



КОМПЬЮТЕРНАЯ МЕХАНИКА

УДК 621.01 + 631.354

А.В. КОТОВ, магистр техн. наук

ведущий инженер-конструктор¹

аспирант кафедры «Механика»²

E-mail: androskv@mail.ru

Д.Г. КРОЛЬ, канд. физ.-мат. наук, доц.

первый проректор²

E-mail: kr-dmitry@gstu.by

¹ОАО «Сейсмотехника», г. Гомель, Республика Беларусь

²Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого, г. Гомель, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 18.09.2025.

СПОСОБ И ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ КИНЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА КУЛИСНОГО МЕХАНИЗМА

Предложен аналитический способ кинематического анализа кулисного механизма жатвенной части зерноуборочного комбайна с применением теории комплексных чисел с алгоритмом расчета и его программной реализацией. Применение комплексных чисел в кинематическом анализе рычажных механизмов позволяет оптимизировать математические расчеты за счет выполнения только элементарных операций сложения (вычитания) и умножения комплексных чисел. Приведен пример графической визуализации результатов кинематического анализа в математическом пакете PTC MathCAD. Предложенный способ кинематического анализа плоских рычажных механизмов с применением теории комплексных чисел может найти свое эффективное применение в соответствующих инженерных и научных расчетах.

Ключевые слова: кулисный механизм, жатвенная часть, кинематический анализ, комплексные числа, метод преобразования координат, алгоритм

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2025-4-73-25-30>

Введение. Современные зерноуборочные комбайны представляют собой сложные механические системы, эффективность работы которых во многом определяется надежностью и оптимальностью кинематических схем их исполнительных механизмов. Для устойчивого протекания технологического процесса без забивания хлебной массой, кинематические параметры каждого рабочего органа должны быть согласованы друг с другом [1, 2]. При этом важное внимание уделяется механическим системам жатвенной части зерноуборочного комбайна, которые первыми включаются в технологический процесс, существенно влияя на его дальнейшее протекание.

Среди рычажных механизмов жатвенной части особое место занимают пальчиковые механизмы кулисного типа, используемые в шнеке жаток, а также в приемном битере некоторых наклонных камер. Данные механизмы служат для захвата и частичного разравнивания поступающей от предыдущего рабочего органа хлебной массы с дальнейшей ее подачи к последующему рабочему органу. Кинематический анализ пальчикового механизма позволяет не только оценить его характеристики, но и выявить потенциальные направления оптимизации конструкции [3]. Поэтому разработка математической модели такого механизма, позволяющей в доступной и наглядной

форме проводить анализ и оптимизацию его параметров в зависимости от поставленных целевых показателей, является все еще актуальной научной и инженерной задачей.

Традиционные методы анализа рычажных механизмов, основанные на замкнутых векторных контурах Зиновьева [4–6], отличаются значительной трудоемкостью вычислений и требуют громоздких математических выкладок. Альтернативой данному методу может быть способ, основа которого базируется на представлении двумерного вектора, лежащего на плоскости, в виде комплексного числа, что позволяет сохранить всю информацию о длине и направлении, упрощая тем самым расчетные процедуры за счет применения более компактных и простых алгебраических выражений [7, 8].

Цель исследования — кинематический анализ плоского рычажного механизма на основе метода преобразования координат в неизменном базисе и теории комплексных чисел. Задачи исследования: разработать соответствующий алгоритм и его программную реализацию, позволяющую автоматизировать процесс анализа с визуализацией результатов расчета; дать качественную оценку эффективности данного способа по сравнению с другими традиционными аналитическими методами исследования.

Постановка задачи. В качестве объекта исследования возьмем плоский рычажный механизм жатвенной части зерноуборочного комбайна, конструктивная схема которого приведена на рисунке 1 а. Согласно этой схеме, вращение полого цилиндра 1 осуществляется вокруг точки O , а вращение пальцев 2 — относительно точки A

трубчатого вала 3, установленного в щеке подвески 4 с некоторым эксцентриситетом. Конец пальца, расположенный в точке C , и предохранительная проточка, расположенная в точке E , описывают окружности заданного радиуса, относительно центра вращения пальца. Установленный в точке B глазок 5 пальца движется по окружности цилиндра и является направляющим для пальца механизма.

