\beta^4 = \frac{a_1 M_0 \omega^2}{a_4 a_1 - a_2^2}$, причем $a_4 a_1 - a_2^2 > 0$.

Следовательно, параметр β будет собственным числом дифференциального оператора четвертого порядка в (12), а $v(x)$ — его собственной функцией. Поэтому решение уравнения (12) следующее:

$$\begin{aligned} v(\beta x) = C_1 \operatorname{sh}(\beta x) + C_2 \operatorname{ch}(\beta x) + \\ + C_3 \sin(\beta x) + C_4 \cos(\beta x), \end{aligned} \quad (13)$$

где C_1, \dots, C_4 — константы интегрирования, определяемые из граничных условий.

Потребовав выполнение граничных условий $w(0, t) = 0, w_{,x}(0, t) = 0$ для прогиба (10) с учетом функции (13), получим $C_3 = -C_1, C_4 = -C_2$. Используя эти соотношения, из остальных граничных

условий имеем два алгебраических уравнения для определения C_1 и C_2 :

$$\begin{aligned} C_1 (\operatorname{sh}(\beta l) - \sin(\beta l)) + C_2 (\operatorname{ch}(\beta l) - \cos(\beta l)) = 0; \\ C_1 (\operatorname{ch}(\beta l) - \cos(\beta l)) + C_2 (\operatorname{sh}(\beta l) + \sin(\beta l)) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Чтобы однородная система алгебраических уравнений (14) имела ненулевое решение, необходимо чтобы ее определитель равнялся нулю. Выполнение этого требования позволяет получить трансцендентное уравнение для вычисления собственных чисел:

$$\operatorname{ch}(\beta l) \cos(\beta l) = 1. \quad (15)$$

Уравнению (15) будет удовлетворять счетное количество собственных чисел β_n ($n = 0, 1, 2, \dots$). Частоты собственных колебаний определяются по формуле, следующей из (12):

$$\omega_n^2 = \frac{\beta_n^4 (a_4 a_1 - a_2^2)}{a_1 M_0}. \quad (16)$$

Константы интегрирования C_{1n} и C_{2n} будут различаться для каждой собственной частоты ω_n . Их связь получим из первого уравнения (14):

$$C_{2n} = -C_{1n} S_n, \quad (17)$$

$$\text{где } S_n = \frac{\operatorname{sh}(\beta_n l) - \sin(\beta_n l)}{\operatorname{ch}(\beta_n l) - \cos(\beta_n l)}.$$

В общем случае для описания прогиба пяти-слойного стержня вводится система собственных ортонормированных функций $v_n \equiv v(\beta_n x)$:

$$\begin{aligned} v_n = \frac{1}{d_n} (\operatorname{sh}(\beta_n x) - \sin(\beta_n x) - \\ - S_n (\operatorname{ch}(\beta_n x) - \cos(\beta_n x))), \end{aligned} \quad (18)$$

где d_n — нормировочный коэффициент:

$$d_n^2 = \int_0^l (\operatorname{sh}(\beta_n x) - \sin(\beta_n x) - S_n (\operatorname{ch}(\beta_n x) - \cos(\beta_n x)))^2 dx.$$

В результате искомый прогиб определяется рядом

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)). \quad (19)$$

Для относительного сдвига выражение следует из первого уравнения системы (9). Входящие в него константы интегрирования $C_5 = C_6 = 0$, из граничных условий на торцах $\psi(0, t) = \psi(l, t) = 0$. В результате

$$\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)), \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) = \frac{a_2}{a_1} v_{,x} = \frac{a_2 \beta_n}{a_1 d_n} \times \\ \times (\operatorname{ch}(\beta_n x) - \cos(\beta_n x) - S_n (\operatorname{sh}(\beta_n x) + \sin(\beta_n x))). \end{aligned}$$

Используя ортонормированность собственных функций (18), из начальных условий (7) получим константы интегрирования A_n, B_n :

$$A_n = \int_0^l w_0(x) v_n dx; \quad B_n = \frac{1}{\omega_n} \int_0^l \dot{w}_0(x) v_n dx. \quad (21)$$

Для пятислойного стержня, набранного из базовых материалов Д16-Т – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 – Д16-Т, получены первые 14 собственных чисел β_n и соответствующие им частоты колебаний ω_n ($l = 1$). Они вычислены по формуле (16) и приведены в таблице. Упругие характеристики этих и других используемых материалов в МПа: Д16-Т — $K = 0,9214 \cdot 10^5$, $G = 0,2671 \cdot 10^5$; фторопласт-4 — $K = 4700$, $G = 90$. Толщины слоев, отнесенные к длине стержня, $h_1 = 0,01$; $h_2 = 0,01$, $c = 0,05$. Собственные числа распределены на отрезке $[0, 50]$ достаточно равномерно.

