

ДИНАМИКА, ПРОЧНОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 629.113.001.1

А.Б. ДИК, канд. техн. наук, проф.

профессор-консультант кафедры «Автомобильный транспорт, строительные и дорожные машины»¹
E-mail: fai@istu.edu

А.И. ФЕДОТОВ, д-р техн. наук, проф.

профессор кафедры «Автомобильный транспорт, строительные и дорожные машины»¹
E-mail: fai.abs@yandex.ru

¹Иркутский национальный исследовательский технический университет, г. Иркутск, Российская Федерация

Поступила в редакцию 08.12.2025.

ДИНАМИЧЕСКИЕ И ФРИКЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ТОРМОЗЯЩЕГО КОЛЕСА С ЭЛАСТИЧНОЙ ШИНОЙ ПРИ ПЕРЕМЕННОЙ НОРМАЛЬНОЙ НАГРУЗКЕ

В статье приведены результаты анализа динамических и фрикционных свойств колеса с эластичной шиной. В основу анализа заложены результаты экспериментальных исследований автомобильного колеса с эластичной шиной, полученные на стенде с беговым барабаном в лаборатории ИРНИТУ. Приведенные в статье результаты исследования полезны специалистам, выполняющим проектирование автоматизированных систем, таких как ABS, TSR, ESP, а также разрабатывают методы управления процессами их функционирования.

Ключевые слова: колесо с эластичной шиной, динамические свойства шин, фрикционные характеристики шин, силовые и кинематические параметры колеса с эластичной шиной, колебания нормальной нагрузки на колесе, передаточные функции, передаточные коэффициенты, амплитудно-частотные и фазо-частотные функции

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2026-2-75-34-43>

Для моделирования движения современных колесных транспортных средств (КТС), с учетом процессов функционирования их многочисленных автоматизированных систем (АС), таких как ABS, TSR, ESP, необходимо знать взаимосвязи силовых и кинематических параметров их тормозящих колес. При этом обычно тормозной момент M_t рассматривается в качестве входного, управляющего параметра, а выходными параметрами являются продольная реакция R_x , а также кинематические параметры: угловая скорость ω , угловое замедление $\dot{\omega}$ и продольное проскальзывание s . Параметры ω и $\dot{\omega}$ используются АС в качестве сигналов обратной связи, на которых базируются алгоритмы функционирования этих систем регулирования. Поэтому представляет интерес оценка того, в какой мере переменный характер нормальной нагрузки на колеса R_z , вызванный действием на

них неровностей опорной поверхности и связанный с колебаниями поддресоренных и неподдресоренных масс КТС, может повлиять на изменение силовых и кинематических параметров колес.

Для упрощения анализа допустим, что колесо с эластичной шиной нагружено постоянным тормозным моментом M_t и движется без увода с постоянной скоростью V по ровной горизонтальной и недеформируемой опорной поверхности со стабильными фрикционными свойствами, а переменная составляющая нормальной нагрузки R_z обусловлена изменением динамического радиуса колеса r_d .

Продольную реакцию колеса в этом случае удобно представить в виде, предлагаемом в работе [1]:

$$R_x = R_{\phi \max} \cdot f(s), \quad (1)$$

где $R_{\phi \max}$ — максимально возможная при данной нормальной нагрузке R_z касательная реакция R_x , ограниченная предельными фрикционными свойствами колеса и опорной поверхности; $f(s)$ — некоторая функция проскальзывания s .

Протекание функции $f(s)$ определяется рядом параметров: скоростью качения V , коэффициентом сцепления ϕ , нормальной нагрузкой на колесо R_z , давлением в шине — не приводящих к качественному изменению ее формы [1]. По аналогии с известной зависимостью удельной тормозной силы от проскальзывания, функцию $f(s)$ можно назвать «нормированной диаграммой» (рисунок 1), поскольку она получается простым нормированием известной ϕ - s -диаграммы по ее максимальному значению ϕ_{\max} .

Для анализа влияния нормальной нагрузки на характер изменения нормированной диаграммы на шинном тестере с беговым барабаном ИРНТУ [3] были проведены экспериментальные исследования, которые показали (см. рисунок 1), что для рассматриваемых условий функция $f(s)$ практически сохраняется неизменной в достаточно широком диапазоне изменения нормальных нагрузок ($\approx 35\%$ от номинальной нагрузки на колесо).

Полученные экспериментальные зависимости вполне хорошо аппроксимируются предлагаемым в работе [3] эмпирическим выражением вида

$$f(s) = \sin[a \cdot \arctg(b \cdot s)], \quad (2)$$

где a и b — эмпирические коэффициенты, которые определяют протекание нормированной функции проскальзывания $f(s)$ (см. рисунок 1).

Коэффициенты (2) рассчитывали по формулам:

$$\begin{cases} \left. \frac{df(s)}{ds} \right|_{s=0} = a \cdot b = \eta, \\ f(s=1) = \sin[\pi - \arctg b] = f_6, \end{cases} \quad (3)$$

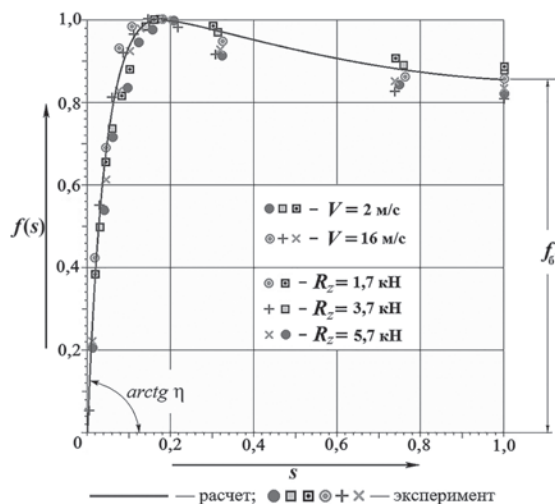


Рисунок 1 — Нормированная ϕ - s -диаграмма, построенная на основе стационарных фрикционных характеристик шины 6.45-23

Figure 1 — Normalized ϕ - s diagram based on stationary friction characteristics of the tire 6.45-23

где $\eta = \frac{K_s}{R_{\phi}}$ — удельная «жесткость» проскальзывания, отражающая наклон нормированной $f(s)$ диаграммы в нулевой точке координатных осей;

$K_s = \left. \frac{dR_x}{ds} \right|_{s=0}$ — «жесткость» проскальзывания, отражающая наклон графика зависимости $R_x(s)$ в нулевой точке координатных осей; $f_6 = \frac{R_6}{R_{\phi}}$ — коэффициент, показывающий величину снижения фрикционных свойств колеса, работающего в блоковом режиме.

Приближенное значение системы уравнений (3) дает следующие значения для коэффициентов:

$$b \approx \frac{(1 + b_1^2) \cdot \arctg b_1 - b_1}{K_z (1 + b_1^2) - 1}, \quad (4)$$

где $K_z = \frac{\pi - \arctg f_6}{\eta}$ — коэффициент, который оп-

ределяется на основе исходных данных, полученных с использованием графика (см. рисунок 1).

$$a \approx \frac{\eta}{b}. \quad (5)$$

Параметры, определяющие форму функции $f(s)$, описываемой выражением (2), можно корректировать по скорости V движения КТС, по величине нормальной нагрузки R_z и другим факторам, но в данной задаче это приведет лишь к неоправданному усложнению описания характеристик колеса, затрудняющему их последующий анализ.

