

УДК 531.01

М.Н. СИДИКОВ, канд. физ.-мат. наук
доцент кафедры «Общетехнические дисциплины»

E-mail: mansur.sidikov1711@gmail.com

Алмалыкский филиал НИТУ «МИСиС», г. Алмалык, Республика Узбекистан

Поступила в редакцию 10.10.2025.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ СТАТИЧЕСКИ НЕУРАВНОВЕШЕННОГО РОТОРА С ШАРОВЫМ АВТОБАЛАНСИРОВОЧНЫМ УСТРОЙСТВОМ МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Методом малого параметра проделан анализ необходимых условий стационарных движений ротора, установленного на гибком валу с шаровым автобалансирующим устройством, когда беговые дорожки балансируемых шариков не только установлены эксцентricностью, но и обладают горизонтальной осью вращения. При этом в качестве малого берется параметр, обратно пропорциональный квадрату угловой скорости ротора. В частном случае получено асимптотическое решение с учетом второй степени малого параметра, а также точное решение одного из случаев несбалансированного движения ротора.

Ключевые слова: автобалансирующее устройство, эксцентricность, обобщенные координаты, беговая дорожка

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2026-2-75-52-61>

Введение. Имеется множество научных исследований, которые посвящены пассивной балансировке с помощью подвижных масс. Подробному анализу современного состояния теории гибких валов и динамике ротора с автобалансирующим устройством (АБУ) посвящены работы Дж. Джен-та [1], Т. Ямомото [2], А.Н. Никифорова [3]. Особенностью пассивной балансировки является то, что в зависимости от угловой скорости ротора подвижные массы занимают определенное положение, балансируя его. При этом, в зависимости от конструкции АБУ, необходимые условия стационарного движения сводятся к решению трансцендентных уравнений и не всегда удается аналитически определить положение балансируемых шариков и отклонение центра масс ротора. В работах В.Г. Быкова [4–7] рассмотрены вопросы динамики статически и динамически несбалансированного ротора, установленного на гибком валу с шаровым АБУ с учетом погрешности (эксцентricитета) при установке. При этом беговые дорожки представляют собой круговую или эллиптическую траекторию. В рамках модели Джеффкотта получены уравнения движения в лагранжевых переменных. В системе координат, связанной с вращающимся ротором найдены условия стационарности движения, а также проделан анализ полученных условий. При конкретных значениях параметров системы численным методом получены графики изменения амплитуды колебаний ротора при прохождении его через критическую скорость при постоянном значении углового уско-

рения, а также момента. Необходимо отметить работу А.Е. Мельникова [8], где рассматривается движение ротора в виде диска, несимметрично установленного на упругий вал с распределенной массой. Используя собственные формы колебаний, соответствующие шарнирным закреплениям, в лагранжевых координатах получены уравнения движения, а также проделан анализ уравнения, соответствующего стационарным движениям. Определены амплитудно-частотные характеристики точки закрепления ротора, проделаны численные расчеты и анализ полученных результатов относительно модели невесомого вала.

В работе И.А. Пасынкова [9] исследован вопрос влияния движения корпуса системы «корпус — вал» на прецессионное движение ротора, установленного на линейно-упругом валу внутри корпуса. С учетом статического и динамического эксцентricитета ротора (дисбаланса) составлены уравнения движения. Из системы уравнений получены условия существования цилиндрической, конической и гиперболоидной прецессии. Определению структуры дифференциальных уравнений движения и анализу процесса уравнивания роторной машины с автобалансирами посвящены работы А.Н. Горбенко [10].

В работе А.В. Кадырбекулы [11] рассматривается проблема возникновения самовозбуждающихся колебаний вертикально установленного ротора на подшипниках скольжения с учетом слоя смазки. При этом силовые факторы между ротором и подшипником учтены согласно гипотезе

Зоммерфельда. Полученные нелинейные уравнения при конкретных значениях параметров системы решаются численным методом. Установлено, что ротор на подшипниках скольжения обладает свойством подавления устойчивых периодических колебаний, а также определены типы колебаний.

К построению асимптотических решений с применением методов усреднения относится работа К. Олсона [12], где с помощью метода усреднения по времени получены асимптотические решения ряда проблем. Также рассматривается движение ротора с анизотропными подшипниками и демпфированием. Получены условия для возможной балансировки ротора с учетом моментов инерции балансировочной системы и рассмотрены возможности использования двух плоскостей балансировки для статической и динамической балансировки.

