

# МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.4

А.П. ЯНКОВСКИЙ, д-р физ.-мат. наук  
ведущий научный сотрудник лаборатории физики быстропротекающих процессов  
E-mail: yankovsky\_ap@itam.nsc.ru

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск,  
Российская Федерация

Поступила в редакцию 05.12.2024.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗГИБНОГО НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ВЯЗКОУПРУГО-ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПОЛОГИХ АРМИРОВАННЫХ ОБОЛОЧЕК. ЧАСТЬ 2. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ

*Выполнены расчеты и проведен анализ их результатов для случаев изо- и неизотермического вязкоупруго-вязкопластического и вязкоупругопластического изгибного деформирования цилиндрических панелей из стеклопластика, имеющих прямоугольную удлиненную форму в плане. Сравниваются пологие оболочки с традиционной 2D-структурой армирования и с пространственной 4D-структурой при одинаковом расходе волокон. Стеклопластиковые конструкции жестко закреплены по всей кромке и фронтально нагружаются избыточным кратковременным давлением высокой интенсивности со стороны вогнутой или выпуклой лицевой поверхности. Продемонстрировано, что в процессе осцилляций при отсутствии внешних источников тепла немеханического происхождения температура достигает таких пиковых значений, которые всего на 8–17 °С больше температуры естественного состояния композитной панели. Стабилизированные максимальные значения температуры (после затухания осцилляций конструкции) всего на 3–10 °С превосходят температуру естественного состояния. Пологие оболочки с 4D-структурой армирования нагреваются несколько больше, чем конструкции с 2D-структурой. Показано, что, несмотря на столь незначительный нагрев, расчет неупругой динамики таких панелей обязательно нужно проводить, учитывая не только чувствительность пластических свойств их компонентов композиции к скорости деформирования, но и температурный отклик. Продемонстрировано, что при динамическом нагружении искривленной панели со стороны любой из лицевых поверхностей в процессе осцилляций она прощелкивает в сторону вогнутости. В результате чего после затухания колебаний удлиненная цилиндрическая стеклопластиковая панель приобретает гофрированную форму со складками, ориентированными в продольном направлении. Показано, что в относительно тонкой полой оболочке замена 2D-структуры армирования на пространственную 4D-структуру является неэффективной.*

**Ключевые слова:** пологие оболочки, искривленные панели, связанная термомеханическая задача, армирование, вязкоупруго-вязкопластичность, неупругая динамика, остаточное состояние, численное решение

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2025-3-72-74-81>

**Введение.** В настоящей работе продолжается исследование, опубликованное в [1], где была сформулирована связанная задача неизотермиче-

ского вязкоупруго-вязкопластического динамического поведения гибких армированных оболочек и разработан явный метод ее численного интегри-

рования. Там же был приведен обзор публикаций по проблеме моделирования неупругого деформирования композитных материалов (КМ) и конструкций из них. В данной же статье представлен анализ результатов расчетов динамики стеклопластиковых цилиндрических искривленных панелей с разными структурами армирования, испытывающих фронтальное высокоинтенсивное кратковременное нагружение.

**Обсуждение результатов расчетов.** Рассматривается неупругое динамическое поведение цилиндрической удлиненной КМ-панели ( $1/R_1 \equiv 0$ ,  $R_2 \equiv R = \text{const}$ ), имеющей толщину  $2h = 2$  см и занимающей в плане прямоугольную область  $\Omega$ :  $|x_1| \leq a$ ,  $|x_2| \leq b$ ,  $a = 3b$ ,  $b = 50$  см ( $h/b = 1/50$ ). Стрела подъема конструкции  $f$  над продольными кромками  $x_2 = \pm b$  равна 10 см. Радиус ее кривизны  $R$  при этом определяется так [2]:  $R = (b_2 + f_2)/2f$ . На кромках полая оболочка жестко закреплена, т. е.  $w = 0$ ,  $u_i = 0$  и  $\gamma_i = 0$  при  $x \in \Gamma$  и  $t \geq t_0$  (см. [1]: (1), (9) и (10)). До начального момента времени  $t = t_0 = 0$  конструкция покоится ( $w = 0$ ,  $u_i = 0$  и  $\gamma_i = 0$  при  $x \in \Omega$ ,  $t \leq t_0$  и  $i = 1, 2$ ) в условиях естественного состояния при температуре  $\Theta = \Theta^0 = 20$  °С ( $x \in \Omega$ ,  $|x_3| \leq h$  и  $t \leq t_0$ ). При  $t = t_0 = 0$  КМ-панель динамически нагружается снизу или сверху давлением  $p(t)$ , соответствующим приходу воздушной взрывной волны [3]:

$$p(t) = \begin{cases} p_{\max} t / t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max}, \\ p_{\max} \exp[-\beta(t - t_{\max})], & t > t_{\max}; \end{cases}$$

$$\sigma_{33}^{(-)}(t) = \begin{cases} -p(t), & p_{\max} > 0, \\ 0, & p_{\max} < 0; \end{cases} \quad (1)$$

$$\sigma_{33}^{(+)}(t) = \begin{cases} 0, & p_{\max} > 0, \\ p(t), & p_{\max} < 0, \end{cases}$$

где

$$\beta = -\ln(0,01) / (t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max}; \quad (2)$$

$t_{\max}$  — время, при котором  $|p(t)|$  достигает максимального значения  $|p_{\max}|$ ;  $t_{\min}$  — время, при превышении которого можно не учитывать  $|p(t)|$  по сравнению с  $|p_{\max}|$  (в частности, равенство (2) получено при условии  $p(t_{\min}) = 0,01p_{\max}$ ). Согласно выражениям (1), при  $p_{\max} > 0$  полая оболочка подвергается нагружению со стороны нижней (вогнутой), а при  $p_{\max} < 0$  — со стороны верхней (выпуклой) лицевой поверхности. Используя данные экспериментов [3], в расчетах зададим  $t_{\max} = 0,1$  мс,  $t_{\min} = 2$  мс и  $|p_{\max}| = 6$  МПа.