Выражение для проскальзывания s как кинематического параметра, отражающего изменение радиуса качения колеса вследствие его тангенциальной эластичности, а также неустановившийся характер продольной (крутильной) деформации может быть записано, как это показано в работе [3], в следующем виде:

$$s \approx 1 - \frac{\omega \cdot r_{kc}}{V} - \frac{\dot{R}_x}{C_x \cdot V}. \quad (6)$$

где \dot{R}_x — скорость изменения продольной реакции; C_x — коэффициент пропорциональности между продольной реакцией и продольной деформацией шины (смещением площадки контакта), имеющий смысл продольной жесткости шины.

Однако, как показано в той же работе [3], для нагруженного значительным тормозным моментом колеса (как это и имеет место при работе ABS) влияние неустановившегося характера продольной деформации на динамические характеристики колеса с эластичной шиной является несущественным. Это позволяет в первом приближении записать:

$$s \approx 1 - \frac{\omega \cdot r_{kc}}{V}. \quad (7)$$

Иными словами, предполагается, что нормированная φ - s -диаграмма сохраняется неизменной и при неустановившемся изменении продольной реакции, а проскальзывание s определяется только угловой скоростью ω и радиусом качения в свободном режиме $r_{\text{кк}}$.

На величину радиуса качения колеса в свободном режиме $r_{\text{кк}}$ влияет давление рабочего тела и нагрузка на колесо R_z . При заданном давлении в шине зависимость радиуса $r_{\text{кк}}$ учтем, как это предлагается в работе [4], в виде:

$$r_{\text{кк}} = r_0 [1 - \mu(R_z)], \quad (8)$$

где r_0 — радиус свободного, ненагруженного колеса; $\mu(R_z)$ — некоторая функция нормальной нагрузки колеса.

Экспериментальная зависимость типа $\mu(R_z)$, полученная в результате стендовых испытаний (рисунок 2), имеет нелинейный характер и достаточно точно аппроксимируется выражением вида:

$$\mu(R_z) = C_1 \sqrt{R_z} + C_2 \cdot R_z, \quad (9)$$

где C_1 и C_2 — постоянные для данной шины и при данном давлении воздуха в ней коэффициенты.

Так, для испытанной шины размером 6,45-13 модели М-151 при давлении рабочего тела $P_w = 170$ кПа эти коэффициенты соответственно равны:

$$C_1 = 0,0183 \text{ кН}^{-1/2}; \quad C_2 = 0,004 \text{ кН}^{-1}.$$

Выражения (1), (7) и (8) с учетом (2) и (9) вместе с уравнением вращательного движения колеса, записанные в форме, предлагаемой в работе [4], образуют систему уравнений относительно переменных R_x, s, ω и $r_{\text{кк}}$ [8, 9, 16]:

$$\begin{cases} J_{\text{к}} \cdot \dot{\omega} = -(M_{\text{т}} + M_{f_c}) + R_x + r_{\text{кк}}, \\ R_x = R_z \cdot \varphi_{\text{max}} \cdot \sin[a \cdot \text{arctg}(b \cdot s)], \\ s = 1 - \frac{\omega \cdot r_{\text{кк}}}{V}, \\ r_{\text{кк}} = r_0 [1 - C_1 \sqrt{R_z} + C_2 \cdot R_z], \end{cases} \quad (10)$$

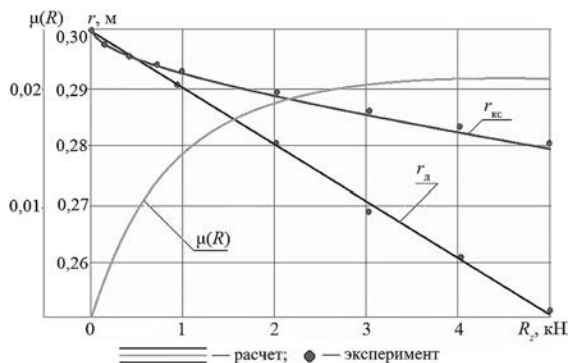


Рисунок 2 — Зависимость радиуса качения колеса с эластичной шиной в свободном режиме $r_{\text{кк}}$, а также динамического радиуса r_d и функции $\mu(R_z)$ от нормальной нагрузки R_z на колесо

Figure 2 — Dependence of the rolling radius of a wheel with an elastic tire in the free mode of the $r_{\text{кк}}$, as well as the dynamic radius of the r_d and the function $\mu(R_z)$ on the normal load R_z on the wheel

где $M_{f_c} = R_z \cdot f_c \cdot r_{\text{кк}}$ — момент сопротивления качению в свободном режиме; f_c — коэффициент сопротивления качению; $J_{\text{к}}$ — момент инерции колеса с шиной, $\text{кг} \cdot \text{м}^2$.

Данная система уравнений является нелинейной и решается на ЭВМ с применением численных методов.

Для оценки работоспособности такого описания характеристик тормозящего колеса были проведены экспериментальные исследования взаимосвязей силовых и кинематических параметров колеса, нагруженного постоянным тормозным моментом $M_{\text{т}}$ и переменной нормальной нагрузкой R_z . Эти исследования проводились на том же стенде и с той же шиной размером 6,45-13, что и упомянутые выше эксперименты по определению φ - s -диаграмм и зависимости радиуса качения в свободном режиме $r_{\text{кк}}$ от нормальной нагрузки R_z .

В качестве примера на рисунке 3 представлены результаты двух испытаний колеса с эластичной шиной размером 6,45-13, тормозящего при частоте изменения нормальной нагрузки ν , равной 3 и 7 Гц.

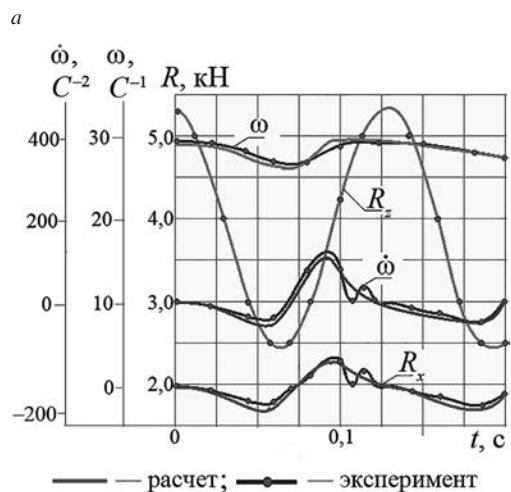
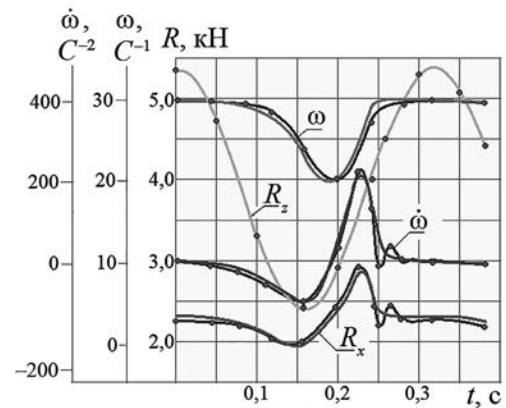


Рисунок 3 — Изменение силовых и кинематических параметров процесса торможения колеса с эластичной шиной 6,45-13 при синусоидальных колебаниях нормальной нагрузки R_z с частотой ν : а — 3 Гц; б — 7 Гц

Figure 3 — Changes in the power and kinematic parameters of the braking process of the wheel with the elastic tire 6.45-13 under sinusoidal fluctuations of the normal load R_z with a frequency ν : а — 3 Hz; б — 7 Hz

Средняя величина нормальной нагрузки соответствовала примерно номинальной для данной шины при данном давлении ($R_{z\text{cp}} = 3,9$ кН), а амплитуда синусоидальных колебаний нагрузки составляла $\Delta R_z = 1,0$ кН. Значения тормозного момента M_T при этом были равны $0,63$ кН·м для $\nu = 3$ Гц и $0,54$ кН·м для $\nu = 7$ Гц, что примерно соответствует 68 и 56 % от предельного по сцеплению тормозного момента при номинальной нормальной нагрузке.

