



ГЕОМЕХАНИКА

УДК 622.831.322; 622.276.003.13; 539.3

С.Н. ЛОПАТИН, канд. физ.-мат. наук

доцент кафедры теоретической и прикладной механики¹

постдоктор факультета мехатроники²

E-mail: lopatinsn@tut.by

М.А. ЖУРАВКОВ, д-р физ.-мат. наук, проф.

заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики¹

профессор³

E-mail: zhuravkov@bsu.by

П.С. ПЕРЕДРИЙ

стажер младшего научного сотрудника НИЛ прикладной механики¹

E-mail: pavelpiaredriy@gmail.com

М.А. АВДЕЕНКО

студент¹

E-mail: ma13ya13@mail.ru

¹Белорусский государственный университет, г. Минск, Республика Беларусь

²Харбинский политехнический университет, г. Харбин, Китайская Народная Республика

³Чунцинский исследовательский институт Харбинского политехнического университета, г. Чунцин, Китайская Народная Республика

Поступила в редакцию 02.07.2025.

СОПРЯЖЕННЫЙ МКЭ-МБЭ-АЛГОРИТМ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ МАССИВОВ ГОРНЫХ ПОРОД С ПОДЗЕМНЫМИ СООРУЖЕНИЯМИ

В работе предложен сопряженный алгоритм, представляющий собой комбинацию метода конечных элементов (МКЭ) и метода блочных элементов (МБЭ), для моделирования механического поведения массивов горных пород в окрестности глубоких подземных сооружений. МКЭ используется для расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) вмещающего массива горных пород и выявления зон предельного состояния (ПС) в окрестности подземного сооружения посредством использования комплексного критерия предельного состояния. В таких зонах в дальнейшем применяется МБЭ для моделирования механического состояния области массива дискретной структуры с использованием деформируемых блочных элементов, что позволяет точно описывать локализованные зоны нарушения сплошности в массиве (разрушения, сдвиги и вывалы породных масс). Эффективность алгоритма подтверждена численным решением двух классических задач геомеханики: задачи об устойчивости одиночной выработки и задачи моделирования обрушения породных масс при ведении горных работ лавами применительно к месторождениям калийных солей Беларуси. Верификация результатов моделирования данными натурных замеров показала погрешность 5–17 % в количественных показателях при адекватном качественном повторении исследуемых геомеханических процессов. Среди преимуществ разработанного алгоритма учет неоднородности породных массивов (за счет использования методов механики дискретных сред), экономия вычислительных и временных ресурсов при проведении численных расчетов.

Ключевые слова: метод конечных элементов, метод блочных элементов, сопряженные численные методы, массив горных пород, подземные сооружения, комплексный критерий предельного состояния

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2025-3-72-82-91>

Введение. Исследование механики поведения массивов горных пород в областях с подземными сооружениями представляет собой одну из главных задач геомеханики, имеющую важное значение для проектирования и оценки устойчивости подземных геотехнических сооружений, обеспечения безопасности горных работ. Массивы горных пород характеризуются высокой степенью структурной и физико-механической неоднородностей, обусловленных наличием слоистости, блоков, прослоек, зон ослабления и замещения, что делает их механическое поведение существенно отличающимся от идеализированных моделей механики сплошных сред. Таким образом, применение континуальных численных методов, таких как МКЭ, для проведения сложных прикладных расчетов и построения на их основе прогнозов механического поведения массивов горных пород представляется достаточно ограниченным. Континуальные методы, основанные на гипотезе непрерывности и однородности, не позволяют в полной мере учесть структурные и физико-механические неоднородности породных массивов, особенно при моделировании состояния и поведения областей с локализованными зонами разрушений, наличие крупномасштабных трещин в районах контактных границ блоков. Это инициирует использование и разработку более точных численных методов, способных учитывать особенности реального поведения массивов горных пород [1, 2]. Примерами таких методов являются метод блочных элементов и метод дискретных элементов [1, 3], используемые для моделирования механического поведения массивов блочной структуры и сыпучих сред. В настоящей статье рассматривается применение одного варианта сопряженного МКЭ-МБЭ-алгоритма к задачам оценки прочности и устойчивости глубоких подземных сооружений.

МКЭ имеет широкое применение в геомеханике для моделирования напряженно-деформированного состояния (НДС) горных пород, позволяя, в том числе, учитывать нелинейное поведение пород и массивов, сложную геометрию породной толщи и подземных геотехнических сооружений. Вместе с тем возможности МКЭ весьма ограничены при описании разрушения трещиноватых массивов горных пород. Хотя данный метод активно используется для расчета устойчивости откосов с учетом нелинейного характера поведения пород, демонстрируя при этом высокую точность прогноза критических состояний массива [4, 5]. В качестве следующего примера можно привести моделирование гидроразрыва пласта. На сегодня разработаны трехмерные МКЭ-модели с интерфейсными элементами нулевой толщины, что позволяет точно описывать рост трещин и распределение давления [6]. Помимо этого, с использованием конечно-элементного моделирования описано длительное разрушение бортов

карьера с учетом времени и ослабления прочности массива [3].

МБЭ, в отличие от МКЭ, рассматривает массив как совокупность взаимодействующих блоков, разделенных потенциально подвижными границами. Это позволяет моделировать процессы разрушения, сейсмоактивность, поведение трещиноватых массивов горных пород, устойчивость инженерных сооружений в зонах наличия тектонических нарушений [1, 7]. При моделировании бурения и разрушения породной толщи МБЭ позволяет эффективно описать образование и развитие трещин в скальных массивах [8]. Анализ сейсмического воздействия на подземные сооружения с помощью МБЭ дает возможность выявить зоны вероятных разрушений даже в сильно неоднородной среде [9, 10]. Трехмерные МБЭ-системы, реализованные в специализированных программных комплексах, позволяют учитывать не только геометрию трещин, но и их взаимодействие, вращение блоков и микромеханические эффекты при разрушении [11, 12].

Метод МБЭ нашел применение также в задачах моделирования сдвигов земной поверхности, где блочная структура массива оказывает определяющее влияние на характер деформаций и величину перемещений [13, 14]. Высокий уровень детализации структуры массива в сочетании с физически обоснованными законами взаимодействия блоков делает метод особенно полезным в задачах оценки устойчивости выработок и прогноза сейсмически индуцированных процессов [15].