Таким образом, математическая модель пальчикового механизма сводится к описанию рычажного механизма кулисного типа. Кинематическая схема данного механизма приведена на рисунке 1 б, в котором в качестве кривошипа условно принимается звено OB — радиус цилиндра, в качестве кулисного камня — глазок в точке B , а в качестве самой кулисы — палец AC .

В научной и учебной литературе достаточно полно представлены аналитические способы описания кинематики различных кулисных механизмов [9–12], однако приведенные способы не отличаются простотой и наглядностью, а также с трудом поддаются оптимизации и параметризации. Приведенная в данной работе математическая модель пальчикового механизма с применением теории комплексных чисел лишена всех указанных выше недостатков.

Методы исследований. В основе метода преобразования координат в неизменном базисе находится способ представления двумерного вектора, лежащего на плоскости, в виде комплексного числа. Это позволяет перейти от алгебраических операций над векторами к соответствующим операциям над комплексными числами, сохранив при этом всю информацию, присущую векторным величинам о длине и направлении. Вектор комплекс-

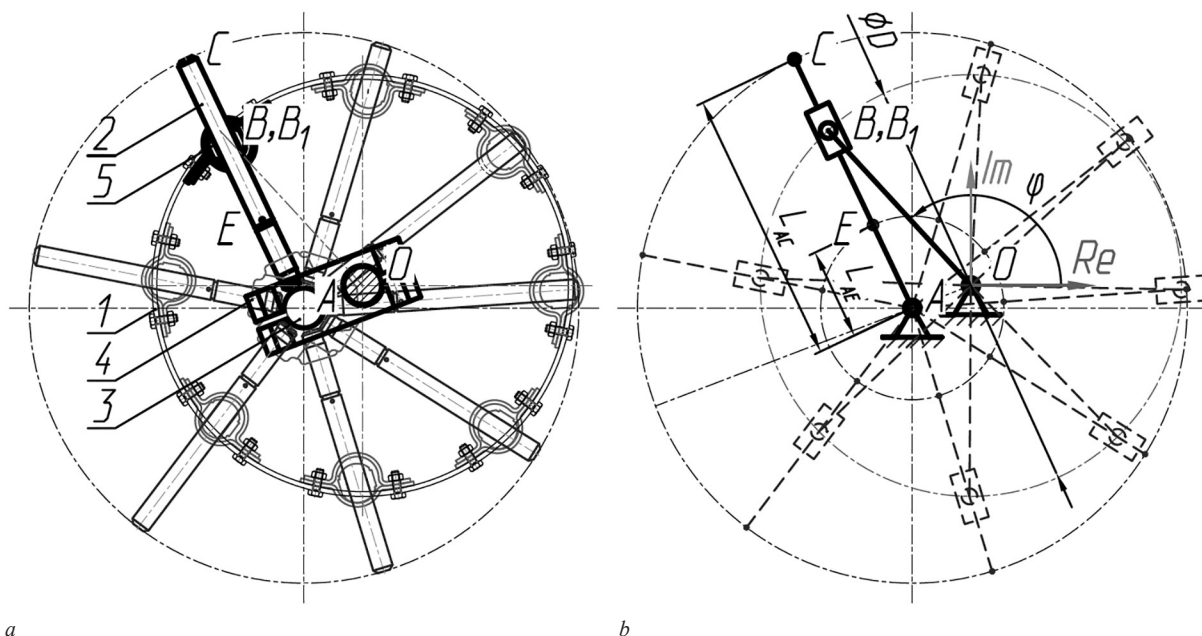


Рисунок 1 — Расчетная схема пальчикового механизма (а) и его кинематическая схема (б):

1 — полый цилиндр; 2 — палец; 3 — трубчатый вал; 4 — щека подвески; 5 — глазок

Figure 1 — Analytical model of the finger mechanism (а) and its kinematic scheme (b):

1 — hollow cylinder; 2 — finger; 3 — tubular shaft; 4 — gripping jaw; 5 — slider

ного числа на комплексной плоскости представим в следующей форме [13]:

$$\underline{r} = r_x + j \cdot r_y = r \cdot (\cos \theta + j \cdot \sin \theta) = r \cdot e^{j\theta}, \quad (1)$$

где j — мнимая единица; r , r_x и r_y — модуль, действительная и мнимая части комплексного числа соответственно; θ — аргумент комплексного числа, рад.