На рисунке 2 показана зависимость первых трех частот основного тона рассматриваемого базового стержня от толщины центрального слоя h (см. рисунок 2 а) и заполнителя c (см. рисунок 2 б). С ростом толщины центрального несущего слоя частоты нелинейно возрастают за счет увеличения жесткости стержня. При увеличении толщины жестких заполнителей частоты уменьшаются за счет роста общей массы стержня.

Собственные колебания за счет начального прогиба. Пусть начальные прогиб и скорость стержня заданы:

$$w_0(x) = x^2 - xl; \quad \dot{w}_0(x) = 0. \quad (22)$$

Тогда, в соответствии с (21), константы интегрирования будут

$$A_n = \frac{1}{d_n} \int_0^l (x^2 - xl) \times \\ \times (sh(\beta_n x) - \sin(\beta_n x) - S_n (ch(\beta_n x) - \cos(\beta_n x))) dx; \\ B_n = 0.$$

Таблица — Собственные числа и частоты пятислойного стержня
Table — Eigenvalues and frequencies of the five-layer rod

Номер n	β_n	ω_n, c^{-1}
0	4,730	447,7
1	7,853	1233,9
2	10,995	2419,1
3	14,137	3998,9
4	17,279	5973,6
5	20,420	8343,3
6	23,562	11 107,9
7	26,704	14 267,6
8	29,845	17 822,2
9	32,987	21 771,7
10	36,128	26 116,1
11	42,412	35 989,9
12	45,553	41 519,2
13	48,695	41 519,2

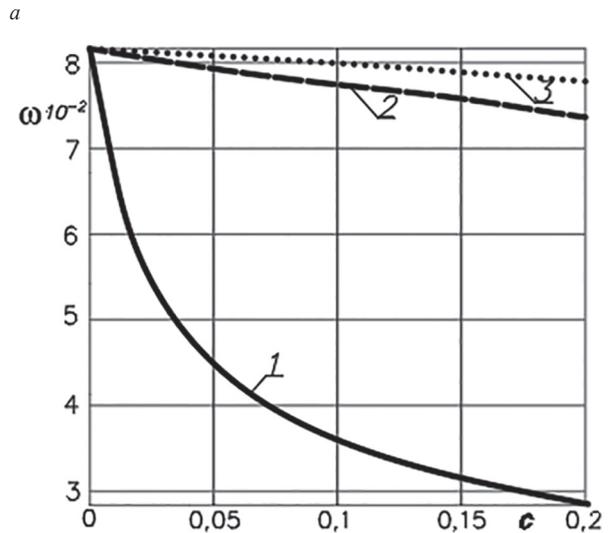
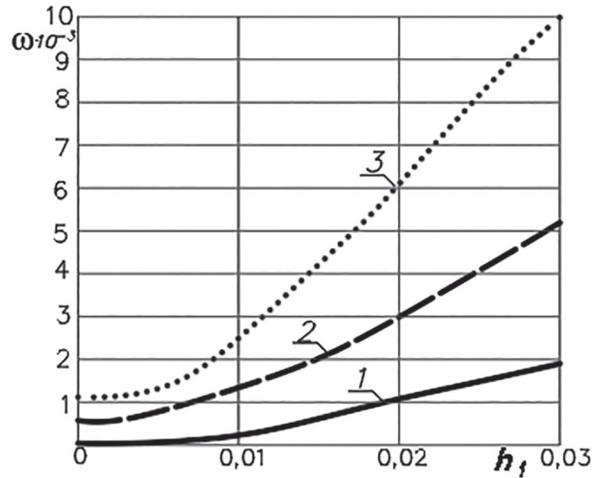


Рисунок 2 — Зависимость частот ω_n от толщины: а — слоя h_1 ; б — заполнителей c ; 1 — ω_0 ; 2 — ω_1 ; 3 — ω_2
Figure 2 — Dependence of frequencies ω_n on thickness of: а — layer h_1 ; б — fillers c ; 1 — ω_0 ; 2 — ω_1 ; 3 — ω_2

Вычислим интегралы, входящие в выражение для A_n . Интегралы, образованные произведением координаты x на гиперболические и тригонометрические функции, имеют вид:

$$I_{n1} = \int_0^l x sh(\beta_n x) dx = \frac{l}{\beta_n} \left(l ch(\beta_n l) - \frac{sh(\beta_n l)}{\beta_n} \right); \\ I_{n2} = \int_0^l x ch(\beta_n x) dx = \frac{l}{\beta_n} \left(l sh(\beta_n l) - \frac{ch(\beta_n l)}{\beta_n} \right); \\ I_{n3} = \int_0^l x \sin(\beta_n x) dx = -\frac{l}{\beta_n} \left(l \cos(\beta_n l) - \frac{\sin(\beta_n l)}{\beta_n} \right); \\ I_{n4} = \int_0^l x \cos(\beta_n x) dx = \frac{l}{\beta_n} \left(l \sin(\beta_n l) + \frac{\cos(\beta_n l)}{\beta_n} \right). \quad (23)$$