Массивы горных пород в окрестности подземных сооружений часто обладают как сплошными, так и блочными свойствами, особенно в трещиноватых и структурно сложных зонах. Использование только одного метода — МКЭ или МБЭ — ограничивает точность моделирования. Совмещение МКЭ и МБЭ в рамках сопряженных численных алгоритмов обеспечивает более точное моделирование сложных геомеханических процессов, объединяя преимущества сплошной и дискретной аппроксимации реальной среды [16].

В данной работе предлагается комбинированный метод МКЭ-МБЭ для моделирования поведения массивов горных пород в окрестности подземных сооружений. Разработка универсальных численных моделей и расчетных схем, позволяющих учесть достаточно большой набор аспектов поведения породных масс в окрестности подземных сооружений, все еще остается актуальной задачей. В статье представлена попытка разработки такого алгоритма, а также его применения к актуальным задачам вычислительной геомеханики. Особенностью алгоритма является использование комплексного критерия предельного состояния для выявления во вмещающих массивах горных пород зон, которые потенциально могут переходить в новое структурное состояние и, как след-

ствие, приобретать иную дискретную структуру. Расчет общего НДС рассматриваемой области породного массива проводится при помощи МКЭ, а затем выполняется дополнительное моделирование в областях предельного состояния при помощи МБЭ. Такой подход отличается от общепринятого (например, в коммерческих пакетах ITASCA UDEC и 3DEC) тем, что на основании МБЭ моделирование производится только в областях потенциального образования блочной структуры, а не во всей рассматриваемой области массива, что позволяет значительно сэкономить вычислительные и временные ресурсы. Кроме того, форма и размеры блоков определяются не произвольно, а по специальному методу, описанному в работе [1].

Постановки классических задач геомеханики об оценке устойчивости протяженных подземных выработок. Рассмотрим постановку двух классических модельных задач геомеханики, решение которых далее будет выполнено на основе разработанного оригинального сопряженного МКЭ-МБЭ-алгоритма. Данные задачи не являются новыми (примеры решения таких задач приведены в [1, 7, 17]), однако применение сопряженного алгоритма позволяет значительно уточнить получаемые решения на базе рассмотрения качественно новой механики поведения массива горных пород за счет использования блочных элементов.

Первая модельная задача связана с оценкой предельного состояния геотехнической системы «подземная выработка — вмещающий массив горных пород». Схематичная постановка модельной задачи для данного случая представлена на рисунке 1 а. В случае, представленном на рисунке 1 а, выработка пройдена в мощном слое каменной соли без использования мер охраны. В случае, представленном на рисунке 1 б, в качестве меры охраны выработок использован анкер типа КАМВ (согласно нормам мер охраны выработок, описанным в источниках [1, 18]).

Вторая задача связана с оценкой предельного состояния геотехнической системы «отрабатываемая лава — вмещающий массив». Постановка данной модельной задачи схематично представлена на рисунке 1 с. В данном случае имеет место отработка пласта полезной породы технологической схемой «сплошная очистная выемка» (лава). Более детально постановка данной задачи описана в работе [19].

В обоих рассматриваемых случаях геотехнические сооружения находятся в массиве каменной соли на глубине 600 м, которая согласно классификации глубин, введенной в работе [1], относится к умеренным. Физико-механические свойства горной породы, используемой для решения сформулированных модельных задач, представлены в таблице 1.

Математические модели, используемые для описания механического поведения мас-

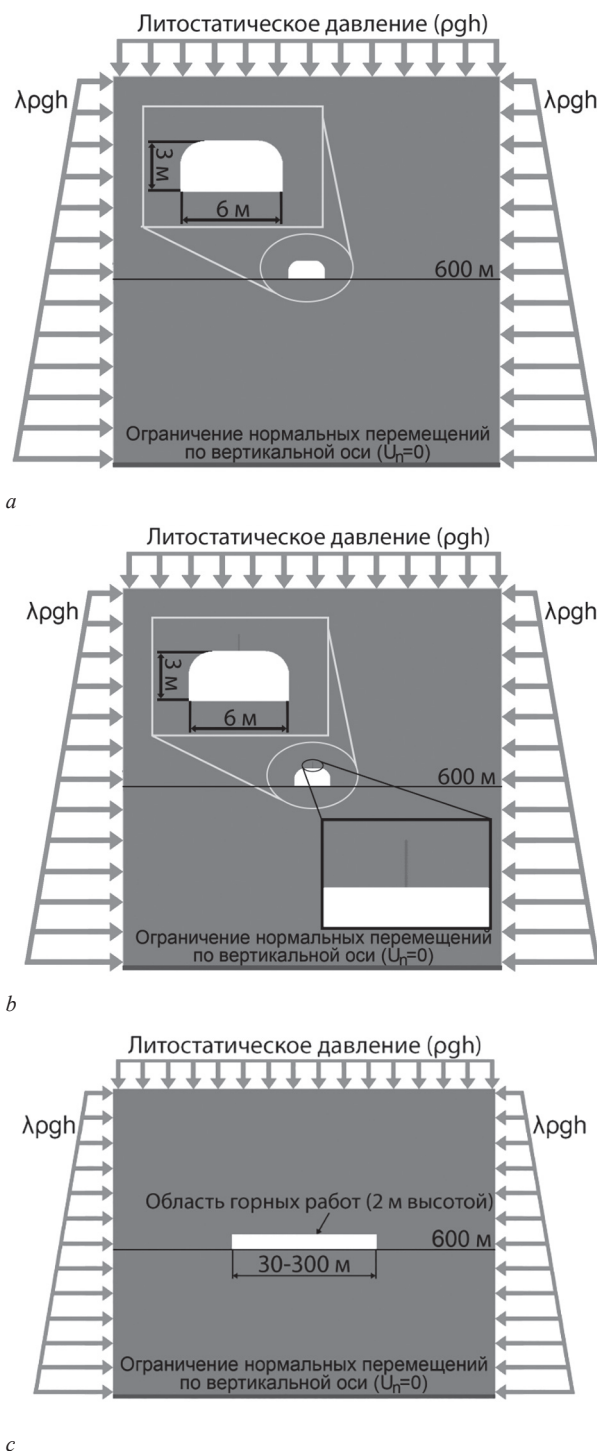


Рисунок 1 — Постановки рассматриваемых модельных задач:
а — задача об определении ПС одиночной выработки;
б — задача об определении ПС одиночной выработки с учетом мер охраны; с — задача об определении ПС в окрестности отрабатываемой лавы

Figure 1 — Formulations of the model problems under consideration:
а — LS estimation problem of a single excavation;
б — LS estimation problem of the single excavation taking into account protection measures; с — LS estimation problem in the vicinity of the longwall face being mined