С целью исключения совпадения с обозначением обычных векторных величин в выражении (1) вектор комплексного числа здесь и далее будет обозначаться символом нижнего подчеркивания.

Основой данного метода является система аналитического преобразования координат одного вектора в другой путем поворота исходного вектора в рассматриваемой плоскости на некоторый угол в заданном направлении с изменением или без изменения его длины [3, 7]. С целью автоматизации математических расчетов при преобразовании вектора комплексного числа, а также для повышения простоты и наглядности данного преобразования введем следующую функцию пользователя TurnRI:

$$\text{TurnRI}(\underline{r}, \alpha, L) = e^{j\alpha} \cdot \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|} \cdot L, \quad (2)$$

где \underline{r} — исходный поворачиваемый вектор комплексного числа; α — угол поворота исходного вектора комплексного числа, значение которого принимается со знаком «+» при осуществлении поворота против хода часовой стрелки и со знаком «-» при повороте по ходу часовой стрелки; L — длина нового вектора комплексного числа.

Вспомогательные единичные векторы комплексного числа (орты) для каждой из осей комплексной плоскости представим как:

$$\underline{e}_{\text{Re}} = 1; \underline{e}_{\text{Im}} = j. \quad (3)$$

Кинематический анализ механизма. Рассматриваемый механизм имеет одну степень свободы, и положение всех характерных точек механизма определяется положением входного звена — кривошипа OB , которое в свою очередь определяется углом φ поворота кривошипа к действительной оси комплексной плоскости. Данный угол принят в качестве обобщенной координаты при аналитическом описании кинематики механизма. Входными параметрами являются координаты неподвижных точек, а также длины звеньев и углы на жестких звеньях.

Зададим векторы комплексных чисел для неподвижных шарниров механизма в алгебраической форме для прямоугольной системы координат:

$$\underline{O} = O_x + j \cdot O_y; \underline{A} = A_x + j \cdot A_y. \quad (4)$$

Применим аналитический метод преобразования координат в неизменном базисе с использованием теории комплексных чисел для аналитического описания кинематики пальчикового

механизма в зависимости от значения угла поворота кривошипа OB с учетом выражений (2) и (3):

$$\underline{OB}(\varphi) = \text{TurnRI}(\underline{e}_{\text{Re}}, \varphi, L_{OB}). \quad (5)$$

Выражением (5) получен вектор комплексного числа звена OB путем поворота единичного вектора действительной оси на угол φ против часовой стрелки (перед углом стоит знак «+») с изменением его длины на заданную длину L_{OB} .

С помощью следующих выражений описывается кинематика характерных точек B , C и E (расположения предохранительной проточки):

$$\underline{B}(\varphi) = \underline{O} + \underline{OB}(\varphi); \underline{AB}(\varphi) = \underline{B}(\varphi) - \underline{A}; \quad (6)$$

$$\underline{AC}(\varphi) = \text{TurnRI}(\underline{AB}(\varphi), 0, L_{AC}); \quad (7)$$

$$\underline{AE}(\varphi) = \text{TurnRI}(\underline{AB}(\varphi), 0, L_{AE});$$

$$\underline{C}(\varphi) = \underline{A} + \underline{AC}(\varphi); \underline{E}(\varphi) = \underline{A} + \underline{AE}(\varphi). \quad (8)$$

Используемая в выражениях (7) форма записи поворота вектора комплексного числа позволяет получать новый вектор, являющийся коллинеарным к исходному поворачиваемому вектору. Необходимо также отметить, что положение всех подвижных точек или звеньев описываемого механизма является функцией угла φ поворота кривошипа, т. е. функцией от обобщенной координаты.