С окружающей средой, имеющей температуру  $\Theta_{\infty}^{(\pm)} = \Theta^0$  (см. соотношения (13)), теплообмен КМ-панели через ее лицевые поверхности  $x_3 = \pm h$  осуществляется в условиях естественной конвекции:  $q_{\infty}^{(\pm)} \equiv 0$  и  $\alpha(\pm) = 30$  Вт/(м<sup>2</sup>·К) [4].

Конструкция изготовлена из эпоксидной смолы [5] и усилена стекловолокнами [6]. Пластическое деформирование компонентов композиции при постоянстве температуры  $\Theta$  и скорости их деформации  $\dot{\epsilon}$  в условиях активного нагружения описывается соотношением [7]:

$$\sigma = \text{sign}(\epsilon_p) \sigma_s^{(k)} + E_s^{(k)} \epsilon_p, \quad 0 \leq k \leq K, \quad (3)$$

где  $\sigma$ ,  $\epsilon_p$  — осевое напряжение растяжения (сжатия) и пластическая составляющая соответствующей ему деформации  $\epsilon$ ;  $E_s^{(k)} = E_s^{(k)}(\dot{\epsilon}, \Theta)$ ,  $\sigma_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)}(\dot{\epsilon}, \Theta)$  — модуль линейного упрочнения и условный предел текучести  $k$ -го материала композиции. Физико-механические характеристики компонентов композиции представлены в таблице 1, где в нижней ее части (при  $\dot{\epsilon} = 104$  с<sup>-1</sup>) указаны только те данные, которые отличны от значений

Таблица 1 — Физико-механические характеристики компонентов композиции [5, 6]  
Table 1 — Physical and mechanical characteristics of the composition components [5, 6]

Характеристика материала	Эпоксидная смола		Стекловолокно	
	$\Theta = 20$ °С	$\Theta = 40$ °С	$\Theta = 20$ °С	$\Theta = 80$ °С
$\dot{\epsilon} = 5 \cdot 10^{-4}$ с <sup>-1</sup>				
$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	1210,0	1208,0	2520,0	2519,6
$E$ , ГПа	2,8	2,3	86,8	86,3
$\nu$	0,330	0,333	0,250	0,254
$\eta$ , МПа·с	340	300	1250	1200
$\sigma_s$ , МПа	20	18	4500	4400
$E_s$ , ГПа	1,114	0,783	6,230	5,168
$\lambda$ , Вт/(м·К)	0,243	0,240	0,89	0,86
$\alpha \cdot 10^6$ , К <sup>-1</sup>	68,1	70,3	2,5	2,6
$c$ , кДж/(кг·К)	1,54	1,60	0,800	0,839
$\dot{\epsilon} = 104,0$ с <sup>-1</sup>				
$\sigma_s$ , МПа	22,0	19,5	4600	4550
$E_s$ , ГПа	1,238	0,853	6,314	5,458

Примечание:  $E$  и  $\nu$  — модуль упругости и коэффициент Пуассона;  $\eta$  — коэффициент линейной сдвиговой вязкости в модели тела Максвелла–Больцмана (аналогичная объемная вязкость материала  $\mu$  не учитывается (см. (2.2) в [7]));  $\alpha$  — коэффициент линейного термического расширения;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности;  $c$  — удельная теплоемкость.

параметров, приведенных в верхней части (при  $\dot{\epsilon} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ ). Зависимости характеристик фаз композиции от температуры  $\Theta$  и скорости деформирования  $\dot{\epsilon}$  аппроксимировались линейно по данным, приведенным в таблице 1.

В расчетах по координатам  $x_1$  и  $x_2$  вводилась равномерная сетка с шагами  $\Delta x_1 = \Delta x_2 = b/50 = 1 \text{ см}$ ; шаг по времени  $\tau$  выбирался равным 0,25 мкс. При этом необходимые условия устойчивости разработанной в [1] явной численной схемы выполняются с запасом для каждого из компонентов, а значит и для композиции в целом.