Высокая корреляция результатов экспериментальных исследований процесса торможения колеса с результатами расчетов, полученными с использованием математического описания (10), дает право констатировать их неплохое качественное и количественное соответствие для продольной реакции R_x , угловой скорости ω и углового ускорения $\dot{\omega}$. Это подтверждает корректность принятых допущений и свидетельствует о работоспособности предлагаемого описания характеристик колеса.

Так, в частности, максимальное расхождение величин проскальзываний, вычисленных по выражениям (6) и (7), не превышает для рассматриваемых режимов 3 %. Значения скорости изменения

продольной реакции R_x при этом непосредственно совпадают с экспериментальными данными.

Известно, что переменный характер нагрузки R_z довольно существенно влияет на протекание процесса торможения колеса, особенно при больших значениях тормозного момента M_T . Так, при постоянной величине тормозного момента $M_T = 0,63$ кН·м и частоте колебаний нормальной нагрузки $\nu = 3$ Гц минимальное и максимальное значения углового ускорения $\dot{\omega}$ составляют -118 и 269 рад/с² соответственно.

Если учесть, что пороговые значения окружного замедления, при достижении которых подается сигнал на растормаживание колеса, у существующих ABS составляют $(0,8-2,5)g$ [5] (для рассматриваемого $\dot{\omega} = -(26...82)$ рад/с²), то влияние переменного характера нормальной нагрузки R_z на работу АС следует считать значительным и это необходимо учитывать при разработке и создании АС.

Более наглядно влияние нормальной нагрузки R_z на рассматриваемые силовые и кинематические параметры колеса иллюстрируются непосредственно зависимостями $R_x(R_z)$, $\omega(R_z)$, $\dot{\omega}(R_z)$ и $s(R_z)$ (рисунок 4), построенными по приведен-

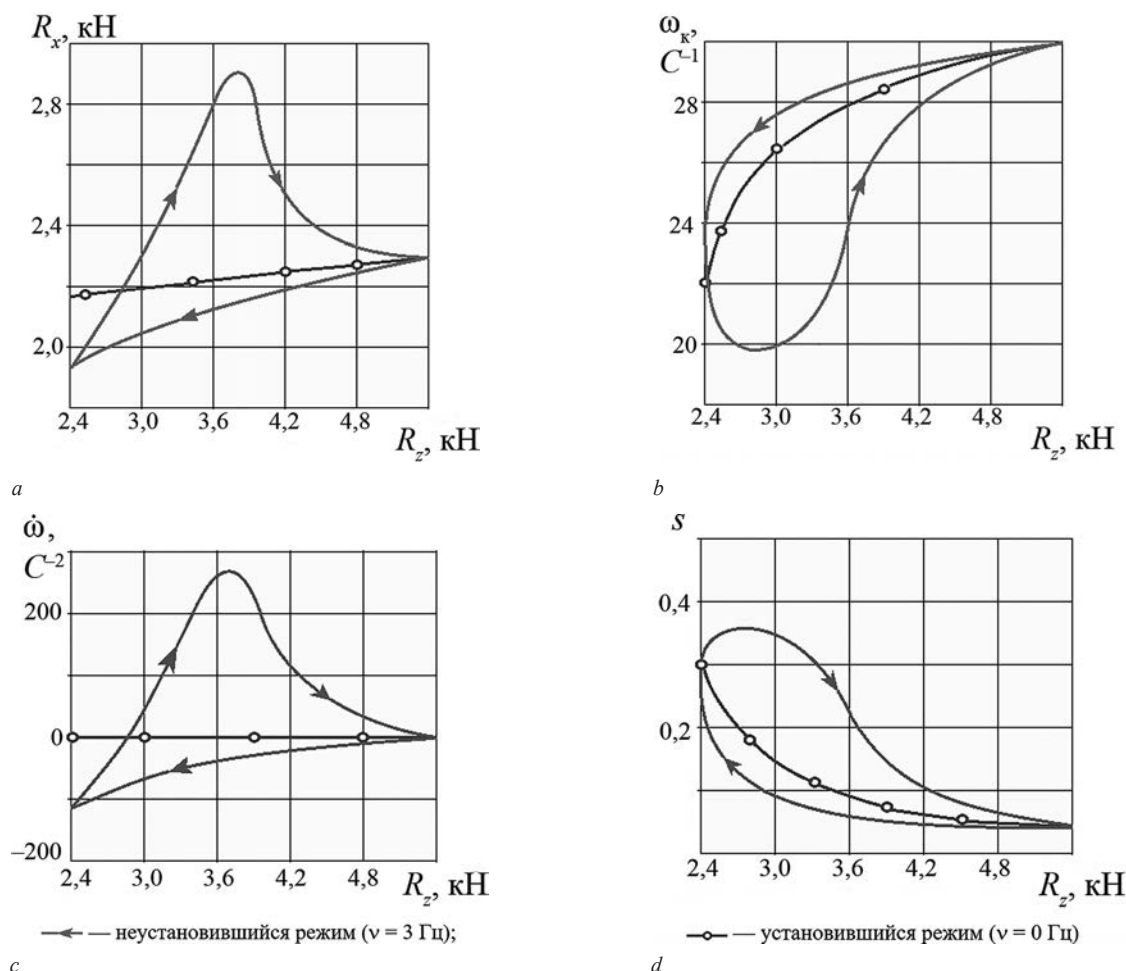


Рисунок 4 — Статические и динамические зависимости кинематических и силовых параметров тормозящего колеса от нормальной нагрузки: а — продольной реакции R_x ; б — угловой скорости ω ; в — углового ускорения $\dot{\omega}$; д — проскальзывания шины s
 Figure 4 — Static and dynamic dependences of the kinematic and power parameters of the braking wheel on the normal load: а — longitudinal reaction R_x ; б — angular velocity ω ; в — angular acceleration $\dot{\omega}$; д — tire slip s

ным выше данным (см. рисунок 3 а). Продольная реакция R_x (см. рисунок 4 а) и угловое ускорение $\dot{\omega}$ (см. рисунок 4 с) весьма незначительно реагируют на величину R_z (статическая характеристика $\dot{\omega}(R_z)$ лежит на нулевой линии, а $R_x(R_z)$ лишь незначительно отклоняется от горизонтали, что обусловлено изменением силового плеча приложения реакции R_x), но, главным образом, на скорость изменения R_z (динамическая составляющая этих параметров максимальна в области максимального изменения R_z).

Угловая скорость ω (см. рисунок 4 б) и проскальзывание s (см. рисунок 4 д) реагируют как на изменение нагрузки R_z , что видно из соответствующих статических характеристик и объясняется уменьшением $R_{\phi \max}$, так и на скорость изменения R_z . При этом динамический характер R_z проявляется в большей мере именно в области малых значений R_z , где статическая характеристика существенно изменяется и скорость изменения R_z еще значительна.