сивов горных пород. Для расчетов НДС массивов горных пород используется стандартная упругопластическая модель, включающая в себя закон Гука (1) и модель Кулона–Мора (2). Данная математическая модель часто используется для

Таблица 1 — Физико-механические свойства рассматриваемых горных пород
Table 1 — Physical and mechanical properties of the rocks under consideration

Порода	Плотность, кг/м ³	Модуль Юнга, ГПа	Коэффициент Пуассона	Предел на сжатие, МПа	Предел на растяжение, МПа	Угол внутреннего трения, рад	Коэффициент сцепления, МПа
Каменная соль	2300	1,75	0,28	25,0	1,0	0,83	3,8

описания механического поведения массивов горных пород [7, 17]:

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l} C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}, \quad (1)$$

где σ_{ij} — тензор напряжений; ε_{kl} — тензор деформаций:

$$\tau_n = \sigma_n \operatorname{tg} \varphi + \tau_0, \quad (2)$$

где τ_n — касательное напряжение; σ_n — нормальное напряжение; φ — угол внутреннего трения (соответственно $\operatorname{tg} \varphi$ — коэффициент внутреннего трения); τ_0 — коэффициент сцепления.

Для описания реологического поведения массивов горных пород используется двухстадийная модель ползучести (3). Она описывает зависимость деформаций массива от времени и интенсивности напряжений в каждой его точке. Более подробно данная модель, а также ее применение для описания длительного поведения массивов горных пород рассмотрена в работе [20]:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{C_3 + 1} C_1 \sigma_{\text{eqv}}^{C_2} t^{(C_3+1)} + C_4 \sigma_{\text{eqv}}^{C_5} t, \quad (3)$$

где $\varepsilon(t)$ — деформация в момент времени t ; σ_{eqv} — интенсивность напряжений; C_1 – C_5 — реологические константы, значения которых приведены в таблице 2.

Таким образом, для расчета НДС рассматриваемых геотехнических систем в любой момент времени до наступления предельного состояния используются модели (1)–(3).

Для определения в массиве горных пород зон предельного состояния применяется комплексный критерий предельного состояния (4), предложенный в работе [7]. Примеры использования данного критерия при выполнении прикладных исследований приведены в работах [1, 17]:

$$\left\{ \begin{array}{l} [\sigma_3 \leq \sigma_c, \varepsilon_3 \leq \varepsilon_c] \text{ при } \mu \in (0,5;1], \\ [|\sigma_1 - \lambda \sigma_3| \leq \sigma_c, \sqrt{I_2} \leq \alpha I_1 + s, \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \leq \varepsilon_s] \\ \text{при } \mu \in [-0,5;0,5] \\ [\sigma_1 \leq \sigma_t, \varepsilon_1 \leq \varepsilon_t] \text{ при } \mu \in (-0,5;-1], \end{array} \right. \quad (4)$$

где σ_1, σ_3 — минимальное и максимальное главные напряжения; σ_c, σ_t — предельные прочности на сжатие, растяжение; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — максимальная и минимальная главные деформации; $\varepsilon_c, \varepsilon_t$ — предельные деформации на сжатие и растяжение; $\lambda = \sin \varphi / (1 - \sin \varphi)$; I_1, I_2 — первый и второй

инварианты тензора напряжений соответственно; α и s — экспериментально выведенные параметры, зависящие от угла внутреннего трения φ и удельного сцепления C ; μ — коэффициент Надаи–Лоде, вычисляемый по следующей формуле [1, 7]:

$$\mu = \frac{2(\sigma_2 - \sigma_3)}{\sigma_1 - \sigma_3} - 1. \quad (5)$$

Значения коэффициента Надаи–Лоде находятся в интервале $[-1, 1]$. При этом, если μ принадлежит интервалу $[-1, -0,5]$, то напряженное состояние соответствует состоянию обобщенного растяжения, в интервале $[-0,5, 0,5]$ — состоянию обобщенного сдвига, а в интервале $(0,5, 1]$ — состоянию обобщенного сжатия.

Сопряженный МКЭ-МБЭ-алгоритм для решения задач геомеханики и механизм поведения блочных элементов. В данном разделе кратко опишем МКЭ-МБЭ-алгоритм, предлагаемый для решения достаточно широкого класса задач геомеханики, связанного с определением НДС, ПС и запредельного деформирования массивов горных пород в окрестности подземных выработок. Алгоритм включает в себя следующие основные этапы:

1) определение начального НДС рассматриваемого участка массива горных пород с использованием модели (1);

2) определение НДС массива горных пород при проходке выработок и установке конструктивных элементов охраны и крепления подземных сооружений с использованием моделей (1) и (2);

3) определение НДС массива горных пород на заданный промежуток времени с использованием модели (3) при необходимости;

4) определение в массиве зон предельного состояния с использованием комплексного критерия (4);

5) выделение в зонах предельного состояния дискретной (блочной) структуры, на которую разделяется область массива при переходе в предельное состояние;

6) расчет итогового НДС дискретной среды, а также оценка поведения блочных элементов.

При численном моделировании этапы 1–4 удобно выполнять на базе алгоритмов МКЭ. При-

Таблица 2 — Значения реологических констант для модели (3)
Table 2 — Values of rheological constants for model (3)

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$2 \cdot 10^{-35}$	4,2	–0,7	$5,1 \cdot 10^{-38}$	0,2

меры подобных расчетов представлены в упомянутых работах [1, 7, 17].

Выполнение этапов 5 и 6, которые являются ключевыми для моделирования механического поведения массивов горных пород дискретной структуры, достаточно сложно выполнить на базе МКЭ в силу ограничений данного метода. В связи с этим этапы 5 и 6 предлагается реализовывать на основе сопряженного МКЭ-МБЭ-метода. Следует отметить, что данный подход является более эффективным, чем использование чистого МБЭ на всех этапах, поскольку в случае использования сопряженного подхода генерация блочной структуры осуществляется только в областях предельного состояния, а не во всем рассматриваемом участке массива горных пород, что позволяет значительно сэкономить вычислительные ресурсы и время, необходимое на решение поставленной задачи. Вместе с тем это позволяет решить проблему выбора формы и размера генерируемых блоков, поскольку при использовании «чистого» МБЭ это делается зачастую случайным образом. В случае же использования сопряженного алгоритма форма и размер блоков определяются формой зон предельного состояния, выявленных на этапах 1–4. При этом моделирование состояния областей массива горных пород вне зон предельного состояния по-прежнему осуществляется при помощи МКЭ.