Таким образом, с помощью выражений (4)–(8) была решена первая задача кинематического анализа методом преобразования координат в неизменном базисе с помощью теории комплексных чисел.

При решении второй и третьей задачи кинематического анализа механизма определение скоростей и ускорений характерных точек удобно представлять через аналог скорости и аналог ускорения. Известно, что аналог скорости — это первая производная радиус-вектора точки по обобщенной координате, а аналог ускорения — вторая производная [14]. При этом для вычисления аналогов угловых скоростей и ускорений звеньев удобно использовать значение аргумента вектора комплексного числа из выражения (1), характеризующего угол наклона вектора к действительной оси комплексной плоскости. Для векторов комплексных чисел определение аналогов скоростей и ускорений можно представить в следующем общем виде:

$$\underline{v}_{qr}(\varphi) = \frac{d}{d\varphi} \underline{r}(\varphi); \omega_{qr}(\varphi) = \frac{d}{d\varphi} \arg(\underline{r}(\varphi)); \quad (9)$$

$$\underline{a}_{qr}(\varphi) = \frac{d^2}{d\varphi^2} \underline{r}(\varphi); \varepsilon_{qr}(\varphi) = \frac{d^2}{d\varphi^2} \arg(\underline{r}(\varphi)). \quad (10)$$

Направление аналогов угловой скорости и ускорения звеньев будет определяться алгебраическим знаком полученного числа (знак «+» будет означать вращение звена против часовой стрелки, а знак «-» — по часовой стрелке).

Переход от найденных аналогов скоростей и ускорений к их действительным значениям осуществляется с учетом характера движения входно-

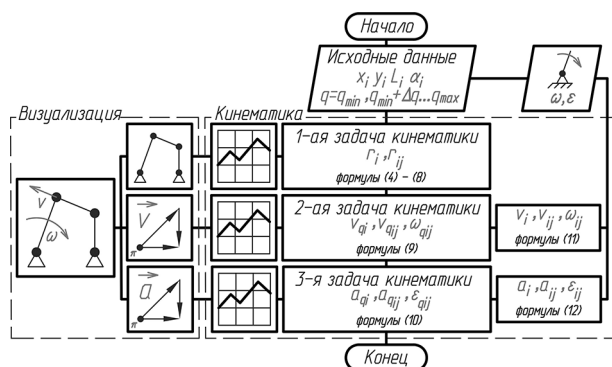


Рисунок 2 — Блок-схема алгоритма кинематического анализа
Figure 2 — Block diagram of the kinematic analysis algorithm

го звена, т. е. с учетом как его угловой скорости, так и углового ускорения (при условии, что данные величины постоянны):

$$\underline{v}_r(\varphi) = \underline{v}_{qr}(\varphi) \cdot \omega; \quad \omega_r(\varphi) = \omega_{qr}(\varphi) \cdot \omega; \quad (11)$$

$$\underline{a}_r(\varphi) = \underline{a}_{qr}(\varphi) \cdot \omega^2 + \underline{v}_{qr}(\varphi) \cdot \varepsilon; \quad (12)$$

$$\varepsilon_r(\varphi) = \varepsilon_{qr}(\varphi) \cdot \omega^2 + \omega_{qr}(\varphi) \cdot \varepsilon,$$

где ω и ε — угловая скорость (рад/с) и ускорение входного звена (рад/с²) соответственно.

Таким образом, система уравнений (4)–(12) позволяет определить все кинематические характеристики рассматриваемого рычажного механизма.

Результаты и обсуждение. Применение теории комплексных чисел в кинематическом анализе рычажных механизмов требует особой формы

вывода результатов расчета. Так, действительная часть вектора комплексного числа отвечает за проекцию на ось X прямоугольной системы координат, а мнимая — за проекцию на ось Y . При этом для аналогов угловых скоростей и ускорений нет необходимости отдельного выделения действительной и мнимой части. Полученные результаты кинематического анализа рассматриваемого рычажного механизма с применением теории комплексных чисел полностью совпали с результатами, приведенными в работе [3], и поэтому не будут повторно дублироваться в данной работе.