В целом же отметим, что протекание таких важных параметров колеса, как R_x , ω , $\dot{\omega}$ и s , работающего при заданной постоянной величине тормозного момента и синусоидальных колебаниях нормальной нагрузки, зависит как от скорости и амплитуды ее изменения, так и от режима качения колеса. В свою очередь режим качения тормозящего колеса определяется проскальзыванием шины s , которое зависит от величины тормозного момента M_T и момента по сцеплению M_ϕ .

По мере увеличения степени реализации сцепных свойств влияние неустановившегося характера R_z на силовые и кинематические параметры колеса увеличивается, что подтверждает выводы, сделанные в работе [6] по результатам исследования процесса качения тормозящего колеса через единичную неровность.

Для анализа характера изменения силовых и кинематических параметров тормозящего колеса с эластичной шиной, нагруженного переменной нормальной нагрузкой, удобно ввести такой показатель:

$$f_T = \frac{M_T + M_{fc}}{r_{kc}} \cdot \frac{1}{R_z \cdot \phi_{\max}}, \quad (11)$$

представляющий собой отношение тормозной силы, определяемой тормозным моментом M_T , к предельно возможной при данной нагрузке касательной реакции R_x .

Если нанести значения этого показателя на нормированную ϕ - s -диаграмму (рисунок 5), то получим картину, эквивалентную так называемой фазовой характеристике процесса регулирования АС [5]. В нашем случае изменение показателя f_T происходит не за счет изменения момента M_T , а за счет переменной нормальной нагрузки на колесо R_z при постоянном значении подведенного момента M_T .

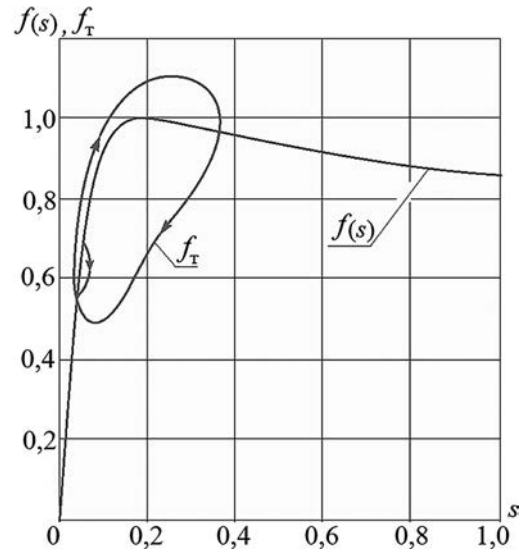


Рисунок 5 — Нормированная фазовая характеристика динамического процесса изменения нормальной нагрузки у колеса с эластичной шиной в тормозном режиме
Figure 5 — Normalized phase characteristic of the dynamic process of changing the normal load of the wheel with the elastic tire in braking mode

Следует отметить, что для анализа рабочего процесса АС с учетом как переменного M_T , так и переменной R_z предлагаемая форма фазовой характеристики (см. рисунок 5) является более удобной, по меньшей мере в пределах сохранения относительной независимости нормированной диаграммы от нормальной нагрузки.

Степень воздействия переменной нормальной нагрузки на силовые и кинематические параметры колеса зависит как от частоты изменения нагрузки R_z , так и от величины параметра f_T , определяющего режим установившегося качения колеса. Для более подробного анализа влияния этих факторов на динамические характеристики колеса по переменной нормальной нагрузке воспользуемся методикой, аналогичной приведенной в работе [3] для переменного тормозного момента. Для этого представим колесо в виде «черного ящика» (рисунок 6), на вход которого подается нормальная нагрузка R_z и заданная величина тормозного момента. Выходными параметрами «черного ящика» являются продольная реакция R_x , угловая скорость ω , угловое ускорение $\dot{\omega}$, а также проскальзывание s .

Предположим, что нормальная нагрузка изменяется относительно некоторого среднего значения R_{z0} :

$$R_z = R_{z0} + \Delta R_z,$$

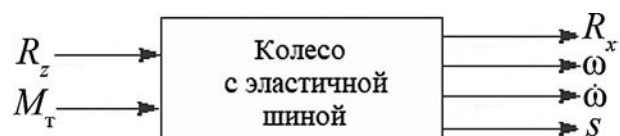


Рисунок 6 — Колесо с эластичной шиной как динамическая система
Figure 6 — Wheel with the elastic tire as a dynamic system

причем динамическая составляющая ΔR_z достаточно мала, чтобы зависимости $f(s)$ и $r_{kc}(R_z)$, определяющие нелинейность системы уравнений (10), в диапазоне их изменения можно было принять линейными и представить в виде:

$$f(s) = f(s_0) + \partial_s \cdot \Delta s; \quad r_{kc} = r_{kco} + \partial_r \cdot \Delta R_z,$$

где $f(s_0)$ и r_{kco} — параметры, соответствующие установившемуся состоянию при $R_z = R_{z0}$; $\partial_s = \frac{df(s)}{ds}$, $\partial_r = \frac{dr_{kc}}{ds}$ — производные от соответствующих зависимостей в точках установившегося состояния.

Преобразуем уравнения, входящие в систему (10), посредством разложения в ряд Тейлора. Пренебрегая изменением момента сопротивления качению ($M_f = \text{const}$) и учитывая, что остальные параметры также изменяются в окрестности некоторого установившегося состояния, а $\dot{\omega} = \frac{M_T + M_{fc}}{J_k} + R_{x0} \frac{r_{kco}}{J_k}$, получим:

$$\begin{cases} \Delta R_x = \frac{\partial R_x}{\partial R_z} \cdot \Delta R_z + \frac{\partial R_x}{\partial s} \cdot \Delta s, \\ \Delta \dot{\omega} = \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial R_x} \cdot \Delta R_x + \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial r_{kc}} \cdot \Delta r_{kc}, \\ \Delta s = \frac{\partial s}{\partial \omega} \cdot \Delta \omega + \frac{\partial s}{\partial r_{kc}} \cdot \Delta r_{kc}, \\ \Delta r_{kc} = \frac{\partial r_{kc}}{\partial R_z} \cdot \Delta R_z. \end{cases} \quad (12)$$

Частные производные, входящие в эту систему, определим дифференцированием исходных уравнений (10) при значениях переменных, соответствующих установившемуся состоянию:

$$\frac{\partial R_x}{\partial R_z} = \varphi_{\max} \cdot f_{o(s)}; \quad \frac{\partial R_x}{\partial s} = R_{z0} \cdot \varphi_{\max} \cdot \partial_s; \quad \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial R_x} = \frac{r_{kco}}{J_k};$$

$$\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial r_{kc}} = \frac{R_{x0}}{J_k}; \quad \frac{\partial s}{\partial \omega} = -\frac{r_{kco}}{V}; \quad \frac{\partial s}{\partial r_{kc}} = -\frac{\omega}{V}.$$

С учетом этих выражений, а также того, что

$$f(s_0) = \frac{R_{x0}}{R_{z0} \cdot \varphi_{\max}}, \quad \omega_0 = \frac{(1-s_0)V}{r_{kco}} \quad \text{и} \quad R_{x0} = \frac{M_T + M_{fc}}{r_{kc}},$$

получим следующую линеаризованную систему уравнений в приращениях переменных, которую целесообразно сразу записать в операторной форме:

$$\begin{cases} \Delta R_x(p) = \frac{M_T + M_{fc}}{r_{kco} \cdot R_{z0}} \cdot \Delta R_z(p) + R_{z0} \cdot \varphi_{\max}, \\ \Delta \omega(p) = \frac{r_{kco}}{J_k} \cdot \Delta R_x \cdot (p) + \frac{M_T + M_{fc}}{r_{kco} \cdot J_k} \cdot \partial_r \cdot \Delta R_z(p), \\ \Delta s(p) = -\frac{r_{kco}}{V} \cdot \Delta \omega(p) - \frac{1-s_0}{r_{kco}} \cdot \partial_r \cdot \Delta R_z(p), \end{cases} \quad (13)$$

где $\Delta R_z(p)$, $\Delta R_x(p)$, $\Delta \omega(p)$, $\Delta s(p)$ — изображения соответствующих переменных по Лапласу; $p = \frac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования.