Далее кратко опишем механизм поведения блочных элементов. Как известно, МБЭ был разработан первоначально для моделирования механического поведения трещиноватых и структурно неоднородных массивов горных пород, представляемых в виде совокупности жестких или деформируемых блоков, взаимодействующих через контактные поверхности. Первые реализации метода были предложены в работе [21]. На сегодняшний день существуют отдельные программные реализации МБЭ, такие как UDEC и 3DEC, разработанные компанией Itasca Consulting Group [22]. В отличие от методов сплошной среды, МБЭ позволяет естественным образом моделировать поведение породных массивов с разветвленной системой трещин, с возможностью моделирования относительного смещения и поворота блоков, различных условий их контакта, разъединения и повторного замыкания.

Контактное взаимодействие между блоками моделируется с помощью квазипружин, обладающих нормальной и касательной жесткостью соответственно. Изменение нормальных и касательных напряжений описывается следующими формулами:

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_n &= k_n \Delta u_n; \\ \Delta\tau_s &= k_s \Delta u_s,\end{aligned}\quad (6)$$

где Δu_n и Δu_s — приращения нормальных и касательных смещений в плоскости контакта.

При сжатии взаимодействие блоков описывается как упругопластическое поведение структурного элемента «пружина с элементом пластичности», реагирующего на нормальное давление. При растяжении контактная поверхность теряет несущую способность, если напряжение превышает предел прочности на разрыв, что приводит к раскрытию трещины. При сдвиге достижение предельного касательного напряжения описывается моделью (2). После достижения предельных значений возможен переход к остаточной прочности, что моделирует сдвиг по контактной поверхности (трещинам).

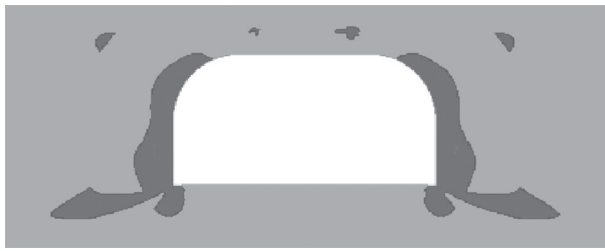
Таким образом, МБЭ точно отражает дискретную природу разрушения массивов горных пород, включая такие процессы, как сдвиг, вращение, потеря контакта и перераспределение напряжений между блоками. Благодаря своей физической наглядности и адаптивности к сложным геомеханическим условиям, метод получил широкое применение при анализе устойчивости откосов, тоннелей, выработок и масштабных инженерных сооружений в трещиноватых массивах [23]. В разработанном алгоритме МБЭ реализуется в выделенных зонах ПС (на этапах 5 и 6).

Результаты численного решения модельных задач. В данном разделе приведем результаты численного решения модельных задач (см. рисунок 1) с использованием сопряженного МКЭ-МБЭ-алгоритма.

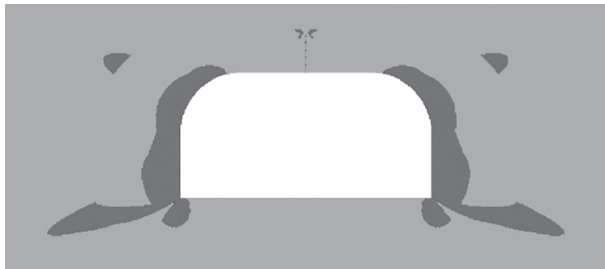
На рисунке 2 представлены оценки ПС рассматриваемых геотехнических систем в соответствии с комплексным критерием (4). Из результатов моделирования следует, что ПС в окрестности выработок на умеренной глубине формируется в основном в областях стенок и кровли выработки. При этом линейный размер зон ПС в окрестности одиночных выработок не превышает 0,85 м по глубине массива, что не должно серьезным образом влиять на их устойчивость. В случае же отработки породного слоя лавами зоны ПС могут достигать 2–4 м, особенно в области кровли выработки, что приводит к ее обрушению.

Вместе с тем локализация зон ПС в окрестности выработок не позволяет описать состояние породных масс в этих зонах и механизм их обрушения. Для моделирования поведения и устойчивости породных масс в зонах ПС используем расчетные схемы, построенные на основе МБЭ. На рисунке 3 представлена схема формирования в массиве блочной структуры с использованием данных рисунка 2.

Итоговые оценки механического поведения рассматриваемых геотехнических систем приведены на рисунках 3 и 4 соответственно. В частности, на данных рисунках видно, что в окрестности одиночной незакрепленной выработки имеет место вывал блока, образовавшегося в кровле выработки. В случае наличия в кровле анкерного крепления вывал блока не происходит, поскольку



a



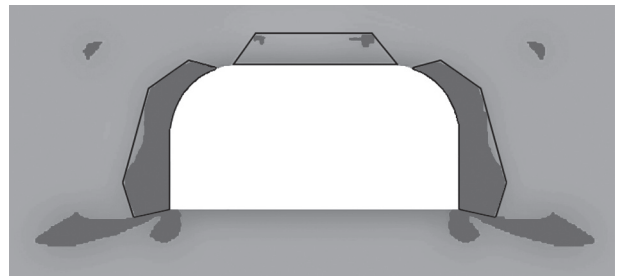
b



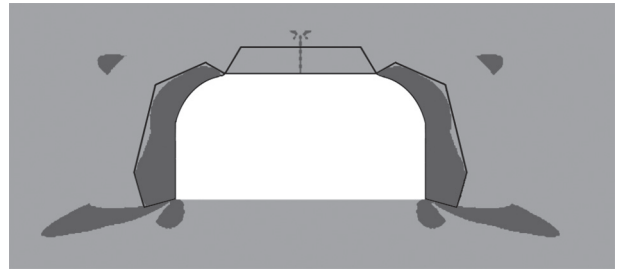
c

Рисунок 2 — Результаты оценки ПС в окрестности рассматриваемых геотехнических систем: *a* — задача об определении ПС в окрестности одиночной выработки; *b* — задача об определении ПС в окрестности одиночной выработки с учетом мер охраны; *c* — задача об определении ПС в окрестности обрабатываемой лавы; темные области — зоны предельного состояния