На сегодняшний день современные программные средства математического моделирования (например, математический пакет PTC MathCAD) благодаря своей эффективной работе с комплексными числами позволяют полностью автоматизировать процесс выполнения всех описанных выше этапов кинематического анализа согласно алгоритму, приведенному на рисунке 2.

Причем, учитывая широкие возможности современных вычислительных сред по графическому отображению данных, в структуру описанного алгоритма может быть включен специальный блок визуализации результатов расчетов (см. рисунок 2). Он предполагает возможность проведения визуализации кинематической схемы смоделированного рычажного механизма с отображением на ней всех интересующих векторных величин или представление их в виде отдельных графических планов. На рисунке 3 приведена такая визуализа-

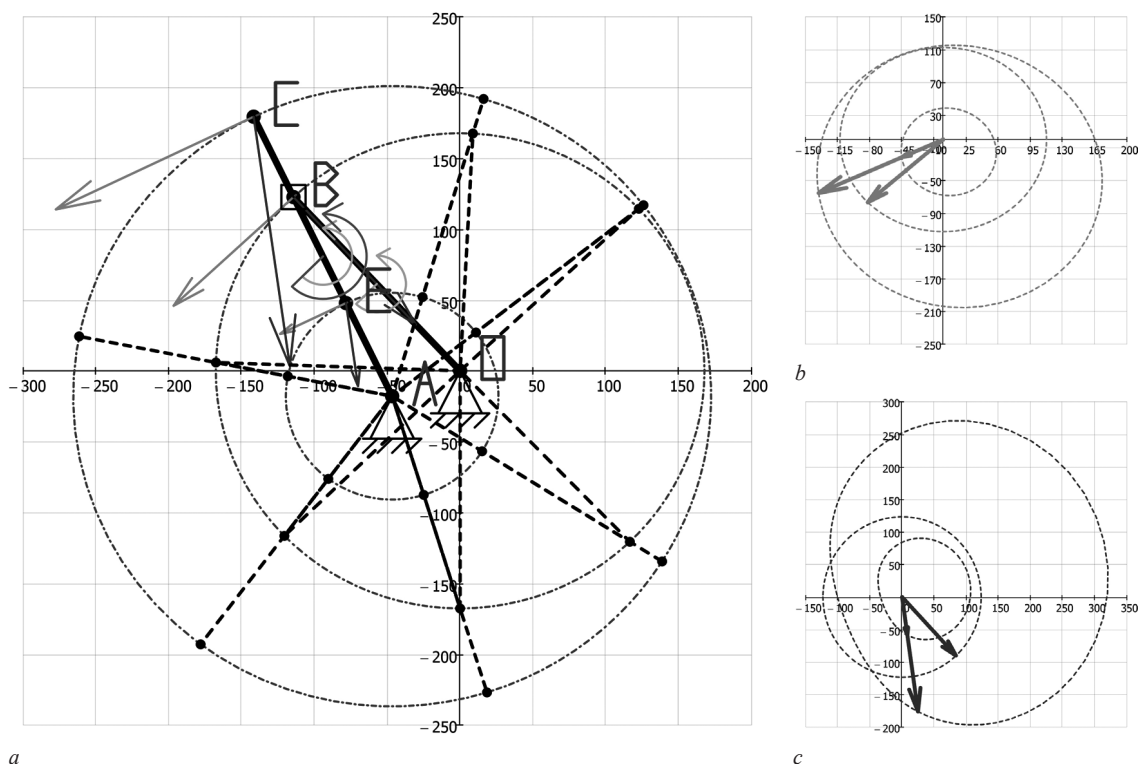


Рисунок 3 — Визуализация кинематики пальчикового механизма в PTC MathCAD при решении 1-й (а), 2-й (б) и 3-й (в) задач кинематического анализа

Figure 3 — Visualization of the kinematics of the finger mechanism in PTC MathCAD when solving the 1st (a), 2nd (b) and 3rd (c) kinematic analysis problems

ция, реализованная в математическом пакете PTC MathCAD [15, 16].