Используя систему (13), составим схему динамических процессов колеса с эластичной шиной (рисунок 7).

Представленная на рисунке 7 схема включает звенья 1–6, обеспечивающие усиление, звено 7 — интегрирование, а также элементы 8–10 — процедуру сравнения. Передаточные коэффициенты усилительных звеньев характеризуют следующие преобразования сигналов:

- $K_1 = -\frac{1-s_0}{r_{kco}} \cdot \partial_r$ — нормальной нагрузки R_z в проскальзывание s , связанное с изменением радиуса качения r_{kc} ;
- $K_2 = -\frac{r_{kco}}{V}$ — угловой скорости ω в проскальзывание s ;
- $K_3 = \frac{M_T + M_{fc}}{r_{kco} \cdot R_{z0}}$ — нормальной реакции R_z в продольную реакцию R_x при изменении предельной сцепной силы;
- $K_4 = R_{z0} \cdot \varphi_{\max} \cdot \partial_s$ — проскальзывания s в продольную реакцию R_x ;
- $K_5 = \frac{M_T + M_{fc}}{r_{kco} \cdot J_k} \cdot \partial_r$ — нормальной реакции R_z в угловое ускорение $\dot{\omega}$ при изменении силового плеча r_{kc} приложения к колесу реакции R_x ;
- $K_6 = \frac{r_{kco}}{J_k}$ — продольной реакции R_x в угловое ускорение $\dot{\omega}$.

Некоторые из этих передаточных коэффициентов весьма существенно зависят от режима качения колеса (рисунок 8), характеризуемого при данной величине R_z уровнем тормозного момента M_T (параметром $f_{т0}$ или соответствующим проскальзыванием s_0).

Важно, что при $s_0 = 0$ нормальная нагрузка R_z изменяет динамические свойства системы (см. рисунок 7) посредством звена 1 ($K_3 = K_5 = 0$), изменяя

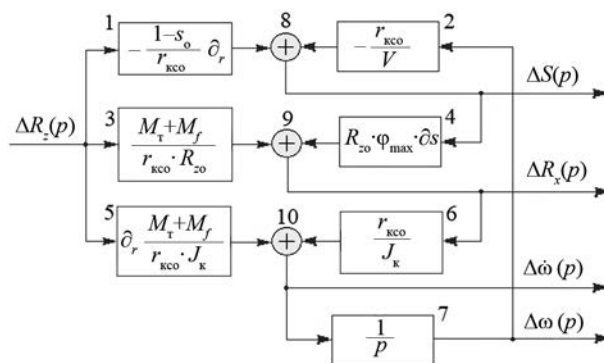


Рисунок 7 — Структурная схема динамических процессов колеса с эластичной шиной, тормозящего при переменной нагрузке R_z
Figure 7 — Structural diagram of dynamic processes of the wheel with the elastic tire braking under variable load R_z

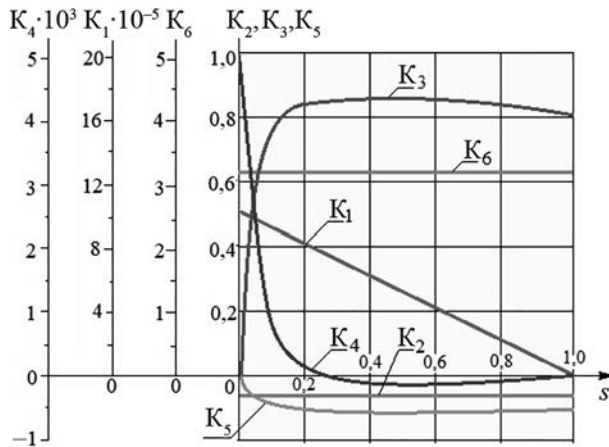


Рисунок 8 — Графики изменения передаточных коэффициентов от проскальзывания s
 Figure 8 — Graphs of gear ratio changes due to slip s

силовой радиус колеса $r_{к\omega}$, т. е. параметр, определяющий величину проскальзывания s .

С ростом проскальзывания s_0 доминирующим становится воздействие R_{z2} , через звено 3 и в области больших проскальзываний ($\partial s = 0$) влияние на R_x через изменение кинематических параметров колеса (обратную связь, образуемую звеньями 2, 4, 6, 7) полностью завершается, а изменение R_x вызвано исключительно изменением фрикционных свойств шины с опорной поверхностью.

Очевидно, что элементы передаточных функций, которые представлены на схеме (см. рисунок 7), влияют на выходные параметры системы одновременно и очень по-разному. Поэтому целесообразно рассматривать передаточные функции каждого выходного параметра индивидуально. Так, на основании структурной схемы (см. рисунок 7) можно записать:

$$W_s = K_1 + K_2 \cdot W_{\omega}; \quad W_x = K_3 + K_4 \cdot W_s; \quad (14)$$

$$W_{\omega} = K_5 + K_6 \cdot W_x; \quad W_{\omega} = W_{\omega} \cdot \frac{1}{p},$$

где $W_s, W_x, W_{\omega}, W_{\omega}$ — передаточные функции соответствующих параметров по нормальной нагрузке.

Решим систему (14) и определим передаточные функции:

$$W_x = \left[(K_3 + K_4 \cdot K_1) \cdot T_j p - \frac{K_5}{K_6} \right] \cdot \frac{1}{1 + T_j p}; \quad (15)$$

$$W_{\omega} = K_6 \cdot \left[\frac{K_5}{K_6} + (K_3 + K_4 \cdot K_1) \right] \cdot T_j p \cdot \frac{1}{1 + T_j p}; \quad (16)$$

$$W_{\omega} = K_6 \cdot \left[\frac{K_5}{K_6} + (K_3 + K_4 \cdot K_1) \right] \cdot T_j \cdot \frac{1}{1 + T_j p}; \quad (17)$$

$$W_s = \left[- \left(\frac{K_5}{K_6} + K_3 \right) \frac{1}{K_4} + K_1 \cdot T_j p \right] \cdot \frac{1}{1 + T_j p}, \quad (18)$$

где T_j — постоянная времени обратной связи, образуемой звеньями 2, 4, 6, 7 (см. рисунок 7), отра-

жающая влияние инерции колеса на его динамические характеристики:

$$T_j = - \frac{1}{K_1 \cdot K_4 \cdot K_6} = \frac{J_k}{r_{к\omega}^2 \cdot R_{z0} \cdot \varphi_{\max}}.$$

Постоянная времени T_j с увеличением проскальзывания s_0 резко увеличивается из-за падения ∂s , а затем, при $s > s_{кр}$, становится отрицательной, что указывает на неустойчивость процессов в этой зоне.