Интегралы, образованные произведением x^2 на указанные функции, получим, используя (23):

$$I_{n5} = \int_0^l x^2 sh(\beta_n x) dx = \frac{1}{\beta_n} \left(l^2 (ch(\beta_n l)) - 2I_{n2} \right);$$

$$I_{n6} = \int_0^l x^2 \operatorname{ch}(\beta_n x) dx = \frac{1}{\beta_n} (l^2 (\operatorname{sh}(\beta_n l)) - 2I_{n1});$$

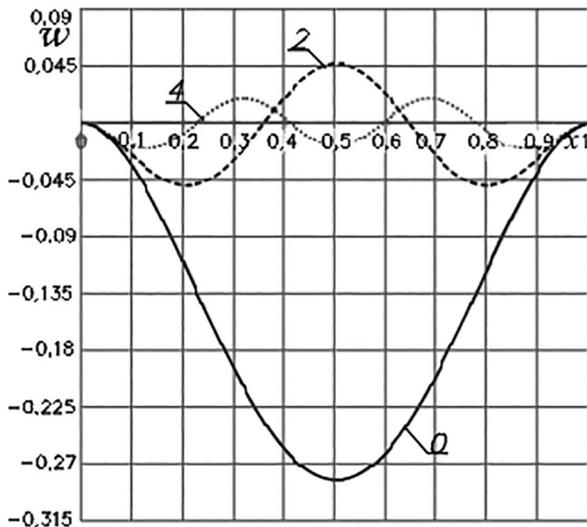
$$I_{n7} = \int_0^l x^2 \sin(\beta_n x) dx = -\frac{1}{\beta_n} (l^2 (\cos(\beta_n l)) - 2I_{n4});$$

$$I_{n8} = \int_0^l x^2 \cos(\beta_n x) dx = \frac{1}{\beta_n} (l^2 (\sin(\beta_n l)) + 2I_{n3}).$$

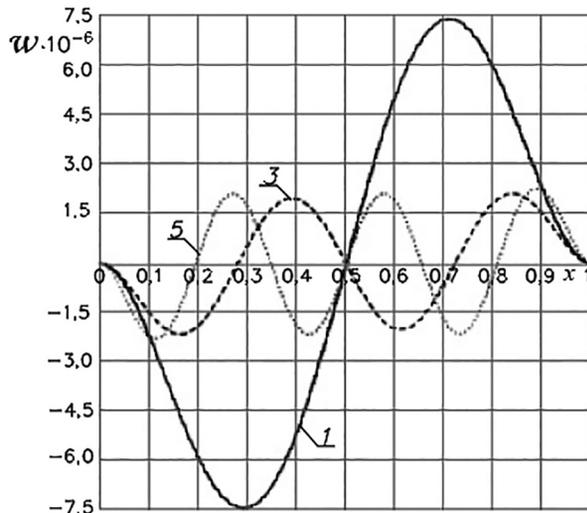
В результате константа интегрирования при начальном прогибе (22) с учетом интегралов (23), (24) равна:

$$A_n = \frac{1}{d_n} [I_{n5} - I_{n7} - S_n(I_{n6} - I_{n8}) - (I_{n1} - I_{n3} - S_n(I_{n2} - I_{n4}))].$$

Следовательно, прогиб и относительный сдвиг в исследуемом пятислойном стержне при начальном прогибе (22) вычисляются из (19), (20) с учетом (25):



a



b

Рисунок 3 — Прогиб: a — четные моды; b — нечетные
Figure 3 — Deflection: a — even modes; b — odd modes

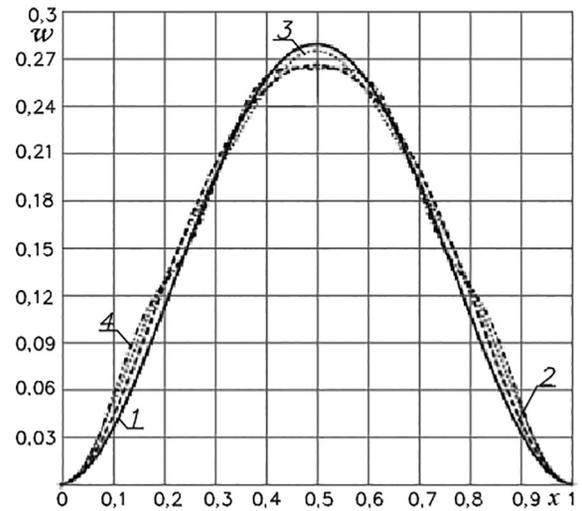


Рисунок 4 — Прогиб в момент $t = \pi / \omega_0$ в зависимости от количества суммируемых членов ряда N : 1 — $N = 1$ ($n = 0$); 2 — $N = 3$ ($n = 0, \dots, 2$); 3 — $N = 5$ ($n = 0, \dots, 4$); 4 — $N = 11$ ($n = 0, \dots, 10$)
Figure 4 — Deflection at the moment $t = \pi / \omega_0$ depending on the number of summarized members of the series N : 1 — $N = 1$ ($n = 0$); 2 — $N = 3$ ($n = 0, \dots, 2$); 3 — $N = 5$ ($n = 0, \dots, 4$); 4 — $N = 11$ ($n = 0, \dots, 10$)