В работе Н.Н. Зайцева [13] предлагается математическая модель однодискового ротора с АБУ, учитывающая изменение угловой скорости ротора. В частном случае автобалансера с двумя шарами предлагается вычислительная модель в виде дифференциальных уравнений и приводятся результаты численного моделирования различных режимов вращения. В случае анизотропного ротора найдены соответствующие два максимума амплитуды прогиба. Проведен силовой анализ однодискового ротора с многорядным АБУ, при этом движение шаров по беговой линии определяется внешними демпфирующими силами, силами инерции и силами трения, а также эксцентриситетом АБУ. Основным свойствам АБУ и предъявляемым к ним требованиям посвящены работы Ф.М. Диментберга, А.С. Кельзона [14, 15], где подробно описаны проблемы, возникающие в динамике ротора, а также требования к балансировочным устройствам. Подробно изучены достоинства и недостатки существующих активных и пассивных балансировочных систем, таких как шаровые, кольцевые, маятниковые, жидкостные, изложены основы динамики вращающихся гибких валов с одним и несколькими дисками с различными точками подвеса, а также некоторые вопросы влияния видов опор на динамику ротора. Основополагающие результаты динамики жесткого ротора на различных упругих опорах рассмотрены в работе [16], где составлены уравнения движения ротора с учетом особенностей опоры во вращающейся системе координат вместе с ротором, а также изучен вопрос устойчивости движения. Проанализированы полученные достаточные условия устойчивости.

Математическая модель. Представлена модель ротора в виде абсолютно твердого цилиндра, закрепленного по вертикальной продольной оси с помощью упругого вала на двух опорах. В качестве математической модели принимается модель, рассмотренная в работах [4–7], с дополнением,

что круговые беговые линии (трубки) могут совершать вращательное движение вокруг одной определенной горизонтальной оси, что позволяет в частном случае исследовать влияние угловой погрешности АБУ при установке. При этом предполагается, что ротор представляет собой цилиндр небольшой высоты и совершает плоское движение (в рамках модели Джеффкотта) (рисунок).

Для определения положения системы введем неподвижную систему координат $Oxyz$ с осью Oz , проходящей через точки опоры. Оси Ox , Oy лежат в плоскости статического эксцентриситета. Также введем подвижную систему координат $O\xi\eta\xi$, вращающуюся вместе с ротором, где ось $O\xi$ совпадает с осью Oz . Для определения относительного движения беговых дорожек и балансировочных шариков введем подвижную координатную систему $O_1x_jy_jz_j$, связанную с трубками, начало которых расположено в центре балансировочной системы O_1 . Оси O_1y_j направлены вдоль горизонтальной оси вращения трубок, а оси O_1x_j и O_1z_j образуют правую систему координат [4]. Расстояние между геометрическим центром O и центром тяжести G ротора (эксцентриситет) обозначим через s_1 . Расположение АБУ определяется параметром $s_2 = OO_1$ (расстояние между центром балансировочного устройства и точкой пересечения вала), а также углом $\gamma = \angle O_1OG$ между направлениями OO_1 и OG . Введем угол β между горизонтальной осью вращения трубки и направлением OO_1 (см. рисунок).

Рассматриваемая механическая система обладает степенью свободы $k = s \cdot (n + 1) + 3$; координатами центра масс ротора x, y относительно координатной системы $Oxyz$; углом поворота ротора θ вокруг вертикальной оси; углами наибольшего наклона плоскости трубок α_j ($j = 1, \dots, s$) относительно плоскости Oxy . Для определения положения шариков внутри трубки введем углы φ_{ji} ($i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, s$) между осью O_1y_j , проходящей через центр беговых окружностей и радиусами, проведенными из центра окружности к шарикам.

Кинетическая энергия системы в обобщенных координатах и их производные (скорости) имеют вид:

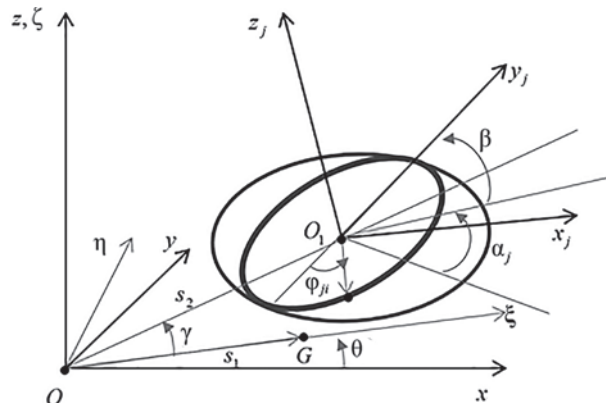


Рисунок — Расположение систем координат
Figure — Location of coordinate systems

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{1}{2} \left(m_p + m_{6c} + \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n m_{ji} \right) (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \left(J_G + J_{z_{2j}} \cos^2 \alpha_j + J_{x_{2j}} \sin^2 \alpha_j + m_p s_1^2 + m_{6c} s_2^2 + \right. \\
 & + \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n m_{ji} \left(s_2^2 + 2r_j s_2 (\sin \varphi_{ji} \cos \alpha_j \sin \beta - \cos \varphi_{ji} \cos \beta) + \right. \\
 & \left. \left. + r_j^2 (\cos^2 \varphi_{ji} + \sin^2 \varphi_{ji} \cos^2 \alpha_j) \right) \right) \dot{\theta}^2 + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \left(J_{y_{2j}} + \sum_{i=1}^n m_{ji} r_j^2 \sin^2 \varphi_{ji} \right) \dot{\alpha}_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n m_{ji} r_j^2 \dot{\varphi}_{ji}^2 + \\
 & + m_p s_1 \dot{\theta} (\dot{y} \cos \theta - \dot{x} \sin \theta) + m_{6c} s_2 \dot{\theta} (\dot{y} \cos(\theta + \gamma) - \\
 & - \dot{x} \sin(\theta + \gamma)) + \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n m_{ji} \left[\dot{x} (-s_2 \sin(\gamma + \theta)) \dot{\theta} + \right. \\
 & + r_j (\dot{\theta} \cos \alpha_j + \dot{\varphi}_{ji}) \sin \varphi_{ji} \cos \delta + r_j (\dot{\theta} + \dot{\varphi}_{ji} \cos \alpha_j) \times \\
 & \left. \times \cos \varphi_{ji} \sin \delta - r_j \sin \varphi_{ji} \sin \alpha_j \sin \delta \dot{\alpha}_j \right] + \\
 & + \dot{y} (s_2 \cos(\theta + \gamma) \dot{\theta} + r_j (\dot{\theta} \cos \alpha_j + \dot{\varphi}_{ji}) \sin \varphi_{ji} \sin \delta - \\
 & - r_j (\dot{\theta} + \dot{\varphi}_{ji} \cos \alpha_j) \cos \varphi_{ji} \cos \delta + r_j \sin \varphi_{ji} \sin \alpha_j \times \\
 & \times \cos \delta \dot{\alpha}_j) + ((\sin \varphi_{ji} \sin \beta - \cos \varphi_{ji} \cos \alpha_j \cos \beta) s_2 r_j + \\
 & + r_j^2 \cos \alpha_j) \dot{\theta} \dot{\varphi}_{ji} + (s_2 r_j \cos \beta \sin \varphi_{ji} \sin \alpha_j - \\
 & - r_j^2 \sin \varphi_{ji} \cos \varphi_{ji} \sin \alpha_j) \dot{\theta} \dot{\alpha}_j,
 \end{aligned}$$

где m_p, m_{6c}, m_{ji} — масса ротора, балансирующего устройства и шариков соответственно; $J_p, J_{x_{2j}}, J_{y_{2j}}, J_{z_{2j}}$ — моменты инерции ротора и балансирующего механизма.

На ротор со стороны гибкого вала действует приведенная сила упругости с потенциалом $\Pi = \frac{1}{2} k(x^2 + y^2)$, а силы сопротивления будем учитывать с помощью диссипативной функции

$$\Phi = \frac{1}{2} \left(c(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + c_0 \dot{\theta}^2 + c_\alpha \sum_{j=1}^s \dot{\alpha}_j^2 + c_\phi \sum_{i=1}^n \dot{\varphi}_i^2 \right).$$