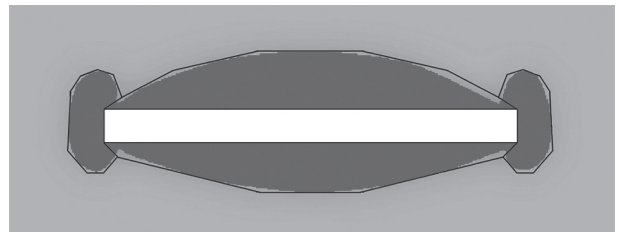
Figure 2 — Results of LS estimation in the vicinity of the considered geotechnical systems: *a* — LS estimation problem in the vicinity of the single excavation; *b* — LS estimation problem in the vicinity of the single excavation taking into account protection measures; *c* — LS estimation problem in the vicinity of the longwall face being mined; dark areas — limit state zones



a



b



c

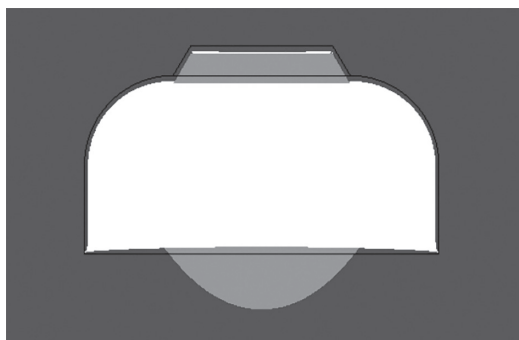
Рисунок 3 — Схема формирования блочной структуры в областях ПС: *a* — задача об определении ПС в окрестности одиночной выработки; *b* — задача об определении ПС в окрестности одиночной выработки с учетом мер охраны; *c* — задача об определении ПС в окрестности обрабатываемой лавы; черные контуры — контуры сформировавшихся блоков

Figure 3 — Scheme of block structure formation in LS areas: *a* — LS estimation problem in the vicinity of the single excavation; *b* — LS estimation problem in the vicinity of the single excavation taking into account protection measures; *c* — LS estimation problem in the vicinity of the longwall face being mined; black contours — contours of formed blocks

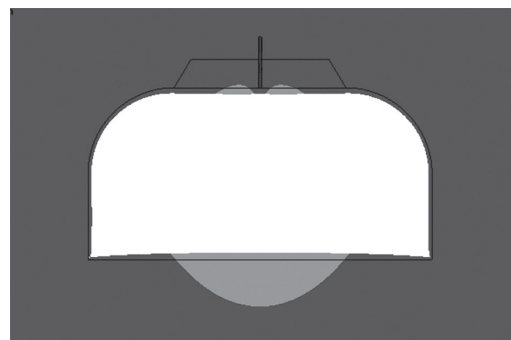
анкер «сшивает» образовавшийся блок с вышележащими слоями, не находящимися в ПС (см. рисунок 4). В случае же ведения горных работ лавами, в кровле выработки формируется система

блоков, обрушение которых происходит поэтапно (рисунок 5).

Верификация разработанного алгоритма и результатов численных решений с использо-



a



b

Рисунок 4 — Итоговое поведение блочной структуры в случае одиночной выработки: *a* — задача об определении ПС в окрестности одиночной выработки; *b* — задача об определении ПС в окрестности одиночной выработки с учетом мер охраны

Figure 4 — Final behavior of the block structure in the case of a single excavation: *a* — LS estimation problem in the vicinity of the single excavation; *b* — LS estimation problem in the vicinity of the single excavation taking into account protection measures

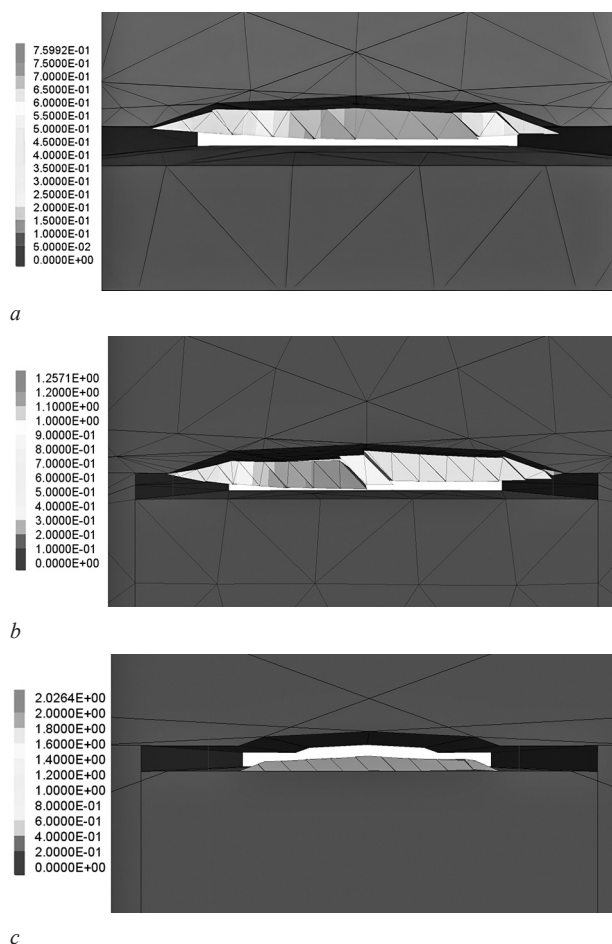


Рисунок 5 — Полные перемещения блочной структуры в окрестности лавы: а — начало вывала; б — смещение блоков в выработанное пространство; в — итоговое положение блоков
Figure 5 — Total displacements of the block structure in the vicinity of the longwall face: а — beginning of the rockfalls; б — displacement of blocks into the mined-out space; в — final position of blocks

ванием данных натуральных наблюдений. В данном разделе приведем некоторые результаты сравнения полученных численных решений с данными натурных исследований. Следует отметить, что результаты верификации НДС массива горных пород второй модельной задачи частично приведены в работе [19] путем сравнения перемещений в окрестности лавы с данными натурных исследований. График сравнения представлен на рисунке 6, согласно которому, максимальная относительная погрешность численного решения для «задачи о проходке лавы» составляет 9–17 % при полном качественном повторении описываемого процесса. Средняя погрешность не превышает 5 %.

Далее приведены результаты дополнительной верификации путем сравнения перемещений контура одиночной выработки с результатами натурных наблюдений в течение одного года. Результаты данного сравнения представлены на рисунке 7, которые свидетельствуют о том, что максимальная относительная погрешность численного решения задачи с одиночной выработкой не превышает 14 % для почвы и 17 % для кровли выработки соответственно.