К достоинствам рассмотренного аналитического метода кинематического анализа с помощью теории комплексных чисел, по сравнению с другими аналитическими методами, можно отнести простоту и наглядность; использование только элементарных операций сложения (вычитания) и умножения; легкую адаптацию к современным математическим пакетам и языкам программирования. Несмотря на это, применение теории комплексных чисел ограничено только решением двумерных задач кинематического анализа, т. к. для решения пространственных задач требуется использование более сложных форм записи комплексных чисел.

Выводы. Представленный способ кинематического анализа, основанный на методе преобразования координат в неизменном базисе с применением теории комплексных чисел, обеспечивает нахождение кинематических параметров пальчикового механизма кулисного типа жатвенной части зерноуборочного комбайна для всех его положений. Данный способ позволяет уменьшить количество уравнений, необходимых для кинематического анализа плоских рычажных механизмов, и может найти свое эффективное применение как в учебной, так и в инженерной практике.

Список литературы

1. Труфляк, Е.В. Современные зерноуборочные комбайны: учеб. пособие для вузов / Е.В. Труфляк, Е.И. Трубилин. — 5-е изд., стер. — СПб.: Лань, 2023. — 320 с.
2. Miu, P. Combine harvesters: theory, modeling, and design / P. Miu. — 1st ed. — Boca Raton: CRC Press, 2015. — 482 p. — DOI: <https://doi.org/10.1201/b18852>.
3. Котов, А.В. Оптимизация параметров предохранительного элемента пальчикового механизма шнека жатки зерноуборочного комбайна / А.В. Котов // Тракторы и сельхозмашины. — 2023. — Т. 90, № 1. — С. 13–24. — DOI: <https://doi.org/10.17816/0321-4443-114970>.
4. Куцепенко, А.В. Геометрический анализ шарнирного механизма центробежного ограничителя скорости лифта с двумя выходными звеньями / А.В. Куцепенко // Механика машин, механизмов и материалов. — 2024. — № 4(69). — С. 61–69. — DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2024-4-69-61-69>.
5. Antonescu, O. Kinematic analysis of the windshield wiper mechanism with two parallel rocker blades / O. Antonescu, D. Antonescu, A. Ionita // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. — 2024. — Vol. 1303. — 9 p. — DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899x/1303/1/012041>.
6. Кинематический и силовой анализ механизма привода двухстанной очистки зерноуборочного комбайна / Д.А. Дубовик, В.И. Прибыльский, А.А. Новиков, А.Н. Вырский // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 2019. — № 6. — С. 78–90. — DOI: <https://doi.org/10.1134/S023571191906004X>.
7. Котов, А.В. Кинематический и силовой анализ механизма подъема наклонной камеры зерноуборочного комбайна с применением теории комплексных чисел / А.В. Котов, Д.Г. Кроль // Конструирование, использование и надежность машин сельскохозяйственного назначения: сб. науч. работ / Брянский ГАУ. — Брянск, 2025. — № 1(24). — С. 40–48.
8. Abhary, K. A unified analytical parametric method for kinematic analysis of planar mechanisms / K. Abhary // International Journal of Mechanical Engineering Education. — 2022. — Vol. 50, iss. 2. — P. 389–431. — DOI: <https://doi.org/10.1177/0306419020978175>.
9. Смирнов, Д.А. Кинематический анализ кулисного механизма с одной степенью свободы с неподвижными вращательными кинематическими парами / Д.А. Смирнов // Фундаментальные исследования. — 2014. — № 8–5. — С. 1069–1074.
10. Malcoci, I. Rocker mechanism from classical to modern kinematic analysis / I. Malcoci, M. Guțu // Journal of Engineering Science of the Technical University of Moldova. — 2020. — Vol. XXVII, no. 3. — P. 54–64. — DOI: <http://dx.doi.org/10.5281/zenodo.3949664>.
11. Артоболевский, И.И. Теория механизма и машин: учебник / И.И. Артоболевский. — 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1988. — 640 с.
12. Wilson, C.E. Kinematics and dynamics of machinery / C.E. Wilson, J.P. Sadler. — 3rd ed. — Pearson, 2013. — 848 p.
13. Привалов, И.И. Аналитическая геометрия: учебное пособие / И.И. Привалов. — 38-е изд. — СПб.: Лань, 2022. — 304 с.
14. Теория механизмов и машин: учеб. пособие / М.З. Коловский, А.Н. Евграфов, Ю.А. Семенов, А.В. Слоущ. — М.: Академия, 2008. — 557 с.
15. Котов, А.В. Способ графического отображения математических моделей плоских рычажных механизмов с помощью матриц однородного преобразования / А.В. Котов // XIX Машеровские чтения: материалы междунар. науч.-практич. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 24 окт. 2025 г.: в 2 т. / ВГУ им. П.М. Машерова; редкол.: Е.Я. Аршанский (гл. ред.) [и др.]. — Витебск, 2025. — Т. 1. — С. 25–28.
16. Петров, Г.Н. Визуализация расчетов в программах Excel и MathCAD / Г.Н. Петров, А.Н. Евграфов // Современное машиностроение. Наука и образование 2025: материалы 14-й Междунар. науч. конф., Санкт-Петербург, 18 июня 2025 г. / под ред. А.Н. Евграфова, А.А. Поповича / Санкт-Петербургский политехн. ун-т Петра Великого. — СПб., 2025. — С. 55–70. — DOI: <https://doi.org/10.18720/SPBPU/2/id25-99>.