В выбранной системе лагранжевых координат уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned}
 M \ddot{x} + c\dot{x} + kx = & \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n \left\{ \left[m_p s_1 \cos \theta + (m_{6c} + m_{ij}) \times \right. \right. \\
 & \times s_2 \cos(\theta + \gamma) + m_{ji} r_j (\sin \varphi_{ji} \sin \delta \cos \alpha_j - \\
 & \left. - \cos \varphi_{ji} \cos \delta) \right] \dot{\theta}^2 - m_{ji} r_j \frac{d}{dt} \left[(\sin \varphi_{ji} \cos \delta + \right. \\
 & + \cos \alpha_j \cos \varphi_{ji} \sin \delta) \dot{\varphi}_{ji} - \sin \varphi_{ji} \sin \alpha_j \sin \delta \dot{\alpha}_j \left. \right] + \\
 & + (m_p s_1 \sin \theta + (m_{6c} + m_{ji}) s_2 \sin(\theta + \gamma) - \\
 & - m_{ji} r_j (\sin \varphi_{ji} \cos \delta \cos \alpha_j + \cos \varphi_{ji} \sin \delta)) \dot{\theta} \left. \right\}; \\
 M \ddot{y} + c\dot{y} + ky = & \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n \left\{ \left[m_p s_1 \sin \theta + (m_{6c} + m_{ji}) \times \right. \right. \\
 & \times s_2 \sin(\theta + \gamma) - m_{ji} r_j (\sin \varphi_{ji} \cos \delta \cos \alpha_j + \\
 & \left. \left. + \cos \varphi_{ji} \sin \delta) \right] \dot{\theta}^2 - m_{ji} r_j \frac{d}{dt} \left[(\sin \varphi_{ji} \sin \delta + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \cos \alpha_j \cos \varphi_{ji} \cos \delta) \dot{\varphi}_{ji} + \sin \varphi_{ji} \sin \alpha_j \cos \delta \dot{\alpha}_j \right] - \right. \\
 & - (m_p s_1 \cos \theta + (m_{6c} + m_{ji}) s_2 \cos(\theta + \gamma) + \\
 & \left. + m_{ji} r_j (\sin \varphi_{ji} \sin \delta \cos \alpha_j - \cos \varphi_{ji} \cos \delta)) \dot{\theta} \left. \right\};
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 & + \cos \varphi_{ji} \sin \delta) \dot{\theta}^2 - m_{ij} r_j \frac{d}{dt} \left[(\sin \varphi_{ji} \sin \delta + \right. \\
 & + \cos \alpha_j \cos \varphi_{ji} \cos \delta) \dot{\varphi}_{ji} + \sin \varphi_{ji} \sin \alpha_j \cos \delta \dot{\alpha}_j \left. \right] - \\
 & - (m_p s_1 \cos \theta + (m_{6c} + m_{ji}) s_2 \cos(\theta + \gamma) + \\
 & + m_{ji} r_j (\sin \varphi_{ji} \sin \delta \cos \alpha_j - \cos \varphi_{ji} \cos \delta)) \dot{\theta} \left. \right\}; \\
 & m_{ij} r_j^2 \ddot{\varphi}_{ij} + m_{ij} r_j \left[(\ddot{x} \cos \delta + \ddot{y} \sin \delta) \sin \varphi_{ij} + \right. \\
 & + (\ddot{x} \sin \delta - \ddot{y} \cos \delta) \cos \alpha_j \cos \varphi_{ij} \left. \right] - m_{ij} r_j^2 (1 - \cos 2\varphi_{ij}) \times \\
 & \times \sin \alpha_j \dot{\alpha}_j \dot{\theta} + \left[s_2 r (\sin \varphi_{ij} \sin \beta - \cos \varphi_{ij} \cos \beta \cos \alpha_j) + \right. \\
 & \left. + r_j^2 \cos \alpha_j \right] \ddot{\theta} - m_{ij} \left[s_2 r_j (\sin \beta \cos \varphi_{ij} \cos \alpha_j + \right. \\
 & \left. + \sin \varphi_{ij} \sin \beta) \frac{r^2}{2} \sin^2 \alpha_j \sin 2\varphi_{ij} \right] \dot{\theta}^2 - \\
 & - m_{ij} r_j^2 \sin \varphi_{ij} \cos \varphi_{ij} \dot{\alpha}_j^2 = \\
 & = -m_{ij} g r_j \cos \varphi_{ij} \sin \alpha_j - c_\phi \dot{\varphi}_{ij} \quad (i = 1 : n); \\
 & \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \left((m_{ji} r_j^2 \sin^2 \varphi_{ji} + J_{y_{2j}}) \dot{\alpha}_j \right) - \right. \\
 & - m_{ji} r_j (\ddot{x} \sin \delta - \ddot{y} \cos \delta) \sin \varphi_{ij} \sin \alpha_j - \\
 & - m_{ji} r_j^2 (\cos 2\varphi_{ji} - 1) \sin \alpha_j \dot{\theta} \dot{\varphi}_{ji} + m_{ji} r_j \times \\
 & \times (s_2 \sin \varphi_{ji} \cos \beta - r_j \sin \varphi_{ji} \cos \varphi_{ji}) \sin \alpha_j \dot{\theta} - \\
 & - \left[\frac{1}{2} (J_{x_{2j}} - J_{z_{2j}}) \sin 2\alpha_j - m_{ji} (s_2 r_j \sin \beta \sin \varphi_{ji} \sin \alpha_j + \right. \\
 & + r_j^2 \sin^2 \varphi_{ji} \sin \alpha_j \cos \alpha_j) \dot{\theta}^2 + c_\alpha \dot{\alpha}_j + \\
 & \left. + m_{ji} g r_j \sin \varphi_{ji} \cos \alpha_j \right\} = 0 \quad (j = 1 : s);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} (H\dot{\theta}) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^s \left[\ddot{y} (m_p s_1 \cos \theta + (m_{6c} + m_{ij}) s_2 \times \right. \\
 \times \cos(\theta + \gamma) + m_{ij} r_j (\cos \alpha_j \sin \delta \sin \varphi_{ji} - \cos \varphi_{ji} \cos \delta)) \left. \right] + \\
 + \ddot{x} \left(-m_p s_1 \sin \theta - (m_{6c} + m_{ij}) s_2 \sin(\theta + \gamma) + m_{ij} r_j \times \right. \\
 \times (\cos \alpha_j \cos \delta \sin \varphi_{ji} + \cos \varphi_{ji} \sin \delta) \left. \right) + m_{ij} \frac{d}{dt} \times \\
 \times \left[s_2 r_j (\sin \varphi_{ji} \sin \beta - \cos \varphi_{ji} \cos \alpha_j \cos \beta) + \right. \\
 \left. + r_j^2 \cos \alpha_j \right] \dot{\varphi}_{ji} + (s_2 r_j \sin \varphi_{ji} \cos \beta \sin \alpha_j - \\
 - r_j^2 \sin \varphi_{ji} \cos \varphi_{ji} \sin \alpha_j) \dot{\alpha}_j \left. \right] = Q_\theta,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 H = & m_p s_1^2 + J_p + m_{6c} s_2^2 + \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n (J_{x_{2j}} \sin^2 \alpha_j + J_{z_{2j}} \cos^2 \alpha_j + \\
 & + m_{ji} (s_2^2 + 2s_2 r_j (\sin \beta \sin \varphi_{ji} \cos \alpha_j - \cos \varphi_{ji} \cos \beta) + \\
 & + r_j^2 (\sin^2 \varphi_{ji} \cos^2 \alpha_j + \cos^2 \varphi_{ji}));
 \end{aligned}$$