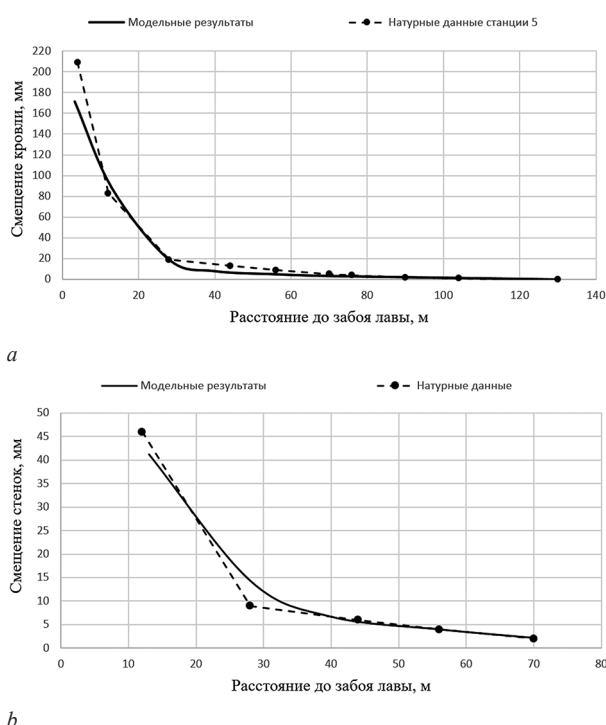


Рисунок 6 — Сравнение модельных результатов перемещений контура лавы с данными натурных наблюдений: а — смещение кровли; б — смещение стенок [19]
Figure 6 — Comparison of model results of longwall face contour displacements with field data: а — roof displacement; б — wall displacement [19]

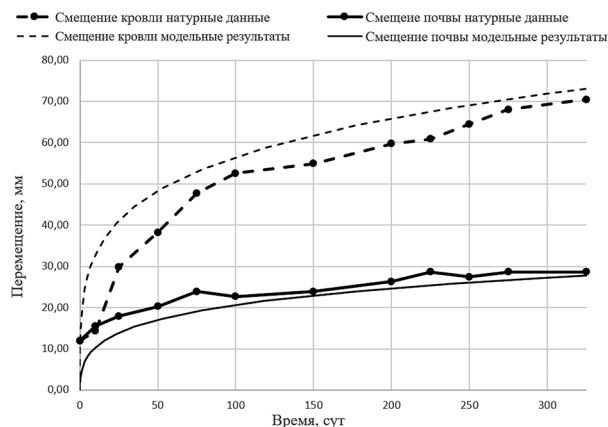


Рисунок 7 — Сравнение модельных результатов перемещений контура одиночной выработки с данными натурных наблюдений
Figure 7 — Comparison of model results of displacements of the single excavation contour with field data

Выводы. В статье представлен сопряженный МКЭ-МБЭ-алгоритм, позволяющий исследовать механическое поведение массивов горных пород в окрестности подземных сооружений с учетом образования в массиве блочных структур. Эффективность работы данного алгоритма продемонстрирована на примере решения двух прикладных задач вычислительной геомеханики: задачи оценки ПС подкрепленной одиночной выработки и задачи о моделировании обрушения горных пород при технологии отработки породных слоев лавами. Эффективность алгоритма подтверждена

верификацией полученных численных решений путем их сравнения с данными натурных исследований о деформировании породных масс в окрестности контура горных выработок. По результатам проверки относительная погрешность предложенного алгоритма составила 5–17 %, что является допустимым при моделировании механического поведения сложных геотехнических систем. По результатам выполненных исследований можно сделать следующие выводы.

1. В окрестности подземных сооружений на умеренных глубинах области ПС формируются лишь в ограниченных зонах вмещающего массива, поэтому генерация блочных элементов должна осуществляться непосредственно в данных зонах. Форма и размеры блочных элементов определяются по специальному правилу, описанному в данной статье.

2. В рассмотренных случаях зоны ПС и, как следствие, блочная структура массива формируются главным образом в кровле выработок на расстоянии менее 1 м от контура. Блоки в данных зонах являются вероятными источниками образования вывалов, которые несут потенциальную опасность для жизни людей и эффективной эксплуатации подземных сооружений. В случае использования такой меры крепления, как анкерная крепь, блоки фиксируются с ненарушенной породной толщей, что позволяет предотвратить образование вывалов.

Использование предложенного сопряженного МКЭ-МБЭ-алгоритма является более эффективным при решении задач такого класса в сравнении с существующими численными и аналитическими методами ввиду следующих причин:

- расширенный учет факторов, влияющих на поведение геотехнических систем, а также использование более сложных математических моделей, чем классические модели механики сплошных сред;
- возможность учета дискретной и неоднородной структуры массива горных пород в отличие от «чистого» МКЭ;
- значительная экономия вычислительных и временных ресурсов, а также четкое обоснование формы и размера вводимых в расчет блоков, в отличие от «чистого» МБЭ.