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n v_n \cos(\omega_n t);$$

$$\psi(x, t) = \frac{a_2}{a_1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \varphi_n \cos(\omega_n t).$$

Таким образом, колебания рассматриваемого пятислойного стержня, вызванные начальным прогибом, описываются суперпозицией бесконечного счетного количества мод (26) — прогибов, соответствующих определенной собственной частоте.

На рисунке 3 показаны четные и нечетные моды колебаний. Нумерация кривых соответствует номеру собственной частоты. Моменты времени для каждой составляющей выбраны так, чтобы функция времени была максимальной, т. е. $\cos(\omega_n t) = 1$. Результаты показывают, что четные моды на пять порядков больше нечетных, причем мода, соответствующая ω_0 , резко превалирует над остальными.

Сходимость ряда (28) иллюстрирует рисунок 4. На нем показан прогиб в момент $t = \pi / \omega_0$ в зависимости от количества суммируемых членов ряда N . Дальнейшее увеличение количества членов ряда практически не влияет на величину и форму прогиба.

Следовательно, при вычислении величины перемещений точек рассматриваемого пятислойного стержня достаточно использовать первые десять членов ряда.

Выводы. Предложенная механико-математическая модель пятислойных, симметричных по толщине стержней позволяет исследовать их собственные частоты и моды колебаний. Численные результаты позволили оценить количество членов ряда при вычислении перемещений.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-2025».