Функции (15)–(18) позволяют выявить влияние передаточных коэффициентов K_1, \dots, K_6 на связанные с ними передаточные функции. Это позволит установить влияние преобразующих свойств этих функций на выходные характеристики колеса, тормозящего в условиях колебаний нормальной нагрузки. Например, в области больших проскальзываний $K_3 \gg K_4 \cdot K_1$ и $\frac{K_5}{K_6} \ll K_3$, что позволяет пренебречь в этой области изменением радиуса качения $r_{к\omega}$ при описании характеристик колеса с шиной.

Заменим в функциях (15)–(18) параметр p в виде $p = i \cdot \Omega$ (где $\Omega = 2\pi \cdot \nu$ — круговая частота; $i = \sqrt{-1}$). Получим выражения для амплитудно-частотных (АЧХ) и фазо-частотных (ФЧХ) характеристик:

- продольной реакции R_x :

$$H_{\Omega x} = K_{x0} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{K_{zx}}{K_{x0}} \right)^2 \cdot T_j^2 \cdot \Omega^2}{1 + T_j^2 \cdot \Omega^2}}; \quad (19)$$

$$\Theta_{\Omega x} = -\text{arctg} \cdot \left[T_j \cdot \Omega \frac{1 - \frac{K_{zx}}{K_{x0}}}{1 + T_j^2 \cdot \Omega^2 \left(\frac{K_{zx}}{K_{x0}} \right)^2} \right];$$

- угловой скорости ω :

$$H_{\Omega \omega} = K_{\omega 0} \frac{1}{\sqrt{1 + T_j^2 \cdot \Omega^2}}; \quad \Theta_{\Omega \omega} = -\text{arctg} \cdot T_j \cdot \Omega; \quad (20)$$

- углового ускорения $\dot{\omega}$:

$$H_{\Omega \dot{\omega}} = K_{\dot{\omega} 0} \frac{\Omega}{\sqrt{1 + T_j^2 \cdot \Omega^2}}; \quad \Theta_{\Omega \dot{\omega}} = \text{arctg} \cdot \frac{1}{T_j \cdot \Omega}; \quad (21)$$

- проскальзывания s :

$$H_{\Omega s} = K_{s0} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{K_1}{K_{s0}} \right)^2 \cdot T_j^2 \cdot \Omega^2}{1 + T_j^2 \cdot \Omega^2}}; \quad (22)$$

$$\Theta_{\Omega s} = -\text{arctg} \cdot T_j \cdot \Omega \frac{1 - \frac{K_1}{K_{s0}}}{1 + T_j^2 \cdot \Omega^2 \cdot \left(\frac{K_1}{K_{s0}} \right)^2},$$

где K_{x_0} , K_{ω_0} , K_{s_0} — передаточные коэффициенты, характеризующие соответствующие передаточные функции колеса с эластичной шиной в установившемся режиме:

$$K_{x_0} = \frac{K_5}{K_6}; K_{\omega_0} = K_5 + K_6 \cdot K_{zx}; K_{s_0} = \left(\frac{K_5}{K_6} + K_3 \right) \cdot \frac{1}{K_4};$$

$K_{zx} = K_3 + K_1 \cdot K_4$ — передаточный коэффициент прямой связи от R_z к R_x .

В качестве примера на рисунке 9 представлены АЧХ и ФЧХ, рассчитанные по приведенным выше формулам для двух характерных случаев: малого проскальзывания $s_0 = 0,05$ и большого проскальзывания $s_0 = 0,3$, что соответствует значениям параметра f_T 0,60 и 0,995.

Численные значения параметров, определяющих протекание этих характеристик, соответствуют шине 6,45-13 при $R_{z_0} = 3,9$ кН, $V = 8,76$ м/с и $J_k = 0,9$ кг · м². Посчитанные величины передаточных коэффициентов $K_1, \dots, K_6, K_{x_0}, K_{s_0}$ показаны в таблице.

По результатам выполненных расчетов АЧХ и ФЧХ (см. рисунок 9) можно заметить, что при малой степени реализации сцепных свойств ($f_T = 0,6$; $s_0 = 0,05$) переменный характер нормальной реак-

Таблица — Числовые значения передаточных коэффициентов амплитудно-частотных и фазо-частотных характеристик шины 6,45-13 при $R_{z_0} = 3,9$ кН, $V = 8,76$ м/с
Table — Numerical values of the transmission coefficients of the amplitude-frequency and phase-frequency characteristics of the tire 6.45-13 with $R_{z_0} = 3.9$ kN, $V = 8.76$ m/s

Параметры	$s_0 = 0,05$	$s_0 = 0,3$
K_1	0,000095	0,000074
K_2	-0,03377	-0,03377
K_3	0,51	0,865
K_4	2830,4	9,8
K_5	-0,0572	-0,09696
K_6	3,1556	3,1556
K_{x_0}	0,0181	0,0307
K_{ω_0}	0,008	2,528
K_{s_0}	0,000174	0,0851
T_j	0,00332	0,9575

ции не вызывает существенных изменений силовых и кинематических параметров колеса во всем диапазоне рассмотренных частот (АЧХ малы), лишь R_x и $\dot{\omega}$ имеют значительный фазовый сдвиг, но при малых АЧХ это не имеет практического значения.