$$M = m_p + m_{\text{oc}} + \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n m_{ji};$$

Q_θ — обобщенная сила по переменной θ ; c , c_φ , c_α — коэффициенты диссипации; k — приведенная жесткость вала.

Для исследования стационарных движений ротора уравнения движения (1) перепишем в системе координат, вращающейся вместе с ротором, то есть сделаем замену переменных:

$$\begin{aligned} z &= x + iy = (\xi + i\eta)e^{i\theta}; \\ \dot{z} &= \dot{x} + i\dot{y} = \left[(\dot{\xi} - \eta\dot{\theta}) + i(\dot{\eta} + \xi\dot{\theta}) \right] e^{i\theta}; \\ \ddot{z} &= \ddot{x} + i\ddot{y} = \left[(\ddot{\xi} - 2\dot{\eta}\dot{\theta} - \xi\dot{\theta}^2 + \eta\ddot{\theta}) + \right. \\ &\quad \left. + i(\dot{\eta} + 2\xi\dot{\theta} - \eta\dot{\theta}^2 + \xi\ddot{\theta}) \right] e^{i\theta}. \end{aligned}$$

В новой системе координат уравнения движения примут вид:

$$\begin{aligned} &M(\ddot{\xi} - 2\dot{\eta}\dot{\theta} - \xi\dot{\theta}^2 + \eta\ddot{\theta}) + c(\dot{\xi} - \eta\dot{\theta}) + k\xi = \\ &= \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n \left\{ \left[m_p s_1 + (m_{\text{oc}} + m_{ji}) s_2 \cos \gamma + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + m_{ji} r_j (\cos \alpha_j \sin \varphi_{ji} \sin \Delta - \cos \varphi_{ji} \cos \Delta) \right] \dot{\theta}^2 - \right. \\ &\quad \left. - m_{ji} r_j (\cos \alpha_j \cos \varphi_{ji} \cos \Delta - \sin \varphi_{ji} \sin \Delta) \dot{\varphi}_{ji} \dot{\theta} + \right. \\ &\quad \left. + m_{ji} r_j \sin \alpha_j \sin \varphi_{ji} \cos \Delta \dot{\alpha}_j \dot{\theta} + \left[(m_{\text{oc}} + m_{ji}) s_2 \sin \gamma - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - m_{ji} r_j (\cos \alpha_j \sin \varphi_{ji} \cos \Delta + \cos \varphi_{ji} \sin \Delta) \right] \ddot{\theta} - \right. \\ &\quad \left. - r_j m_{ji} (A_1 \cos \Delta - B_1 \sin \Delta) \right\}; \\ &M(\dot{\eta} + 2\xi\dot{\theta} - \eta\dot{\theta}^2 + \xi\ddot{\theta}) + c(\dot{\eta} + \xi\dot{\theta}) + k\eta = \\ &= \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n \left\{ \left[(m_{\text{oc}} + m_{ji}) s_2 \sin \gamma - m_{ji} r_j (\cos \alpha_j \sin \varphi_{ji} \cos \Delta + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \cos \varphi_{ji} \sin \Delta) \right] \dot{\theta}^2 - m_{ji} r_j (\cos \alpha_j \cos \varphi_{ji} \sin \Delta + \right. \\ &\quad \left. + \sin \varphi_{ji} \cos \Delta) \dot{\varphi}_{ji} \dot{\theta} + m_{ji} r_j \sin \alpha_j \sin \varphi_{ji} \sin \Delta \dot{\alpha}_j \dot{\theta} + \right. \\ &\quad \left. + \left[-m_p s_1 - (m_{\text{oc}} + m_{ji}) s_2 \cos \gamma - m_{ji} r_j (\cos \alpha_j \sin \varphi_{ji} \sin \Delta - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \cos \varphi_{ji} \cos \Delta) \right] \ddot{\theta} - r_j m_{ji} (A_1 \sin \Delta + B_1 \cos \Delta) \right\}; \\ &r_j \ddot{\varphi}_{ji} + \left((\dot{\xi} - 2\dot{\eta}\dot{\theta} - \xi\dot{\theta}^2 + \eta\ddot{\theta}) \cos \Delta + (\dot{\eta} + 2\xi\dot{\theta} - \eta\dot{\theta}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \xi\ddot{\theta}) \sin \Delta \right) \sin \varphi_{ji} + \left((\ddot{\xi} - 2\dot{\eta}\dot{\theta} - \xi\dot{\theta}^2 + \eta\ddot{\theta}) \sin \Delta + \right. \\ &\quad \left. + (\dot{\eta} + 2\xi\dot{\theta} - \eta\dot{\theta}^2 + \xi\ddot{\theta}) \cos \Delta \right) \cos \alpha_j \cos \varphi_{ji} - \\ &\quad - 2r_j \sin^2 \varphi_{ji} \sin \alpha_j \dot{\alpha}_j \dot{\theta} + \left(s_2 (\sin \varphi_{ji} \sin \beta - \right. \\ &\quad \left. - \cos \varphi_{ji} \cos \beta \cos \alpha_j) + r_j \cos \alpha_j \right) \ddot{\theta} - \left(s_2 (\cos \varphi_{ji} \sin \beta \times \right. \\ &\quad \left. \times \cos \alpha_j + \sin \varphi_{ji} \sin \beta) - \frac{r_j}{2} \sin^2 \alpha_j \sin 2\varphi_{ji} \right) \dot{\theta}^2 - \\ &\quad - r_j \sin \varphi_{ji} \cos \varphi_{ji} \dot{\alpha}_j^2 = -g \cos \varphi_{ji} \sin \alpha_j - \tilde{c}_\varphi \dot{\varphi}_{ji}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \left((m_{ji} r_j^2 \sin^2 \varphi_{ji} + J_{y_2}) \dot{\alpha}_j \right) - m_{ji} r_j \times \right. \\ &\quad \times \left((\ddot{\xi} - 2\dot{\eta}\dot{\theta} - \xi\dot{\theta}^2 + \eta\ddot{\theta}) \sin \Delta - (\dot{\eta} + 2\xi\dot{\theta} - \eta\dot{\theta}^2 + \xi\ddot{\theta}) \times \right. \\ &\quad \times \cos \Delta \left. \right) \sin \varphi_{ji} \sin \alpha_j - m_{ji} r_j^2 (\cos 2\varphi_{ji} - 1) \times \\ &\quad \times \sin \alpha_j \dot{\theta} \dot{\varphi}_{ji} + m_{ji} r_j (s_2 \sin \varphi_{ji} \cos \beta - r_j \sin \varphi_{ji} \cos \varphi_{ji}) \times \\ &\quad \times \sin \alpha_j \ddot{\theta} - \left[\frac{1}{2} (J_{x_2} - J_{z_2}) \sin 2\alpha_j - m_{ji} \times \right. \\ &\quad \left. \times (s_2 r_j \sin \beta \sin \varphi \sin \alpha_j + r_j^2 \sin^2 \varphi_{ji} \sin \alpha_j \cos \alpha_j) \right] \dot{\theta}^2 + \\ &\quad \left. + c_\alpha \dot{\alpha}_j + m_{ji} g r_j \sin \varphi_{ji} \cos \alpha_j \right\} = 0 \quad (j = 1 : s), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \cos \varphi_{ij} \dot{\varphi}_{ij}^2 + \sin \varphi_{ij} \ddot{\varphi}_{ij} + \\ &\quad + (\cos \varphi_{ij} \cos \alpha_j \dot{\varphi}_{ij} - \sin \alpha_j \sin \varphi_{ij} \dot{\alpha}_j) \dot{\theta}; \\ B_1 &= \cos \alpha_j \sin \varphi_{ij} \dot{\varphi}_{ij}^2 + 2 \sin \alpha_j \cos \varphi_{ij} \dot{\varphi}_{ij} \dot{\alpha}_j + \\ &\quad + \cos \alpha_j \sin \varphi_{ij} \dot{\alpha}_j^2 - \cos \alpha_j \cos \varphi_{ij} \ddot{\varphi}_{ij} + \\ &\quad + \sin \varphi_{ij} \dot{\varphi}_{ij} \dot{\theta} + \sin \alpha_j \sin \varphi_{ij} \dot{\alpha}_j; \quad \Delta = \gamma + \beta. \end{aligned}$$