Список литературы

- Reddy, J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis / J.N. Reddy. — 2nd ed. — Boca Raton: CRC Press, 2003. — 858 p. — DOI: <https://doi.org/10.1201/b12409>.
- Carrera, E. Thermal stress analysis of composite beams, plates and shells: computational modelling and applications / E. Carrera, F.A. Fazzolari, M. Cinefra. — Academic Press, 2016. — 440 p.
- Aghalovyan, L. Asymptotic theory of anisotropic plates and shells / L. Aghalovyan, D. Prikazchikov. — Singapore: World Scientific Publishing Co., 2015. — 360 p.
- Яровая, А.В. Строительная механика. Статика стержневых систем / А.В. Яровая. — Гомель: БелГУТ, 2013. — 447 с.
- Горшков, А.Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. — М.: Физматлит, 2005. — 576 с.
- Журавков, М.А. Математические модели механики твердых тел / М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов. — Минск: БГУ, 2021. — 535 с.
- Zhuravkov, M. Mechanics of solid deformable body / M. Zhuravkov, Y. Lyu, E. Starovoitov. — Singapore: Springer Verlag, 2023. — 317 p. — DOI: <https://doi.org/10.1007/978-981-19-8410-5>.
- Абдусаттаров, А. Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях / А. Абдусаттаров, Э.И. Старовойтов, Н.Б. Рузиева. — Ташкент: Ташкентский гос. транспортный ун-т, 2023. — 381 с.
- Деформирование трехслойных пластин при термосиловых нагрузках / Э.И. Старовойтов, Ю.В. Шафиева, А.В. Нестерович, А.Г. Козел. — Гомель: БелГУТ, 2024. — 395 с.
- Deformation of three-layer structural elements in thermal radiation fields / E.I. Starovoitov, M.A. Zhuravkov, D.V. Leonenko, Y. Lyu. — Singapore: Springer Singapore, 2024. — 384 p. — DOI: <https://doi.org/10.1007/978-981-97-7217-9>.
- Mikhasev, G.I. Free vibrations of elastic laminated beams, plates and cylindrical shells / G.I. Mikhasev, H. Altenbach // Thin-walled laminated structures / G.I. Mikhasev, H. Altenbach. — Cham: Springer, 2019. — Pp. 157–198. — DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-12761-9_4.
- Плескачевский, Ю.В. Собственные колебания круговой сэндвич-пластины в температурном поле / Ю.В. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. — 2024. — № 4(69). — С. 70–77. — DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2024-4-69-70-77>.
- Лачугина, Е.А. Поперечные колебания пятислойной упругой круговой пластины с жестким наполнителем / Е.А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. — 2022. — № 15. — С. 116–122.
- Лачугина, Е.А. Свободные колебания пятислойной круговой пластины с легкими наполнителями / Е.А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. — 2023. — № 16. — С. 111–116.
- Будникова, Д.А. Уравнения собственных колебаний пятислойного упругого стержня / Д.А. Будникова // Проблемы безопасности на транспорте: материалы XIII Междунар. науч.-практ. конф., Гомель, 21–22 нояб. 2024 г. — Гомель: БелГУТ, 2024. — Ч. 2. — С. 121–123.
- Старовойтов, Э.И. Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2015. — Т. 21, № 2. — С. 162–169.
- Bakulin, V.N. Parametric resonance of a three-layered cylindrical composite rib-stiffened shell / V.N. Bakulin, D.A. Boitsova, A.Ya. Nedbai // Mechanics of Composite Materials. — 2021. — Vol. 57, iss. 5. — P. 623–634. — DOI: <https://doi.org/10.1007/s11029-021-09984-9>.
- Leonenko, D.V. Vibrations of cylindrical sandwich shells with elastic core under local loads / D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // International Applied Mechanics. — 2016. — Vol. 52, iss. 4. — P. 359–367. — DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-016-0760-8>.
- Tarlovskii, D.V. Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells / D.V. Tarlovskii, G.V. Fedotenkov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. — 2014. — Vol. 43, iss. 2. — P. 145–152. — DOI: <https://doi.org/10.3103/S1052618814010178>.
- Fedotenkov, G.V. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam / G.V. Fedotenkov, D.V. Tarlovskiy, Y.A. Vahterova // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2019. — Vol. 40, iss. 4. — P. 439–447. — DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080219040061>.
- Вестяк, В.А. Распространение нестационарных объемных возмущений в упругой полуплоскости / В.А. Вестяк, А.С. Садков, Д.В. Тарлаковский // Изв. РАН. Механика твердого тела. — 2011. — Т. 46, № 2. — С. 130–140.
- Paimushin, V.N. Static and monoharmonic acoustic impact on a laminated plate / V.N. Paimushin, R.K. Gazizullin // Mechanics of Composite Materials. — 2017. — Vol. 53, iss. 3. — P. 283–304. — DOI: <https://doi.org/10.1007/s11029-017-9662-z>.
- Grover, N. An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates / N. Grover, B.N. Singh, D.K. Maiti // Aerospace Science and Technology. — 2016. — Vol. 52. — Pp. 41–51. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ast.2016.02.017>.
- Леоненко, Д.В. Колебания круговой трехслойной ступенчатой пластины при ударном периодическом воздействии / Д.В. Леоненко, М.В. Маркова // Механика машин, механизмов и материалов. — 2022. — № 3(60). — С. 68–76. — DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2022-3-60-68-76>.
- Леоненко, Д.В. Колебания круговой трехслойной пластины под действием внешней нагрузки / Д.В. Леоненко, М.В. Маркова // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. — 2023. — № 1. — С. 49–63. — DOI: <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-1-49-63>.
- Pradhan, M. Static and dynamic stability analysis of an asymmetric sandwich beam resting on a variable Pasternak foundation subjected to thermal gradient / M. Pradhan, P.R. Dash, P.K. Pradhan // Meccanica. — 2016. — Vol. 51, iss. 3. — P. 725–739. — DOI: <https://doi.org/10.1007/s11012-015-0229-6>.
- Леоненко, Д.В. Колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании Пастернака / Д.В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. — 2014. — Т. 11, № 1. — С. 59–63.
- Агеев, Р.В. Колебания стенок щелевого канала с вязкой жидкостью, образованного трехслойным и твердым дисками / Р.В. Агеев, Л.И. Могилевич, В.С. Попов // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 2014. — № 1. — С. 3–11.
- Bending oscillations of a cylinder, surrounded by an elastic medium and containing a viscous liquid and an oscillator / L.I. Mogilevich, V.S. Popov, D.V. Kondratov, L.N. Rabiniskiy // Journal of Vibroengineering. — 2017. — Vol. 19, iss. 8. — P. 5758–5766. — DOI: <https://doi.org/10.21595/jve.2017.18179>.
- Трацевская, Е.Ю. Динамическая неустойчивость квазистропных моренных грунтов / Е.Ю. Трацевская // Литосфера. — 2017. — № 1(46). — С. 107–112.
- Трацевская, Е.Ю. Демпфирующие свойства слабосвязных трехфазных грунтов / Е.Ю. Трацевская // Литосфера. — 2019. — № 2(51). — С. 115–121.
- Бабайцев, А.В. Развитие дефектов в многослойных композициях при статических нагрузках / А.В. Бабайцев, М.Ю. Калягин, Л.Н. Рабинский // Российские инженерные исследования. — 2024. — № 1(44). — С. 112–115.
- Старовойтов, Э.И. Изгиб упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака / Э.И. Старовойтов, А.Г. Козел // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2018. — Т. 24, № 3. — С. 392–406.
- Козел, А.Г. Сравнение решений задач изгиба трехслойных пластин на основаниях Винклера и Пастернака / А.Г. Козел // Механика машин, механизмов и материалов. — 2021. — № 1(54). — С. 30–37. — DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2021-1-54-30-37>.
- Деформирование круговой трехслойной пластины на упругом основании / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. — 2005. — Т. 2, № 1. — С. 16–19.
- Старовойтов, Э.И. Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, М. Сулейман // Экологический вестник