Рассматривалась динамика гибких цилиндрических панелей с двумя вариантами однородного армирования ( $\omega_k = \text{const}$ ,  $\theta_k = \text{const}$  и  $\varphi_k = \text{const}$ ,  $1 \leq k \leq K$ ):

- ортогональная 2D-структура [5, 6, 8], когда два ( $K = 2$ ) семейства стекловолокон уложены по координатным линиям  $x_1$  и  $x_2$  (см. [1] рисунок 1 а) с плотностями армирования  $\omega_1 = 0,2$  и  $\omega_2 = 0,3$  соответственно;

- пространственная 4D-структура ( $K = 4$ ), в которой два первых семейства волокон по-прежнему уложены по направлениям  $x_1$  и  $x_2$ , а третье и четвертое семейства арматуры расположены наклонно в плоскости  $x_2x_3$  [9], причем их направления определяются углами (см. [1] рисунок 2)  $\theta_3 = \pi/4$ ,  $\theta_4 = 3\pi/4$  и  $\varphi_3 = \varphi_4 = \pi/2$  (см. [1], рисунок 1 б, где  $\theta = \pi/4$ ). При втором варианте укладке волокон интенсивности армирования имеют следующие значения:  $\omega_1 = \omega_2 = 0,2$  и  $\omega_3 = \omega_4 = 0,05$ . Общий расход волокон в обеих структурах один и тот же.

Согласно результатам, полученным в [2, 7], в разложении температуры (7) в [1] нужно принять  $L = 7$  в силу того, что при  $L \geq 8$  линеаризованная система (13) и (14) в [1] становится плохо обусловленной и численное решение расходится.

Далее в данном разделе сравниваются результаты расчетов, выполненных по трем моделям неупругого деформирования компонентов композиции:

1) термовязкоупруго-вязкопластическая модель, когда в соотношении (3) учитывается зависимость величин  $\sigma_s^{(k)}$  и  $E_s^{(k)}$  от обоих аргументов  $\dot{\epsilon}$  и  $\Theta$ , а также температурный отклик КМ-конструкции;

2) вязкоупруго-вязкопластическая модель, когда в соотношении (3) учитывается зависимость  $\sigma_s^{(k)}$  и  $E_s^{(k)}$  только от скорости деформации  $\dot{\epsilon}$ , а температурный отклик в оболочке не учитывается (расчеты в этом случае проводились по данным из таблицы 1, соответствующим температуре  $\Theta = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ );

3) термовязкоупругопластическая модель, когда в соотношении (3) учитывается зависимость  $\sigma_s^{(k)}$  и  $E_s^{(k)}$  только от температуры  $\Theta$ , а также температурный отклик панели (соответствующая теория развита в [2], расчеты при этом проводились по данным из таблицы 1, указанным при  $\dot{\epsilon} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ ).

На рисунке 1 изображены зависимости от времени  $t$  максимальных значений интенсивно-

сти деформаций  $k$ -го компонента композиции  $\epsilon_*^{(k)}$

$$\left( \epsilon_m^{(k)}(t) = \max_r \epsilon_*^{(k)}(t, \mathbf{r}) \right)$$

в панели с 2D-структурой армирования: в связующей матрице ( $k = 0$ ; см. рисунки 3 а, с) и волокнах второго ( $k = 2$ ) семейства (см. рисунок 3 б), которые испытывают наиболее интенсивное деформирование; при нагружении пологой оболочки сверху (см. рисунок 1 а, б) и снизу (см. рисунок 1 с). На рисунках 3 а, б представлены результаты расчета рассматриваемой КМ-конструкции по термомеханической модели 1, а на рисунке 1 с — результат аналогичного расчета, но без учета температурного отклика в стеклопластиковой панели (механическая модель 3).

Поведение кривых на рисунке 1 показывает, что к моменту времени  $t = 500$  мс осцилляции деформированного состояния компонентов композиции почти полностью затухают. Кривые на рисунках 1 а, б относятся к одному и тому же расчету и их сравнение свидетельствует о том, что пико-

вые значения  $\epsilon_{\max}^{(k)} = \max_t \epsilon_m^{(k)}(t)$  в связующей матрице ( $k = 0$ ) на 55,2 % больше аналогичной величины в арматуре второго семейства ( $k = 2$ ).

Поведение кривых на рисунках 1 а, б качественно характерно для подавляющего числа случаев зависимостей  $\epsilon_m^{(k)}(t)$  в проведенных расчетах, результаты которых обсуждаются ниже. Однако встречаются

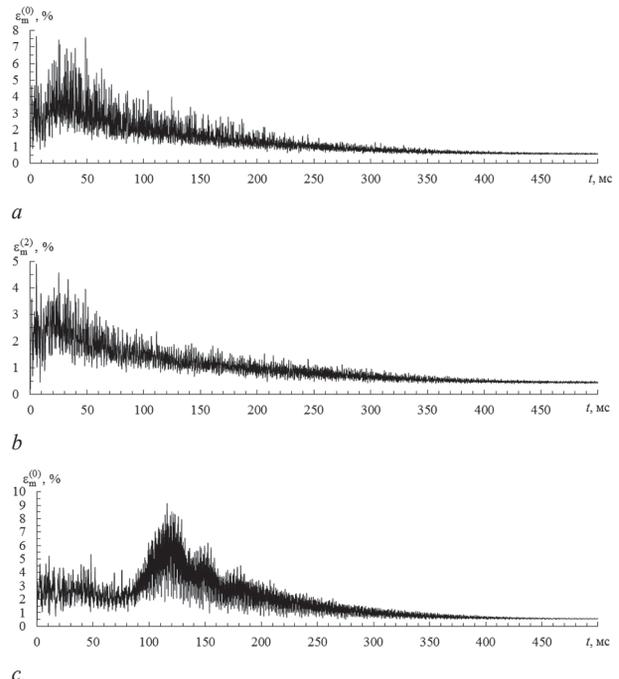


Рисунок 1 — Зависимости от времени максимальных значений интенсивности деформаций эпоксисвязующего (а, с) и волокон второго семейства (б), рассчитанные по разным теориям при разном нагружении (пояснения в тексте)  
 Figure 1 — Time dependences of maximum values of deformation intensity of epoxy binder (а, с) and second family fibers (б), calculated according to different theories and different loading (explanations in the text)