KOTOV Andrey V., M. Sc. in Eng.

Leading Design Engineer¹

Postgraduate Student of the Department “Mechanics”²

E-mail: androskv@mail.ru

KROL Dmitriy G., Ph. D. in Phys. And Math., Assoc. Prof.

First Vice-Rector²

E-mail: kr-dmitry@gstu.by

¹JSC “Seismotekhnika”, Gomel, Republic of Belarus

²Sukhoi State Technical University of Gomel, Gomel, Republic of Belarus

Received September 18, 2025.

METHOD AND SOFTWARE IMPLEMENTATION OF KINEMATIC ANALYSIS OF A ROCKER MECHANISM

An analytical method of kinematic analysis of the rocker mechanism of the reaping part of a grain harvester using the theory of complex numbers, as well as an algorithm and its software implementation are presented. The use of complex numbers in the kinematic analysis of lever mechanisms makes it possible to optimize mathematical calculations by performing only elementary operations of addition (subtraction) and multiplication of complex numbers. An example of graphical visualization of the results of kinematic analysis in the mathematical package PTC MathCAD is given. The proposed method of kinematic analysis of plain lever mechanisms using the theory of complex numbers can find its effective application in relevant engineering and scientific calculations.

Keywords: rocker mechanism, reaping part, kinematic analysis, complex numbers, coordinate transformation method, algorithm