- научных центров Черноморского экономического сотрудничества. — 2006. — Т. 3, № 4. — С. 55–62.
37. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойного стержня в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. — 2013. — № 1(22). — С. 31–35.
38. Захарчук, Ю.В. Напряженно-деформированное состояние круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. — 2019. — Вып. 12. — С. 66–75.
39. Нестерович, А.В. Осесимметричное нагружение круглой физически нелинейной трехслойной пластины в своей плоскости / А.В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. — 2021. — № 3(48). — С. 24–29. — DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_3_48_24.

STAROVOITOV Eduard I., D. Sc. in Phys. and Math., Prof.

Professor of the Department “Structural Mechanics, Geotechnical and Structural Engineering”¹

E-mail: edstar0@yandex.by

BUDNIKOVA Darya A.

Graduate Student of the Department “Structural Mechanics, Geotechnical and Structural Engineering”¹

E-mail: d_oshik@mail.ru

¹Belarusian State University of Transport, Gomel, Republic of Belarus

Received February 21, 2025.

NATURAL OSCILLATIONS OF THE FIVE-LAYER ROD CAUSED BY THE INITIAL DEFLECTION

The problem of natural oscillations of a five-layer rod symmetrical in thickness, resulting from the initial deflection, is considered. The three load-bearing layers are assumed to be thin and high-strength. Bernoulli's hypotheses are accepted for them. In two relatively thick, light fillers, the Timoshenko hypothesis is fulfilled, i. e. a displacement in the filler is taken into account. The system of differential equations of natural oscillations is obtained by the variational method, taking into account the transverse inertia forces. For the rod that is symmetrical in thickness, the system is reduced to two partial differential equations with respect to deflection and relative displacement in the fillers. The analytical solution of the corresponding initial boundary value problem is obtained by decomposing the desired displacements into a series according to the constructed system of eigenfunctions. An algebraic equation for determining eigenvalues is given. Graphs of the dependence of the first three frequencies on the thickness of the central bearing layer and fillers are presented. An example of the occurrence of natural oscillations due to the initial deflection is considered. A numerical analysis of the obtained solutions is carried out.

Keywords: symmetrical five-layer rod, initial deflection, analytical solution, eigenvalues and frequencies, numerical results

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2025-2-71-70-77>

References

1. Reddy J.N. *Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis*. Boca Raton, CRC Press, 2003. 858 p. DOI: <https://doi.org/10.1201/b12409>.
2. Carrera E., Fazzolari F.A., Cinefra M. *Thermal stress analysis of composite beams, plates and shells: computational modeling and applications*. Academic Press, 2016. 440 p.
3. Aghalovyan L., Prikazchikov D. *Asymptotic theory of anisotropic plates and shells*. Singapore, World Scientific Publishing Co., 2015. 360 p.
4. Yarovaya, A.V. *Stroitel'naya mekhanika. Statika stержnevnykh sistem* [Construction mechanics. Statics of rod systems]. Gomel, Belorusskiy gosudarstvennyy universitet transporta Publ., 2013. 447 p. (in Russ.).
5. Gorshkov A.G., Starovoitov E.I., Yarovaya A.V. *Mekhanika sloistykh vyzkouprugoplasticheskikh elementov konstruktivnykh* [Mechanics of layered viscoelastic-plastic structural elements]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005. 576 p. (in Russ.).
6. Zhuravkov M.A., Starovoitov E.I. *Matematicheskie modeli mekhaniki tverdykh tel* [Mathematical models of solid mechanics]. Minsk, Belorusskiy gosudarstvennyy universitet Publ., 2021. 535 p. (in Russ.).
7. Zhuravkov M., Lyu Y., Starovoitov E. *Mechanics of solid deformable body*. Singapore, Springer Verlag, 2023. 317 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-981-19-8410-5>.
8. Abdusattarov A., Starovoitov E.I., Ruzieva N.B. *Deformirovanie i povrezhdaemost uprugoplasticheskikh elementov konstruktivnykh pri tsiklicheskikh nagruzeniyakh* [Deformation and damage of elastic-plastic structural elements under cyclic loads]. Tashkent, Tashkentskiy gosudarstvennyy transportnyy universitet Publ., 2023. 381 p. (in Russ.).
9. Starovoitov E.I., Shafieva Yu.V., Nesterovich A.V., Kozel A.G. *Deformirovanie trekhslonnykh plastin pri termosilovykh nagruzkakh* [Deformation of three-layer plates under thermal force loads]. Gomel, Belorusskiy gosudarstvennyy universitet transporta Publ., 2024. 395 p. (in Russ.).
10. Starovoitov E.I., Zhuravkov M.A., Leonenko D.V., Lyu Y. *Deformation of three-layer structural elements in thermal radiation fields*. Singapore, Springer Singapore, 2024. 384 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-981-97-7217-9>.