ся и случаи неординарного поведения функций  $\epsilon_m^{(k)}(t)$ , как это представлено на рисунке 1 *c*, на котором резкое и существенное (почти вдвое) нарастание зависимости  $\epsilon_m^{(0)}(t)$  наблюдается в окрестности момента времени  $t \approx 120$  мс, т. е. гораздо позже времени прекращения действия внешней нагрузки ( $t = t_{\min} = 2$  мс). Строго говоря, аналогичное нарастание зависимостей  $\epsilon_m^{(k)}(t)$  наблюдается и на рисунках 1 *a, b*, однако оно не столь заметно, как на рисунке 1 *c*, потому что происходит гораздо раньше — при  $t \approx 30$  мс. Такое значительное нарастание зависимостей  $\epsilon_m^{(k)}(t)$ , имеющее место существенно позже времени прекращения действия внешней нагрузки (1), объясняется тем, что в указанные моменты времени из-за интерференции волновых процессов происходит прощелкивание КМ-панели вниз — в сторону ее вогнутости (динамическая потеря устойчивости).

Поведение кривых на рисунке 1 демонстрирует, что значения  $\epsilon_{\max}^{(k)}$  на них в разы (и даже почти на порядок) превышают величины  $\epsilon_m^{(k)}$  ( $k = 0, 2$ ), полученные при  $t = 500$  мс и которые приближенно можно рассматривать как характеристики остаточного деформированного состояния компонентов композиции. В связи с этим на рисунке 2 изображены зависимости  $\epsilon_m^{(0)}(t)$  в связующей матрице стеклопластиковых панелей, рассчитанные в окрестности момента времени  $t = 500$  мс при нагружении КМ-конструкции снизу (см. рисунок 2 *a*) и сверху (см. рисунок 2 *b*). Кривые 1–3 на рисунке 2 относятся к расчетам пологой оболочки с 2D-структурой армирования (см. [1] рисунок 1 *a*), а кривые 1'–3' рассчитаны при тех же условиях, что и кривые 1–3 соответственно, но для конструкции с 4D-структурой (см. [1] рисунок 1 *b*). Номера кривых (со штрихами и без) соответствуют номерам моделей термомеханического деформирования компонентов композиции (см. выше).

На рисунке 2 почти все кривые со штрихами расположены выше аналогичных кривых без штрихов (исключение составляют лишь кривые 3 и 3' на рисунке 2 *b*). Следовательно, в рассматриваемых относительно тонких ( $h/b = 1/50$ ) стеклопластиковых панелях замена традиционной «плоско»-перекрестной структуры 2D-армирования (см. [1] рисунок 1 *a*) на пространственную структуру 4D-армирования (см. [1] рисунок 1 *b*) является неэффективной, так как приводит к увеличению уровня остаточного деформированного состояния связующей матрицы. Аналогичный вывод справедлив и в отношении сравнения величин  $\epsilon_{\max}^{(0)}$ , рассчитанных для КМ-оболочек с 2D- и 4D-структурами армирования.

Кривые 3 и 3' на рисунке 2 лежат существенно выше кривых 1 и 1' соответственно. А значит, расчет неизотермического динамического поведения рассматриваемых стеклопластиковых конструкций без учета зависимости пластических свойств материалов композиции от скорости их деформирования (см. кривые 3 и 3') приводит к значительному (почти вдвое) увеличению расчетной величины интенсивности остаточных деформаций связующего материала по сравнению с термовязкоупруго-вязкопластическим расчетом (см. кривые 1 и 1'). Кривые же 1' и 2' на рисунках 2 *a, b*, а также кривые 1 и 2 на рисунке 4 *b* различаются пренебрежимо мало, т. е. в соответствующих случаях при определении интенсивности остаточных деформаций в связующей матрице можно использовать более простую модель механического поведения пологой КМ-оболочки, не учитывающую тепловой отклик в ней (см. кривые 2 и 2'). Объясняется это тем, что, как будет показано ниже, уровень дополнительного нагрева рассматриваемых КМ-конструкций в процессе их осцилляций является незначительным (порядка 10 °С). Однако кривая 2 на рисунке 2 *a* лежит заметно ниже