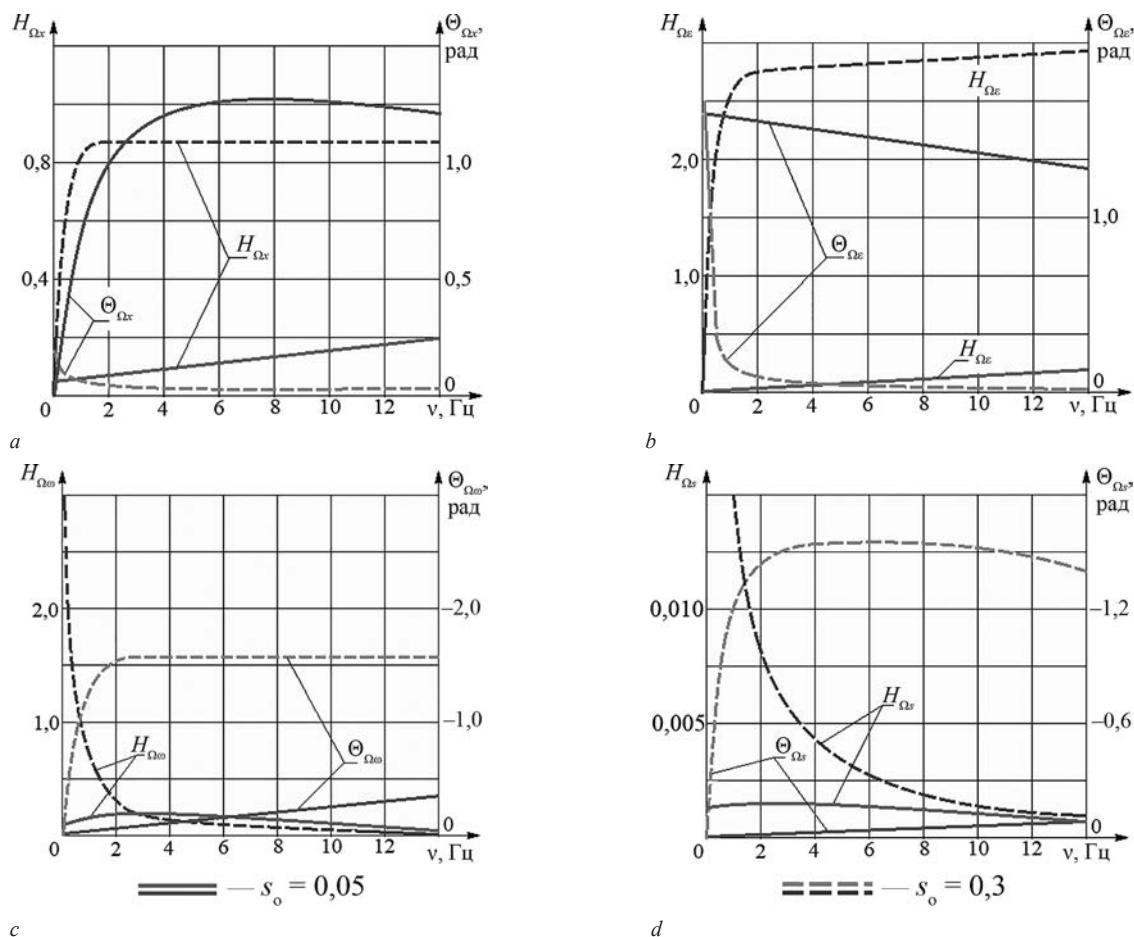


Рисунок 9 — Амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики продольной реакции R_x (a), углового ускорения $\dot{\omega}$ (b), угловой скорости ω (c) и проскальзывания s (d)
Figure 9 — Amplitude-frequency and phase-frequency characteristics of longitudinal reactions R_x (a), angular acceleration $\dot{\omega}$ (b), angular velocity ω (c) and slip s (d)

При $s_0 = 0,3$ ($f_t = 1,0$) переменная составляющая вызывает значительное изменение R_x и $\dot{\omega}$, причем, за исключением малых частот, фазовый сдвиг незначителен, а АЧХ практически постоянны. Угловая скорость и проскальзывание реагируют на воздействие переменной нормальной нагрузки только при очень малых частотах, а в остальном диапазоне частот, несмотря на увеличение фазового сдвига, влияние переменной R_z на эти параметры можно считать несущественным, поскольку АЧХ малы.

По результатам выполненного исследования можно сделать следующие выводы.

1. Переменный характер нормальной нагрузки R_z оказывает существенное влияние на силовые и кинематические параметры тормозящего колеса с эластичной шиной, в особенности при большой степени реализации потенциальных сцепных свойств шины с опорной поверхностью.

2. Угловая скорость ω и проскальзывание s реагируют на колебания нормальной нагрузки R_z только при малых частотах их изменения. При этом амплитуды достигают больших величин (см. рисунок 9 *c, d*).

3. Угловая скорость ω и проскальзывание s тормозящего колеса в большей мере реагируют на изменение самой величины (амплитуды ΔR_z) изменения нормальной нагрузки, чем на скорость (частоту ν) ее изменения.

4. При повышении частоты колебаний ν нагрузки R_z , проскальзывание s и скорость ω тормозящего колеса быстро снижаются, хотя их фазовое запаздывание значительно увеличивается почти до 90° . При малых частотах колебаний нормальной нагрузки R_z наблюдается значительный фазовый сдвиг углового ускорения колеса $\dot{\omega}$.

5. Угловые ускорения и замедления $\dot{\omega}$, возникающие на колесе, нагруженном большим тормозным моментом M_T вследствие колебаний нормальной нагрузки R_z , могут превышать пороговые величины уставок для срабатывания автомобильных АС (ABS, TSR, ESP), что необходимо учитывать при их проектировании.

6. При малом уровне тормозного момента M_T (режим служебного торможения) переменная нормальная нагрузка R_z влияет на динамические характеристики колеса главным образом через изменение радиуса качения $r_{кч}$ (силового плеча), а при большом уровне тормозного момента M_T — через изменение предельной по сцеплению касательной реакции.

7. Предлагаемое описание взаимосвязей силовых и кинематических параметров тормозящего колеса с эластичной шиной показывает, что оно физически обосновано, качественно и количественно согласуется с экспериментальными результатами. Высокие показатели валидации математического описания позволяют использовать его для моделирования рабочих процессов АС при колебаниях нормальной нагрузки.

8. Для анализа рабочих процессов АС при переменной нормальной нагрузке целесообразно использовать нормированную фазовую характеристику регулирования $f_t(s)$. Она позволяет более наглядно представлять динамические характеристики процесса торможения колеса с эластичной шиной в условиях возмущений, вызванных колебаниями нормальной нагрузки R_z , а также эффективность регулирования и настройки систем управления рабочими процессами автомобильных АС.

9. Полученные результаты исследования значительно дополняют как теоретические вопросы динамики торможения колеса с эластичной шиной [7–10], так и прикладные вопросы [1, 3, 4, 6, 11–15], значительно расширяющие возможности разработки современных автоматизированных систем.

Список литературы

1. Дик, А.Б. Математические модели пневматической шины: монография / А.Б. Дик; под общ. ред. А.И. Федотова. — М.; Вологда: Инфра-Инженерия, 2025. — 232 с.
2. Федотов, А.И. Испытания шин колесных транспортных средств: монография / А.И. Федотов. — Иркутск: Изд-во ИРНТУ, 2024. — 158 с.
3. Дик, А.Б. Исследование динамических характеристик тормозящего колеса / А.Б. Дик // Исследование торможения автомобиля и работы пневматических шин: межвуз. сб. науч. тр. — Омск, 1983. — С. 38–53.
4. Динамика системы дорога — шина — автомобиль — водитель / А.А. Хачатуров, В.Л. Афанасьев, В.С. Васильев [и др.]; под общ. ред. А.А. Хачатурова. — М.: Машиностроение, 1976. — 533 с.
5. Автомобильный справочник / пер. с англ. ООО «СтарСПб». — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: За рулем, 2012. — 1280 с.
6. Федотов, А.И. О силовом радиусе колеса с эластичной шиной / А.И. Федотов, О.С. Яньков, А.В. Камнев // Труды НАМИ. — 2022. — № 1(288). — С. 52–60. — DOI: <https://doi.org/10.51187/0135-3152-2022-1-52-60>.
7. Pacejka, H.V. Tire and vehicle dynamics / H.V. Pacejka, I.J.M. Besselink. — 3rd ed. — Oxford: Butterworth-Heinemann, 2012. — 672 p.
8. Тарасик, В.П. Теория движения автомобиля / В.П. Тарасик. — 2-е изд., перераб. и доп. — СПб.: БХВ-Петербург, 2022. — 576 с.
9. Кравец, В.Н. Теория автомобиля: учебник для вузов / В.Н. Кравец, В.В. Селифонов. — М.: Гринлайт+, 2011. — 884 с.
10. Расчет стационарных и динамических характеристик автомобильных шин при изменении нормальной нагрузки / Н. Батжаргал, Д.А. Тихов-Тинников, А.И. Федотов, С.П. Озорнин // Транспортное дело России. — 2023. — № 5. — С. 114–117.
11. Федотов, А.И. Исследование коэффициента трения автомобильной шины с плоской опорной поверхностью стэнда / А.И. Федотов, А.В. Бойко, А.С. Марков // Вестник ИрГТУ. — 2016. — № 3(110). — С. 158–163.
12. Портнягин, Е.М. Метод контроля тормозной эффективности и устойчивости автомобилей с ABS при их диагностировании на роликовых стэндах: дис. ... канд. техн. наук: 05.22.10 / Портнягин Евгений Михайлович; Оренбург. гос. ун-т. — Иркутск, 2009. — 207 с.
13. Контроль систем безопасности автомобилей на стэндах с беговыми барабанами: монография / А.И. Федотов, О.С. Яньков, А.С. Потапов, Е.М. Портнягин. — Иркутск: ИРНТУ, 2021. — 364 с.
14. Evaluation of the joint interaction of automatic emergency braking and adaptive cruise control systems / S.R. Kristalnyi, N.V. Popov, A.M. Ivanov [et al.] // 2022 Systems of Signals Generating and Processing in the Field of on Board Communications: conf. proc., Moscow, 15–17 Aug. 2022. — Piscataway, 2022. — DOI: <https://doi.org/10.1109/IEEECONF53456.2022.9744297>.
15. An approach to the development of a methodology for energy-efficient control of cargo vehicles / S. Shadrin, D. Makarov.