11. Mikhasev G.I., Altenbach H. Free vibrations of elastic laminated beams, plates and cylindrical shells. *Thin-walled laminated structures*, 2019, pp. 157–198. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-12761-9_4.
12. Pleskachevsky Yu.V., Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Sobstvennyye kolebaniya krugovoy sendvich-plastiny v temperaturnom pole [Natural oscillations of circular sandwich plates in the temperature field]. *Mechanics of machines, mechanisms and materials*, 2024, no. 4(69), pp. 70–77. DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2024-4-69-70-77> (in Russ.).
13. Lachugina E.A. Poperechnyye kolebaniya pyatisloynoy uprugoy krugovoy plastiny s zhestkimi zapolnitelyami [Transverse vibrations of the five-layer elastic circular plate with rigid fillers]. *Mechanics. Researches and innovations*, 2022, iss. 15, pp. 116–122 (in Russ.).
14. Lachugina E.A. Svobodnyye kolebaniya pyatisloynoy krugovoy plastiny s legkimi zapolnitelyami [Free vibrations of a five-layer circular plate with lightweight fillers]. *Mechanics. Researches and innovations*, 2023, iss. 16, pp. 111–116 (in Russ.).
15. Budnikova D.A. Uravneniya sobstvennykh kolebaniy pyatisloynogo uprugogo sterzhnya [Equations of natural vibrations of a five-layer elastic rod]. *Materialy 13 Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii "Problemy bezopasnosti na transporte"* [Proc. 13th international scientific and practical conference "Transport safety issues"]. Gomel, 2024, part 2, pp. 121–123 (in Russ.).
16. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Issledovanie spektra chastot trekhsloynoy tsilindricheskoy obolochki s uprugim napolnitel'm [Investigation of the frequency spectrum of a three-layered cylindrical shell with an elastic filler]. *Mechanics of composite materials and structures*, 2015, vol. 21, no. 2, pp. 162–169 (in Russ.).
17. Bakulin V.N., Boitsova D.A., Nedbai A.Ya. Parametric resonance of a three-layered cylindrical composite rib-stiffened shell. *Mechanics of composite materials*, 2021, vol. 57, iss. 5, pp. 623–634. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11029-021-09984-9>.
18. Leonenko D.V., Starovoitov E.I. Vibrations of cylindrical sandwich shells with elastic core under local loads. *International applied mechanics*, 2016, vol. 52, iss. 4, pp. 359–367. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-016-0760-8>.
19. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Two-dimensional non-stationary contact of elastic cylindrical or spherical shells. *Journal of machinery manufacture and reliability*, 2014, vol. 43, iss. 2, pp. 145–152. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1052618814010178>.
20. Fedotenkov G.V., Tarlakovsky D.V., Vahterova Y.A. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam. *Lo-bachevskii journal of mathematics*, 2019, vol. 40, iss. 4, pp. 439–447. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080219040061>.
21. Vestiyak V.A., Sadkov A.S., Tarlakovskiy D.V. Rasprostraneniye nestatsionarnykh obemnykh vozmushcheniy v uprugoy populuskosti [Propagation of nonstationary volumetric perturbations in an elastic half-plane]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*, 2011, vol. 46, no. 2, pp. 130–140 (in Russ.).
22. Paimushin V.N., Gazizullin R.K. Static and monoharmonic acoustic impact on a laminated plate. *Mechanics of composite materials*, 2017, vol. 53, iss. 3, pp. 283–304. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11029-017-9662-z>.
23. Grover N., Singh B.N., Maiti D.K. An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates. *Aerospace science and technology*, 2016, vol. 52, pp. 41–51. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ast.2016.02.017>.
24. Leonenko D.V., Markova M.V. Kolebaniya krugovoy trekhsloynoy stupenchatoy plastiny pri udarnom periodicheskom vozdeystvii [Vibrations of a three-layer circular step plate under periodic impact]. *Mechanics of machines, mechanisms and materials*, 2022, no. 3(60), pp. 68–76. DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2022-3-60-68-76> (in Russ.).
25. Leonenko D.V., Markova M.V. Kolebaniya krugovoy trekhsloynoy plastiny pod deystviem vneshney nagruzki [Oscillations of a circular three-layer plate under external linear in time load]. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and informatics*, 2023, no. 1, pp. 49–63. DOI: <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-1-49-63> (in Russ.).