Список литературы

1. The stability and failure of deep underground structures at potash mining deposits / Y. Zhang, S. Lapatsin, M. Zhuravkov [et al.] // *Applied Sciences*. — 2024. — Vol. 14, iss. 20. — DOI: <https://doi.org/10.3390/app14209434>.
2. Potyondy D.O. A bonded-particle model for rock / D.O. Potyondy, P.A. Cundall // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. — 2004. — Vol. 41, iss. 8. — P. 1329–1364. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2004.09.011>.
3. Ильясов, Б.Т. Моделирование длительного разрушения массивов горных пород методом конечно-дискретных элементов / Б.Т. Ильясов // *Маркшейдерский вестник*. — 2016. — № 1(110). — С. 48–51.
4. Tan, X. Finite element reliability analysis of slope stability / X. Tan, J. Wang // *Journal of Zhejiang University SCIENCE A*. — 2009. — Vol. 10, iss. 5. — P. 645–652. — DOI: <https://doi.org/10.1631/jzus.A0820542>.
5. Numerical simulation of creep fracture evolution in fractured rock masses / N. Zhao, L. Meng, L. Wang, Y. Zhang // *Frontiers in Earth Science*. — 2022. — Vol. 10. — DOI: <https://doi.org/10.3389/feart.2022.901742>.
6. Gao, Q. Finite element simulations of 3D planar hydraulic fracture propagation using a coupled hydro-mechanical interface element / Q. Gao, A. Ghassemi // *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. — 2020. — Vol. 44, iss. 15. — P. 1999–2024. — DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.3116>.
7. Zhuravkov, M.A. Complex limit state criterion for rock masses / M.A. Zhuravkov, S.N. Lapatsin, S. Ji // *Acta Mechanica Sinica*. — 2023. — Vol. 39, iss. 1. — DOI: <https://doi.org/10.1007/s10409-022-22194-x>.
8. Numerical simulation study on rock-breaking process and mechanism of compound impact drilling / W. Wang, G. Liu, J. Li [et al.] // *Energy Reports*. — 2021. — Vol. 7. — P. 3137–3148. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.egyr.2021.05.040>.
9. Varma, M. Seismic assessment of shotcrete support in jointed rock tunnels / M. Varma, V.B. Maji, A. Boominathan // *International Journal of Geosynthetics and Ground Engineering*. — 2022. — Vol. 8. — DOI: <https://doi.org/10.1007/s40891-022-00392-0>.
10. Seismic response of tunnel intersections in jointed rock mass within underground research laboratory: a coupled DEM–DFN approach / V.K. Kota, A. Juneja, R.K. Bajpai [et al.] // *Journal of Earth System Science*. — 2024. — Vol. 133, iss. 3. — DOI: <https://doi.org/10.1007/s12040-024-02342-y>.
11. Y-Geo: New combined finite-discrete element numerical code for geomechanical applications / O.K. Mahabadi, A. Lisjak, A. Munjiza, G. Grasselli // *International Journal of Geomechanics*. — 2012. — Vol. 12, iss. 6. — P. 676–688. — DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)GM.1943-5622.0000216](https://doi.org/10.1061/(ASCE)GM.1943-5622.0000216).
12. Munjiza, A. The combined finite-discrete element method / A. Munjiza. — John Wiley & Sons, Ltd, 2004. — 352 p. — DOI: <https://doi.org/10.1002/047002180>.
13. Прогноз сдвижений и деформаций земной поверхности на основе компьютерного моделирования / В.Б. Скаженик, И.В. Чернышенко, Н.Н. Грищенко, Ф.М. Голубев // *Журнал теоретической и прикладной механики*. — 2023. — № 2(83). — С. 74–85. — DOI: <https://doi.org/10.24412/0136-4545-2023-2-74-85>.
14. Zhang, X. An enhanced discrete element modeling method considering spatiotemporal correlations for investigating deformations and failures of jointed rock slopes / X. Zhang, Y. Sun, G. Mei // *Applied Sciences*. — 2022. — Vol. 12, iss. 2. — DOI: <https://doi.org/10.3390/app12020923>.
15. Liu, C. Modeling branched and intersecting faults in reservoir-geomechanics models with the extended finite element method / C. Liu, J.H. Prevost, N. Sukumar // *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. — 2019. — Vol. 43, iss. 12. — P. 2075–2089. — DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.2949>.
16. Beer, G. Efficient and realistic 3-D boundary element simulations of underground construction using isogeometric analysis / G. Beer, C. Duenser, V. Mallardo // *ArXiv Preprint*. — 2020. — DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2012.14489>.
17. Лопатин, С.Н. Комплексная оценка устойчивости подземных горных выработок при различных горнотехнических условиях / С.Н. Лопатин, М.А. Журавков, П.С. Передрий // *Вестні Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук*. — 2024. — Т. 69, № 4. — С. 340–352. — DOI: <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2024-69-4-340-352>.
18. Инструкция по охране и креплению горных выработок на Старобинском месторождении: утв. ОАО «Беларуськалий» 17.04.18; по состоянию на 31 янв. 2022 г. — Солигорск: СИПР, 2018. — 206 с.
19. О влиянии очистных работ на характер деформирования демонтажных выработок / А.Л. Поляков, С.Н. Лопатин, М.С. Мозговенко, М.А. Рачковский // *Механика машин, механизмов и материалов*. — 2023. — № 4(65). — С. 97–105. — DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2023-4-65-97-105>.
20. Zhuravkov, M. Durability analysis of underground structures based on various creep models of the enclosing salt rock massif / M. Zhuravkov, S. Hvesenya, S. Lapatsin // *E3S Web of Conferences*. — 2020. — Vol. 201. — DOI: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202020101007>.

21. Goodman, R.E. Block Theory and Its Application to Rock Engineering / R.E. Goodman, G.H. Shi. — Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1985. — 338 p.
22. Itasca Consulting Group. 3DEC – Three-Dimensional Distinct Element Code. User's Guide: Version 7.0 // Itasca Consulting Group. — URL: <https://www.itascacg.com/software/3dec> (date of access: 01.07.2025).
23. Бабешко, В.А. Метод блочного элемента в приложениях / В.А. Бабешко, О.М. Бабешко, О.В. Евдокимова // Физическая мезомеханика. — 2012. — Т. 15, № 1. — С. 95–103.

LAPATSIN Siarhei N., Ph. D. in Phys. and Math.

Associate Professor of Theoretical and Applied Mechanics Department¹

Postdoctoral Researcher of the School of Mechatronics²

E-mail: lopatinsn@tut.by

ZHURAVKOV Michael A., D. Sc. in Phys. and Math., Prof.

Head of Theoretical and Applied Mechanics Department¹

Professor³

E-mail: zhuravkov@bsu.by

PIAREDRIY Pavel S.

Junior Researcher Trainee of the Research Laboratory of Applied Mechanics¹

E-mail: pavelpiaredriy@gmail.com

AVDEENKO Mayia A.

Student¹

E-mail: ma13ya13@mail.ru

¹Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

²Harbin Institute of Technology, Harbin, People's Republic of China

³Chongqing Research Institute of Harbin Institute of Technology, Chongqing, People's Republic of China

Received July 2, 2025.

COUPLED FEM-DEM ALGORITHM FOR NUMERICAL SOLUTION OF PROBLEMS OF ROCK MASS MECHANICS WITH UNDERGROUND STRUCTURES

This work proposes a coupled algorithm combining the Finite Element Method (FEM) and the Distinct Element Method (DEM) to model the mechanical behavior of rock masses near deep underground structures. FEM is used to calculate the stress-strain state of the surrounding rock mass and to identify the limit state (LS) zones in the vicinity of the underground structure through the use of a complex limit state criterion. Within these zones, DEM is further applied to model the mechanical state of the discrete structure of the mass using deformable block elements, which makes it possible to accurately describe localized zones of continuity violation in the mass (failures, shear deformation, and rockfalls). The algorithm's efficacy is demonstrated via numerical solutions of two classic geomechanical problems: stability assessment of a single excavation and collapse analysis during the longwall mining at potash mining deposits of the Republic of Belarus. Verification of modeling results with the field data showed an error margin of 5–17 % in quantitative terms with adequate qualitative repetition of the studied geomechanical processes. The advantages of the developed algorithm include consideration of rock mass heterogeneity (due to the use of discrete medium mechanics methods), saving computational and time resources during numerical calculations.