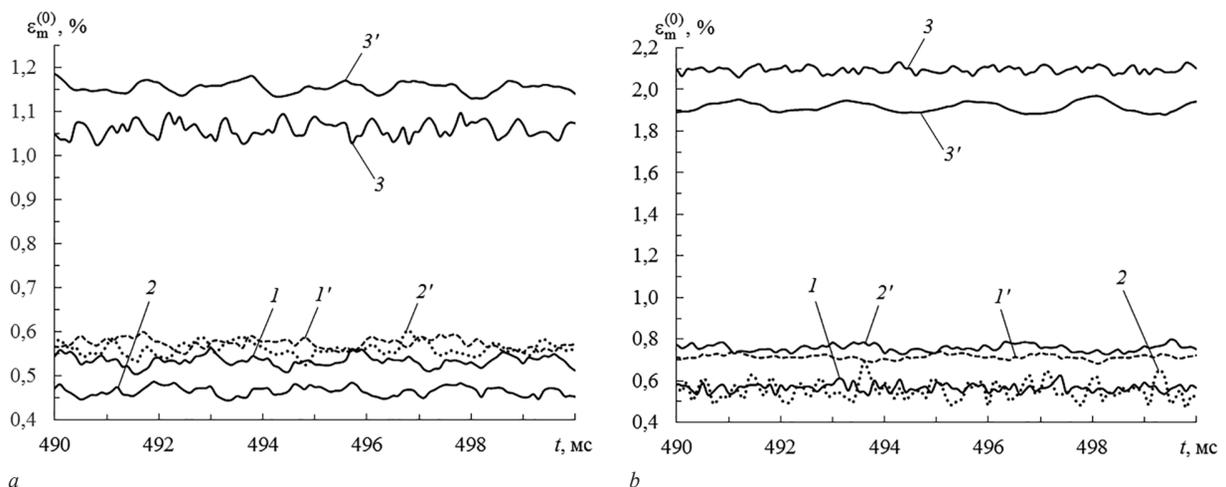


Рисунок 2 — Зависимости от времени максимальных значений интенсивности деформаций связующего в стеклопластиковых искривленных панелях при их нагружении снизу (*a*) и сверху (*b*), рассчитанные по разным термомеханическим моделям в окрестности момента времени  $t = 500$  мс

Figure 2 — Time dependences of the maximum values of the deformation intensity of the binder in curved fiberglass panels when loaded from below (*a*) and from above (*b*), calculated using different thermomechanical models in the vicinity of the time  $t = 500$  ms

кривой 1. При этом в момент времени  $t = 500$  мс ордината точки на кривой 2 на 11,5 % меньше аналогичной величины на кривой 1.

Таким образом, при расчете остаточного деформированного состояния эпоксисвязующего рассматриваемых стеклопластиковых панелей обязательно нужно учитывать чувствительность пластических свойств их компонентов композиций к изменению скорости деформирования, а также температурный отклик в них.

Как видно из рисунка 2, учет теплового отклика в динамически изгибаемых стеклопластиковых искривленных панелях может оказывать заметное влияние на расчетную величину интенсивности остаточных деформаций компонентов их композиций. В связи с этим имеет смысл привести данные, дающие представление о величине нагрева рассматриваемых КМ-конструкций в процессе их осцилляций. Согласно этому, были рассчитаны зависимости от времени максимальных значений температуры в по-

логих оболочках:  $\Theta_m(t) = \max_r \Theta(t, \mathbf{r}) (|x_1| \leq a, |x_2| \leq b$  и  $|x_3| \leq h)$ , а также их пиковые значения  $\Theta_{\max} = \max_t \Theta_m(t)$ . Графики зависимостей  $\Theta_m(t)$  каче-

ственно аналогичны кривым, изображенным на рисунке 3 а в [2], поэтому здесь не приводятся. Однако следует подчеркнуть, что осцилляции функции  $\Theta_m(t)$  во всех расчетах затухают почти вдвое раньше, чем колебания зависимостей  $\varepsilon_m^{(k)}(t)$ , изображенных на рисунке 1 настоящей работы. В таблице 2 приведены значения  $\Theta_{\max}$  и моменты времени  $t_{\Theta_{\max}}$ , в которые они достигаются, а также значения  $\Theta_m$ , рассчитанные при  $t = 500$  мс = 0,5 с, когда осцилляции функций  $\Theta_m(t)$  уже полностью затухли. Согласно данным, представленным в таблице 2, температурный отклик цилиндрической КМ-панели при ее нагружении сверху ( $p_{\max} = -6$  МПа) является более интенсивным,