26. Pradhan M., Dash P.R., Pradhan P.K. Static and dynamic stability analysis of an asymmetric sandwich beam resting on a variable Pasternak foundation subjected to thermal gradient. *Meccanica*, 2016, vol. 51, iss. 3, pp. 725–739. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11012-015-0229-6>.
27. Leonenko D.V. Kolebaniya krugovoykh trekhsloynoykh plastin na uprugom osnovanii Pasternaka [Vibrations of circular three-layer plates on Pasternak elastic foundation]. *Ecological bulletin of research centers of the Black Sea economic cooperation*, 2014, vol. 11, no. 1, pp. 59–63 (in Russ.).
28. Ageev R.V., Mogilevich L.I., Popov V.S. Kolebaniya stenok shchelevogo kanala s vyzkoj zhidkostyu, obrazovannogo trekhsloynym i tverdyim diskami [Vibrations of the walls of a slit channel with a viscous liquid formed by three-layer and solid disks]. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*, 2014, no. 1, pp. 3–11 (in Russ.).
29. Mogilevich L.I., Popov V.S., Kondratov D.V., Rabinskiy L.N. Bending oscillations of a cylinder, surrounded by an elastic medium and containing a viscous liquid and an oscillator. *Journal of vibroengineering*, 2017, vol. 19, iss. 8, pp. 5758–5766. DOI: <https://doi.org/10.21595/jve.2017.18179>.
30. Tratsevskaya E.Yu. Dinamicheskaya neustoychivost kvazitiksotropnykh morennykh gruntov [Dynamic instability of quasi-thixotropic moraine soils]. *Litosfera*, 2017, no. 1(46), pp. 107–112 (in Russ.).
31. Tratsevskaya E.Yu. Dempfiruyushchie svoystva slabosvyaznykh trekhfaznykh gruntov [Damping properties of loosely coupled three-phase soils]. *Litosfera*, 2019, no. 2(51), pp. 115–121 (in Russ.).
32. Babaytsev A.V., Kalyagin M.Yu., Rabinskiy L.N. Razvitiye defektov v mnogoslownykh kompozitakh pri staticheskikh nagruzkakh [The development of defects in multilayer composites under static loads]. *Rossiyskie inzhenernye issledovaniya*, 2024, no. 1(44), pp. 112–115 (in Russ.).
33. Starovoitov E.I., Kozel A.G. Izgib uprugoy krugovoy trekhsloynoy plastiny na osnovanii Pasternaka [The bending of an elastic circular sandwich plate on the Pasternak foundation]. *Mechanics of composite materials and structures*, 2018, vol. 24, no. 3, pp. 392–406 (in Russ.).
34. Kozel A.G. Sravneniye resheniy zadach izgiba trekhsloynoykh plastin na osnovaniyakh Vinklera i Pasternaka [Comparison of solutions to the bending problems of three-layer plates on the Winkler and Pasternak foundations]. *Mechanics of machines, mechanisms and materials*, 2021, no. 1(54), pp. 30–37. DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2021-1-54-30-37> (in Russ.).
35. Gorshkov A.G., Starovoitov E.I., Yarovaya A.V., Leonenko D.V. Deformirovaniye krugovoy trekhsloynoy plastiny na uprugom osnovanii [Strain of a circle sandwich plate on elastic foundation]. *Ecological bulletin of research centers of the Black Sea economic cooperation*, 2005, vol. 2, no. 1, pp. 16–19 (in Russ.).
36. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Suleyman M. Termouprugiy izgib koltsevoy trekhsloynoy plastiny na uprugom osnovanii [Thermoelastic bending of a ring sandwich plate on the elastic foundation]. *Ecological bulletin of research centers of the Black Sea economic cooperation*, 2006, vol. 3, no. 4, pp. 55–62 (in Russ.).
37. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Deformirovaniye trekhsloynogo sterzhnya v temperaturnom pole [Deformation of three-layer beam in a temperature field]. *Mechanics of machines, mechanisms and materials*, 2013, no. 1(22), pp. 31–35 (in Russ.).
38. Zakharchuk Yu.V. Napryazhenno-deformirovannoye sostoyaniye krugovoy trekhsloynoy plastiny so szhimaemym zapolnitel'm [Stress-strain state of a circular three layer plate with a compressible filler]. *Mechanics. Researches and innovations*, 2019, iss. 12, pp. 66–75 (in Russ.).
39. Nestsiarovich A.V. Osesimmetrichnoye nagruzheniye krugloy fizicheskoy nelineynoy trekhsloynoy plastiny v svoey ploskosti [Axisymmetric loading of a circular physically nonlinear three-layer plate in its plane]. *Problems of physics, mathematics and technics*, 2021, no. 3(48), pp. 24–29. DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_3_48_24 (in Russ.).