va, A. Keller, Yu. Furlotov // Proc. of the 1st Intern. conf. on sustainability and emerging technologies for smart manufacturing, Hanoi, 27–28 Apr. 2024. — Singapore, 2025. — P. 267–

277. — DOI: https://doi.org/10.1007/978-981-97-7083-0_26.
16. Гришкевич, А.И. Автомобили: теория: учебник для вузов. — Мн.: Вышэйш. шк., 1986. — 208 с.

DIK Alexander B., Ph. D. in Eng., Prof.

Consultant Professor of the Department “Road Transport, Construction and Road Machinery”¹

E-mail: fai@istu.edu

FEDOTOV Alexander I., D. Sc. in Eng., Prof.

Professor of the Department “Road Transport, Construction and Road Machinery”¹

E-mail: fai.abs@yandex.ru

¹Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russian Federation

Received December 8, 2025.

DYNAMIC AND FRICTIONAL PROPERTIES OF A BRAKING WHEEL WITH AN ELASTIC TIRE UNDER VARIABLE NORMAL LOAD

The article presents the results of an analysis of the dynamic and frictional properties of a wheel with an elastic tire. The analysis is based on the results of experimental studies of the automobile wheel with the elastic tire, obtained on a bench with a running drum in the laboratory of Irkutsk National Research Technical University. The research results presented in the paper are useful to specialists who design automated systems such as ABS, TSR, ESP, and also develop methods for managing their functioning processes.

Keywords: *wheel with elastic tire, dynamic properties of tires, friction characteristics of tires, power and kinematic parameters of a wheel with elastic tire, fluctuations in the normal load on a wheel, gear functions, gear ratios, amplitude-frequency and phase-frequency functions*

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2026-2-75-34-43>

References

- Dik A.B. *Matematicheskie modeli pnevmaticheskoy shiny* [Mathematical models of a pneumatic tire]. Moscow, Vologda, Infra-Inzheneriya Publ., 2025. 232 p. (in Russ.).
- Fedotov A.I. *Ispytaniya shin kolesnykh transportnykh sredstv* [Tire testing of wheeled vehicles]. Irkutsk, Irkutskiy natsionalnyy issledovatel'skiy tekhnicheskii universitet Publ., 2024. 158 p. (in Russ.).
- Dik A.B. *Issledovanie dinamicheskikh kharakteristik tormoznyashchego koleasa* [Investigation of the dynamic characteristics of the braking wheel]. *Issledovanie tormozheniya avtomobilya i raboty pnevmaticheskikh shin*, 1983, pp. 38–53 (in Russ.).
- Khachaturov A.A., et al. *Dinamika sistemy doroga — shina — avtomobil — voditel* [Dynamics of the road — tire — car — driver system]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1976. 533 p. (in Russ.).
- Reif K., et al. *Automobile handbook*. Stuttgart, Robert Bosch GmbH, 2011. 1256 p.
- Fedotov A.I., Yan'kov O.S., Kamnev A.V. *O silovom radiuse koleasa s elastichnoy shinoy* [On the issue of the wheel power radius with an elastic tire]. *Trudy NAMI*, 2022, no. 1(288), pp. 52–60. DOI: <https://doi.org/10.51187/0135-3152-2022-1-52-60> (in Russ.).
- Pacejka H.B., Besselink I.J.M. *Tire and vehicle dynamics*. Oxford, Butterworth-Heinemann, 2012. 672 p.
- Tarasik V.P. *Teoriya dvizheniya avtomobilya* [Theory of car movement]. Saint Petersburg, BKhV-Peterburg Publ., 2022. 576 p. (in Russ.).
- Kravets V.N., Selifonov V.V. *Teoriya avtomobilya* [Car theory]. Moscow, Grinlayt+ Publ., 2011. 884 p. (in Russ.).
- Batjargal N., Tikhov-Tinnikov D.A., Fedotov A.I., Ozornin S.P. *Raschet statsionarnykh i dinamicheskikh kharakteristik avtomobilnykh shin pri izmenenii normalnoy nagruzki* [Stationary and non-stationary characteristics of tires under varying normal load]. *Transport business of Russia*, 2023, no. 5, pp. 114–117 (in Russ.).
- Fedotov A.I., Boiko A.V., Markov A.S. *Issledovanie koeffitsienta treniya avtomobilnoy shiny s ploskoy opornoj poverkhnostyu stenda* [Studies of the friction coefficient of a vehicle tire with the test bed flat bearing surface]. *Proceedings of Irkutsk State Technical University*, 2016, no. 3(110), pp. 158–163 (in Russ.).
- Portnyagin E.M. *Metod kontrolya tormoznoy effektivnosti i us-toyichivosti avtomobilya s ABS pri ikh diagnostirovanii na rolkovykh stendakh*. Diss. kand. tekhn. nauk [A method for monitoring the braking performance and stability of vehicles with ABS when they are diagnosed on roller benches. Ph. D. Thesis]. Irkutsk, 2009. 207 p. (in Russ.).
- Fedotov A.I., Yankov O.S., Potapov A.S., Portnyagin E.M. *Kontrol sistem bezopasnosti avtomobilya na stendakh s begovymi barabanami* [Monitoring of vehicle safety systems at stands with running drums]. Irkutsk, Irkutskiy natsionalnyy issledovatel'skiy tekhnicheskii universitet Publ., 2021. 364 p. (in Russ.).
- Kristalnyi S.R., et al. *Evaluation of the joint interaction of automatic emergency braking and adaptive cruise control systems. Proc. 2022 systems of signals generating and processing in the field of on board communications*. Moscow, 2022. DOI: <https://doi.org/10.1109/IEEECONF53456.2022.9744297>.
- Shadrin S., Makarova D., Keller A., Furlotov Yu. *An approach to the development of a methodology for energy-efficient control of cargo vehicles. Proc. 1st international conference on sustainability and emerging technologies for smart manufacturing*. Hanoi, 2024, pp. 267–277. DOI: https://doi.org/10.1007/978-981-97-7083-0_26.
- Grishkevich A.I. *Avtomobili: teoriya* [Cars: theory]. Minsk, Vysshaya shkola Publ., 1986. 208 p. (in Russ.).