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2025-4-73-25-30>

References

1. Truflyak E.V., Trubilin E.I. *Sovremennyye zernouborochnyye kombayny* [Modern combine harvesters]. Saint Petersburg, Lan Publ., 2023. 320 p. (in Russ.).
2. Miu P. *Combine harvesters: theory, modeling, and design*. Boca Raton, CRC Press, 2015. 482 p. DOI: <https://doi.org/10.1201/b18852>.
3. Kotov A.V. Optimizatsiya parametrov predokhranitel'nogo elementa palchikovogo mekhanizma shneka zhatki zernouborochnogo kombayna [The optimization of parameters of a safety element of the finger mechanism of the header auger of a combine harvester]. *Tractors and agricultural machinery*, 2023, vol. 90, no. 1, pp. 13–24. DOI: <https://doi.org/10.17816/0321-4443-114970> (in Russ.).
4. Kutsepolenko A.V. Geometricheskii analiz sharnirnogo mekhanizma tsentrobezhnogo ograniчителя skorosti lifta s dvumya vykhodnymi zveniyami [Geometrical analysis of the hinge mechanism of a centrifugal lift speed limiter with two output links]. *Mechanics of machines, mechanisms and materials*, 2024, no. 4(69), pp. 61–69. DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2024-4-69-61-69> (in Russ.).
5. Antonescu O., Antonescu D., Ionita A. Kinematic analysis of the windshield wiper mechanism with two parallel rocker blades. *IOP conference series: materials science and engineering*, 2024, vol. 1303. DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899x/1303/1/012041>.
6. Dubovik D.A., Pribyl'skii V.I., Novikov A.A., Vyrs'kii A.N. Kinematicheskii i silovoy analiz mekhanizma privoda dvukhstannoy ochistki zernouborochnogo kombayna [Kinematic and power analysis of a two-cleaner shoe drive system of a grain harvester]. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*, 2019, no. 6, pp. 78–90. DOI: <https://doi.org/10.1134/S023571191906004X> (in Russ.).
7. Kotov A.V., Krol D.G. Kinematicheskii i silovoy analiz mekhanizma podema naklonnoy kamery zernouborochnogo kombayna s primeneniem teorii kompleksnykh chisel [Kinematic and force analysis of the inclined chamber lift mechanism of a combine harvester using complex numbers theory]. *Konstruirovaniye, ispolzovaniye i nadezhnost mashin selskokhozyaystvennogo naznacheniya*, 2025, no. 1(24), pp. 40–48 (in Russ.).
8. Abhary K. A unified analytical parametric method for kinematic analysis of planar mechanisms. *International journal of mechanical engineering education*, 2022, vol. 50, iss. 2, pp. 389–431. DOI: <https://doi.org/10.1177/0306419020978175>.
9. Smirnov D.A. Kinematicheskii analiz kulisnogo mekhanizma s odnoy stepenyu svobody s nepodvizhnymi vrashchatelnymi kinematicheskimi parami [Kinematic analysis of a one-degree-of-freedom slider mechanism with fixed turning kinematic pairs]. *Fundamental research*, 2014, no. 8–5, pp. 1069–1074 (in Russ.).
10. Malcoci I., Guțu M. Rocker mechanism from classical to modern kinematical analysis. *Journal of engineering science of the Technical University of Moldova*, 2020, vol. XXVII, no. 3, pp. 54–64. DOI: <http://dx.doi.org/10.5281/zenodo.3949664>.
11. Artobolevskiy I.I. *Teoriya mekhanizma i mashin* [Theory of mechanism and machines]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 640 p. (in Russ.).
12. Wilson C.E., Sadler J.P. *Kinematics and dynamics of machinery*. Pearson, 2013. 848 p.
13. Privalov I.I. *Analiticheskaya geometriya* [Analytical geometry]. Saint Petersburg, Lan Publ., 2022. 304 p. (in Russ.).
14. Kolovskiy M.Z., Evgrafov A.N., Semenov Yu.A., Sloushch A.V. *Teoriya mekhanizmov i mashin* [Theory of mechanisms and machines]. Moscow, Akademiya Publ., 2008. 557 p. (in Russ.).
15. Kotov A.V. Sposob graficheskogo otobrazheniya matematicheskikh modeley ploskikh ryuchazhnykh mekhanizmov s pomoshchyu matrits odnorodnogo preobrazovaniya [A method for graphical representation of mathematical models of plain lever mechanisms using homogeneous transformation matrices]. *Materialy mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii studentov, aspirantov i molodykh uchenykh "19 Masherovskie chteniya"* [Proc. International scientific and technical conference of students, postgraduates and young scientists "19th Masherov readings"]. Vitebsk, 2025, vol. 1, pp. 25–28 (in Russ.).
16. Petrov G.N., Evgrafov A.N. Vizualizatsiya raschetov v programmakh Excel i MathCAD [Visualization calculations in Excel and MathCAD programs]. *Materialy 14-y Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii "Sovremennoye mashinostroeniye. Nauka i obrazovaniye 2025"* [Proc. 14th International scientific conference "Modern mechanical engineering. Science and education 2025"]. Saint Petersburg, 2025, pp. 55–70. DOI: <https://doi.org/10.18720/SPBPU/2/id25-99> (in Russ.).