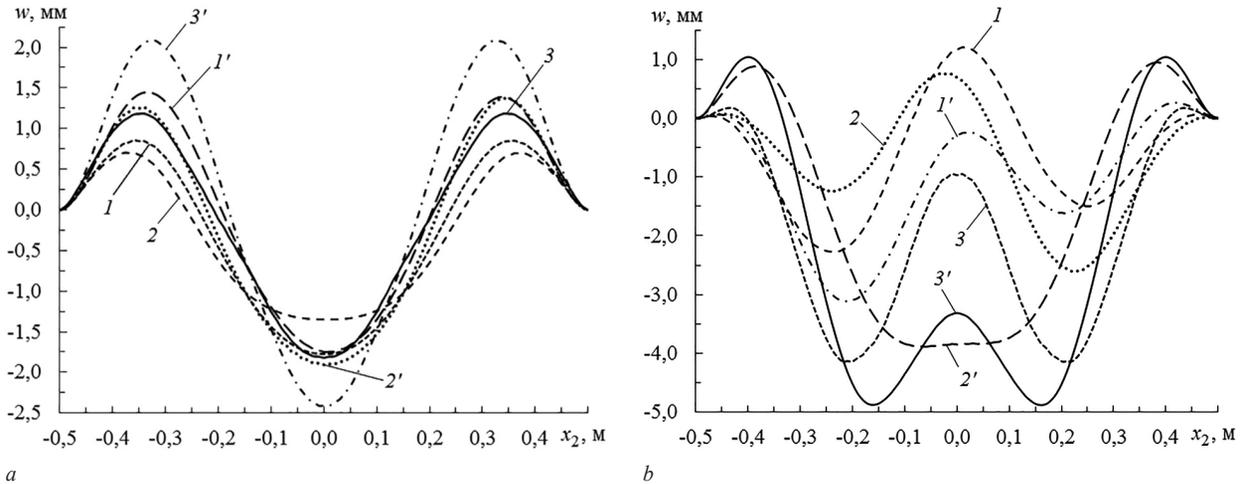


Рисунок 3 — Зависимости остаточных прогибов от координаты  $x_2$  в центральных сечениях  $x_1 = 0$  стеклопластиковых панелей при их нагружении снизу (а) и сверху (б), рассчитанные по разным термомеханическим моделям  
 Figure 3 — Dependences of residual deflections on the coordinate  $x_2$  in the central section  $x_1 = 0$  of fiberglass panels when loaded from below (a) and from above (b), calculated using different thermomechanical models

Таблица 2 — Характерные значения температуры  $\Theta$  в КМ-панелях, рассчитанные по разным моделям их неизотермического пластического деформирования  
 Table 2 — Characteristic values of temperature  $\Theta$  in panels made of composite materials calculated using different models of their non-isothermal plastic deformation

Параметр нагружения $p_{\max}$ , МПа	Вязкоупруго-вязкопластичность		Вязкоупругопластичность	
	$\frac{\Theta_{\max}, ^\circ\text{C}}{t_{\Theta_{\max}}, \text{мс}}$	$\Theta_m, ^\circ\text{C} (t = 0,5 \text{ с})$	$\frac{\Theta_{\max}, ^\circ\text{C}}{t_{\Theta_{\max}}, \text{мс}}$	$\Theta_m, ^\circ\text{C} (t = 0,5 \text{ с})$
Ортогональная 2D-структура армирования (см. [1], рисунок 1 а)				
6,0	$\frac{27,21}{6,7}$	22,75	$\frac{26,71}{2,5}$	22,54
-6,0	$\frac{33,35}{5,3}$	24,96	$\frac{30,23}{6,8}$	24,16
Пространственная 4D-структура армирования (см. [1], рисунок 1 б)				
6,0	$\frac{27,92}{2,6}$	23,74	$\frac{27,70}{2,6}$	23,20
-6,0	$\frac{37,12}{26,4}$	25,75	$\frac{35,10}{40,6}$	30,00

по сравнению со случаем ее нагружения снизу ( $p_{\max} = 6$  МПа). Кроме того, стеклопластиковая конструкция с 4D-структурой армирования нагревается в процессе осцилляций несколько больше, чем оболочка с 2D-структурой. Объясняется это по-прежнему тем, что пространственное армирование (см. [1] рисунок 1 *b*) относительно тонкой искривленной панели является менее эффективным, по сравнению с традиционной «плоско»-перекрестной схемой укладки волокон (см. [1] рисунок 1 *a*). Как видно из таблицы 2, нагрев стеклопластиковых цилиндрических пологих оболочек в процессе их изгибных колебаний незначителен. Так, пиковые значения температуры  $\Theta_{\max}$  превосходят при этом температуру естественного состояния конструкций ( $\Theta_0 = 20$  °С) не более, чем на 8–17 °С; стабилизированные же значения  $\Theta_m$  (определенные при  $t = 500$  мс) превосходят  $\Theta_0$  всего на 3–10 °С, причем в случае наиболее точного (вязкоупруго-вязкопластического) расчета — на 3–6 °С.

Несмотря на то, что в рассматриваемых стеклопластиковых панелях тепловой отклик в процессе их осцилляций является незначительным, он все-таки может оказывать заметное влияние как на величину остаточного деформированного состояния компонентов композиции, что уже было выявлено выше при обсуждении поведения кривых 1 и 2 на рисунке 2 *a*, так и на величину остаточного прогиба. С целью демонстрации последнего факта на рисунке 3 изображены графики остаточных прогибов  $w(x_2)$ , рассчитанные в центральном поперечном сечении пологой оболочки ( $x_1 = 0$ ) в момент времени  $t = 500$  мс при нагружении КМ-конструкции снизу (см. рисунок 3 *a*) и сверху (см. рисунок 3 *b*). К указанному моменту времени осцилляции прогиба становятся пренебрежимо малыми, поэтому зависимости  $w(x_2)$ , представленные на рисунке 3, можно рассматривать как остаточный прогиб в сечении  $x_1 = 0$ . Кривые на рисунке 3 получены при тех же условиях, что и кривые на рисунке 2 с теми же номерами.

Сравнение кривых 1–3 на рисунке 3 с кривыми 1'–3' соответственно показывает, что замена 2D-структуры армирования в искривленной панели на 4D-структуру, как правило, приводит к увеличению ее максимального по модулю остаточного прогиба. Из рассматриваемого множества графиков  $w(x_2)$  исключение при этом составляют лишь кривые 1 и 1' на рисунке 3 *a*, которые в окрестности точки  $x_2 = 0$  имеют практически одинаковые ординаты, причем наибольшие по модулю ( $w(0) = -1,75$  мм).