Keywords: finite element method, distinct element method, coupled numerical methods, rock mass, underground structures, complex limit state criterion

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2025-3-72-82-91>

References

1. Zhang Y., Lapatsin S., Zhuravkov M., Yu G., Karpovich I. The stability and failure of deep underground structures at potash mining deposits. *Applied sciences*, 2024, vol. 14, iss. 20. DOI: <https://doi.org/10.3390/app14209434>.
2. Potyondy D.O., Cundall P.A. A bonded-particle model for rock. *International journal of rock mechanics and mining sciences*, 2004, vol. 41, iss. 8, pp. 1329–1364. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2004.09.011>.

3. Ilyasov B.T. Modelirovanie dlitel'nogo razrusheniya massivov gorn'nykh porod metodom konechno-diskretnykh elementov [Modeling of long-term failure of rock masses using the finite-discrete element method]. *Marksheyderskiy vestnik*, 2016, no. 1(110), pp. 48–51 (in Russ.).
4. Tan X., Wang J. Finite element reliability analysis of slope stability. *Journal of Zhejiang University SCIENCE A*, 2009, vol. 10, iss. 5, pp. 645–652. — DOI: <https://doi.org/10.1631/jzus.A0820542>.
5. Zhao N., Meng L., Wang L., Zhang Y. Numerical simulation of creep fracture evolution in fractured rock masses. *Frontiers in Earth science*, 2022, vol. 10. DOI: <https://doi.org/10.3389/feart.2022.901742>.
6. Gao Q., Ghassemi A. Finite element simulations of 3D planar hydraulic fracture propagation using a coupled hydro-mechanical interface element. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, 2020, vol. 44, iss. 15, pp. 1999–2024. DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.3116>.
7. Zhuravkov M.A., Lapatsin S.N., Ji S. Complex limit state criterion for rock masses. *Acta mechanica sinica*, 2023, vol. 39, iss. 1. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10409-022-22194-x>.
8. Wang W., Liu G., Li J., Zha C., Lian W. Numerical simulation study on rock-breaking process and mechanism of compound impact drilling. *Energy reports*, 2021, vol. 7, pp. 3137–3148. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.egy.2021.05.040>.
9. Varma M., Maji V.B., Boominathan A. Seismic assessment of shotcrete support in jointed rock tunnels. *International journal of geosynthetics and ground engineering*, 2022, vol. 8. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40891-022-00392-0>.
10. Kota V.K., Juneja A., Bajpai R.K., Srivastava P., Prabhakar G. Seismic response of tunnel intersections in jointed rock mass within underground research laboratory: a coupled DEM–DFN approach. *Journal of Earth system science*, 2024, vol. 133, iss. 3. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12040-024-02342-y>.
11. Mahabadi O.K., Lisjak A., Munjiza A., Grasselli G. Y-Geo: new combined finite-discrete element numerical code for geomechanical applications. *International journal of geomechanics*, 2012, vol. 12, iss. 6, pp. 676–688. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)GM.1943-5622.0000216](https://doi.org/10.1061/(ASCE)GM.1943-5622.0000216).
12. Munjiza A. *The combined finite-discrete element method*. John Wiley & Sons, Ltd, 2004. 352 p. DOI: <https://doi.org/10.1002/0470020180>.
13. Skazhenik V.B., Chernyshenko I.V., Grishchenkov N.N., Golubev Ph.M. Prognostychnyy i deformatsiy zemnoy poverkhnosti na osnove kompyuternogo modelirovaniya [Prediction of displacements and deformations of the earth's surface based on computer modeling]. *Journal of theoretical and applied mechanics*, 2023, no. 2(83), pp. 74–85. DOI: <https://doi.org/10.24412/0136-4545-2023-2-74-85>.
14. Zhang X., Sun Y., Mei G. An enhanced discrete element modeling method considering spatiotemporal correlations for investigating deformations and failures of jointed rock slopes. *Applied sciences*, 2022, vol. 12, iss. 2. DOI: <https://doi.org/10.3390/app12020923>.
15. Liu C., Prévost J.H., Sukumar N. Modeling branched and intersecting faults in reservoir-geomechanics models with the extended finite element method. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, 2019, vol. 43, iss. 12, pp. 2075–2089. DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.2949>.
16. Beer G., Duenser C., Mallardo V. *Efficient and realistic 3-D boundary element simulations of underground construction using isogeometric analysis*. 2020. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2012.14489>.
17. Lapatsin S.N., Zhuravkov M.A., Peredriy P.S. Kompleksnaya otsenka ustoychivosti podzemnykh gorn'nykh vyrobotoch pri razlichnykh gornotekhnicheskikh usloviyakh [Complex estimation of the underground excavations stability in various mining and geological conditions]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2024, vol. 69, no. 4, pp. 340–352. DOI: <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2024-69-4-340-352> (in Russ.).
18. *Instructions for the protection and fastening of mine workings at the Starobinskoye field, approved by JSC Belaruskali April 17, 2018, as of January 31, 2022*. Soligorsk, SIPR Publ., 2018. 206 p. (in Russ.).
19. Polyakov A.L., Lapatsin S.N., Mozgovenko M.S., Rachkovskiy M.A. O vliyaniy ochistnykh rabot na kharakter deformirovaniya demontazhnykh vyrabotoch [On the influence of long-wall mining on the deformation of the operational excavations]. *Mechanics of machines, mechanisms and materials*, 2023, no. 4(65), pp. 97–105. DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2023-4-65-97-105> (in Russ.).
20. Zhuravkov M., Hvesenya S., Lapatsin S. Durability analysis of underground structures based on various creep models of the enclosing salt rock massif. *E3S web of conferences*, 2020, vol. 201. DOI: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202020101007>.
21. Goodman R.E., Shi G.H. *Block theory and its application to rock engineering*. Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1985. 338 p.
22. Itasca Consulting Group. *3DEC – three-dimensional distinct element code. User's guide: Version 7.0*. Available at: <https://www.itascacg.com/software/3dec> (accessed July 1, 2025).
23. Babeshko V.A., Babeshko O.M., Evdokimova O.V. Metod blochnogo elementa v prilozheniyakh [Block element method in applications]. *Fizicheskaya mezomekhanika*, 2012, vol. 15, no. 1, pp. 95–103 (in Russ.).