Кривые 1 и 2, а также 1' и 2' на рисунке 3 существенно различаются. Это свидетельствует о том, что неучет теплового отклика в расчетах неупругой динамики пологих КМ-оболочек может привести не только к значительному искажению расчетной остаточной формы, но и неверному

предсказанию величины максимального по модулю остаточного прогиба (ср., например, кривые 1 и 2 на рисунке 3 *a* при  $x_2 = 0$  и кривые 1' и 2' на рисунке 3 *b* в точках их локальных минимумов).

Сравнение кривых с одинаковыми номерами на рисунках 3 *a*, *b* показывает, что при нагружении искривленной КМ-панели со стороны ее выпуклой лицевой поверхности (см. рисунок 3 *b*) остаточные прогибы по модулю значительно превосходят аналогичные величины, полученные при нагружении ее со стороны вогнутой лицевой поверхности (см. рисунок 3 *a*).

Поведение всех кривых на рисунке 3 свидетельствует о том, что, согласно всем рассматриваемым моделям (термо)механического поведения компонентов композиции, в остаточном состоянии удлиненные цилиндрические КМ-панели приобретают гофрированную форму с образованием складок, ориентированных в их продольном направлении. Строго говоря, кривые на рисунке 3 не обладают полной симметрией относительно вертикальной оси  $x_2 = 0$ :  $w(x_1, x_2) \neq w(x_1, -x_2)$ ; наиболее отчетливо это отразилось на поведении кривых 1, 2 и 1' на рисунке 3 *b*. Объясняется это тем, что в процессе неупругих поперечных осцилляций рассматриваемые КМ-конструкции могут прощелкивать по несимметричной (относительно  $x_2 = 0$ ) форме. При этом в качестве несимметричного возмущающего фактора выступают ошибки округления, которые накапливаются к расчетному моменту времени прощелкивания пологой оболочки.

**Заключение.** Проведенные расчеты показали, что вязкоупруго-вязкопластическое динамическое поведение пологих стеклопластиковых оболочек, как и гибких КМ-пластин [7], обязательно необходимо определять с учетом температурного отклика в них независимо от того, к какой лицевой поверхности прикладывается внешняя кратковременная нагрузка высокой интенсивности. Кроме того, обязателен и учет чувствительности пластических свойств их материалов композиций к изменению скорости деформирования. При приложении указанного вида нагрузки как к выпуклой, так и к вогнутой лицевой поверхности искривленной КМ-панели в процессе изгибных осцилляций наблюдается ее прощелкивание в сторону вогнутости (динамическая потеря устойчивости), которое может происходить гораздо позже времени прекращения действия внешней нагрузки. При нагружении пологой КМ-оболочки со стороны ее выпуклой лицевой поверхности наблюдается более интенсивное прощелкивание по сравнению со случаем нагружения искривленной панели со стороны ее вогнутой лицевой поверхности. Это приводит к значительному завышению остаточных прогибов и остаточного деформированного состояния компонентов композиции в первом случае по сравнению со вторым.

После полного затухания поперечных колебаний прямоугольные в плане, цилиндрические удлиненные панели из стеклопластика, в отличие от гибких КМ-пластин [7], приобретают гофрированную форму при их нагружении со стороны как выпуклых, так и вогнутых лицевых поверхностей. Образующиеся при этом складки ориентированы в продольном направлении.

В относительно тонкой стеклопластиковой оболочке замена традиционной «плоско»-перекрестной структуры армирования (см. [1] рисунок 1 а) на пространственную (см. [1] рисунок 1 б) при сохранении общего расхода волокон является неэффективной, так как приводит к увеличению интенсивности остаточных деформаций компонентов композиции и максимального по модулю значения остаточного прогиба.

*Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124021400036-7).*

### Список литературы

1. Янковский, А.П. Моделирование изгибного неадиабатического вязкоупруго-вязкопластического динамического деформирования пологих армированных оболочек. Часть 1. Формулировка задачи и метод решения / А.П. Янковский // Механика машин, механизмов и материалов. — 2025. — № 2(71). — С. 62–69. — DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2025-2-71-62-69>.
2. Янковский, А.П. Моделирование неадиабатического вязкоупругопластического деформирования гибких пологих армированных оболочек при динамическом нагружении / А.П. Янковский // Конструкции из композиционных материалов. — 2024. — № 1(173). — С. 11–21. — DOI: [https://doi.org/10.52190/2073-2562\\_2024\\_1\\_11](https://doi.org/10.52190/2073-2562_2024_1_11).
3. Houlston, R. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading / R. Houlston, C.G. Des-Rochers // Computers & Structures. — 1987. — Vol. 26, no. 1–2. — Pp. 1–15. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(87\)90232-X](https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90232-X).
4. Теплотехника: учеб. для вузов / В.Н. Луканин, М.Г. Шаптров, Г.М. Камфер [и др.]; под ред. В.Н. Луканина. — 4-е изд., испр. — М.: Высш. шк., 2003. — 671 с.
5. Справочник по композиционным материалам: в 2 кн. / под ред. Дж. Любина; пер. с англ. А.Б. Геллера, М.М. Гельмонта; под ред. Б.Э. Геллера. — М.: Машиностроение, 1988. — Кн. 1. — 448 с.
6. Композиционные материалы: справ. / Л.Р. Вишняков, Т.В. Грудина, В. Х. Кадыров [и др.]; под ред. Д.М. Карпиноса. — Киев: Наукова думка, 1985. — 592 с.
7. Янковский, А.П. Моделирование неадиабатического вязкоупруго-вязкопластического деформирования изгибаемых армированных пластин / А.П. Янковский // Изв. РАН. МТТ. — 2023. — № 5. — С. 147–169. — DOI: <https://doi.org/10.31857/S0572329923700071>.
8. Композиционные материалы: справ. / В.В. Васильев, В.Д. Протасов, В.В. Болотин [и др.]; под общ. ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. — М.: Машиностроение, 1990. — 512 с.
9. Тарнопольский, Ю.М. Пространственно-армированные композиционные материалы: справ. / Ю.М. Тарнопольский, И.Г. Жигун, В.А. Поляков. — М.: Машиностроение, 1987. — 224 с.

YANKOVSKII Andrei P., D. Sc. in Phys. and Math.

Leading Research Scientist of the Laboratory of Fast Processes Physics

E-mail: [yankovsky\\_ap@itam.nsc.ru](mailto:yankovsky_ap@itam.nsc.ru)

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation

*Received December 5, 2024.*

## MODELING OF BENDING NON-ISOTHERMAL VISCOELASTICVISCOPLASTIC DYNAMIC DEFORMATION OF SHALLOW REINFORCED SHELLS. PART 2. ANALYSIS OF CALCULATION RESULTS

*Calculations were performed and their results were analyzed for cases of isothermal and non-isothermal viscoelasticviscoplastic and viscoelastic-plastic bending deformation of cylindrical panels made of fiberglass, having a rectangular elongated shape in plan. Shallow shells with a traditional 2D reinforcement structure and with a spatial 4D structure are compared at the same fiber consumption. Fiberglass constructions are rigidly fixed along the entire edge and frontally loaded with excess short-term pressure of high intensity from the concave or convex front surface. It has been demonstrated that during the oscillation process, in the absence of external heat sources of non-mechanical origin, the temperature reaches peak values that are only 8–17 °C higher than the temperature of the natural state of the composite panel. The stabilized maximum temperature values (after the oscillations of the construction have died down) are only 3–10 °C higher than the temperature of the natural state. Shallow shells with the 4D reinforcement structure heat up somewhat more than structures with the 2D structure. It is shown that despite such insignificant heating, the calculation of the inelastic dynamics of such panels must be carried out, taking into account not only the sensitivity of the plastic properties of their components of the composition to the rate of strain, but also the temperature response. It has been demonstrated that under dynamic loading of a curved panel*

from the side of any of the front surfaces, in the process of oscillations, it clicks in the direction of concavity. As a result, after vibration damping, the elongated cylindrical fiberglass panel acquires a corrugated shape with folds oriented in the longitudinal direction. It is shown that in a relatively thin shallow shell, replacing the 2D reinforcement structure with a spatial 4D structure is ineffective.

**Keywords:** shallow shells, curved panels, coupled thermomechanical problem, reinforcement, viscoelastic-viscoplasticity, inelastic dynamics, residual state, numerical solution

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2025-3-72-74-81>

## References

1. Yankovskii A.P. Modelirovanie izgibnogo neizotermicheskogo vyazkoupругo-vyazkoplasticheskogo dinamicheskogo deformirovaniya pologikh armirovannykh obolochek. 1. Formulirovka zadachi i metody resheniya [Modeling of bending non-isothermal viscoelasticviscoplastic dynamic deformation of shallow reinforced shells. Part 1. Problem formulation and solution method]. *Mechanics of machines, mechanisms and materials*, 2020, no. 2(71), pp. 62–69. DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2025-2-71-62-69> (in Russ.).
2. Yankovskii A.P. Modelirovanie neizotermicheskogo vyazkoupругoplasticheskogo deformirovaniya gibkikh pologikh armirovannykh obolochek pri dinamicheskom nagruzhении [Modeling of nonisothermal viscoelastic-plastic deformation of flexible shallow reinforced shells under dynamic loading]. *Composite materials constructions*, 2024, iss. 1(173), pp. 11–21. DOI: [https://doi.org/10.52190/2073-2562\\_2024\\_1\\_11](https://doi.org/10.52190/2073-2562_2024_1_11) (in Russ.).
3. Houlston R., DesRochers C.G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading. *Computers & structures*, 1987, vol. 26, iss. 1–2, pp. 1–15. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(87\)90232-X](https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90232-X).
4. Lukinin V.N., et al. *Teplotekhnika* [Heat engineering]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2003. 671 p. (in Russ.).
5. *Handbook of composites*. New York, Van Nostrand Reinhold Company Inc., 1982. 786 p.
6. *Kompozitsionnye materialy* [Composite materials]. Kiev, Nauchnaya mysl Publ., 1985. 592 p. (in Russ.).
7. Yankovskii A.P. Modelirovanie neizotermicheskogo vyazkoupругo-vyazkoplasticheskogo deformirovaniya izgibaemykh armirovannykh plastin [Modeling of non-isothermal viscoelasticviscoplastic deformation of bending reinforced plates]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela*, 2023, no. 5, pp. 147–169. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0572329923700071> (in Russ.).
8. Vasilev V.V., et al. *Kompozitsionnye materialy* [Composite materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1990. 512 p. (in Russ.).
9. Tarnopolskii Yu.M., Zhigun I.G., Polyakov V.A. *Prostranstvenno-armirovannye kompozitsionnye materialy* [Spatially reinforced composite materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1987. 224 p. (in Russ.).