Стационарные движения. Рассмотрим стационарные движения системы, соответствующей значениям переменных:

$$\begin{aligned} v &= \dot{\theta} = \text{const}; \quad \xi = \xi_0; \\ \eta &= \eta_0; \quad \alpha_j = \alpha_j^0; \quad \varphi_{ji} = \varphi_{ji}^0. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя (3) в систему уравнений (2), при этом разделяя обе стороны уравнений на величины v^2 , имеем:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{k}{v^2} - M \right) \xi_0 + \frac{c}{v} \eta_0 = \left[\sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n m_p s_1 + (m_{\text{oc}} + m_{ij}) \times \right. \\ &\quad \left. \times s_2 \sin \gamma + m_{ij} r_i (\cos \alpha_j^0 \sin \varphi_{ji}^0 \sin \Delta - \cos \varphi_{ji}^0 \cos \Delta) \right]; \\ &\left(\frac{k}{v^2} - M \right) \eta_0 + \frac{c}{v} \xi_0 = \left[\sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n (m_{\text{oc}} + m_{ij}) s_2 \sin \gamma - \right. \\ &\quad \left. - m_{ij} r_i (\cos \alpha_j^0 \sin \varphi_{ji}^0 \cos \Delta + \cos \varphi_{ji}^0 \sin \Delta) \right]; \\ &\left[(\xi_0 (\cos \Delta \sin \varphi_{ji}^0 + \sin \Delta \cos \alpha_j^0 \cos \varphi_{ji}^0) + \right. \\ &\quad \left. + \eta_0 (\sin \Delta \sin \varphi_{ji}^0 - \cos \Delta \cos \alpha_j^0 \cos \varphi_{ji}^0) \right] + \\ &\quad + \left[s_2 (\sin \beta \cos \varphi_{ji}^0 \cos \alpha_j^0 + \sin \varphi_{ji}^0 \sin \beta) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{r}{2} \sin^2 \alpha_j^0 \sin 2\varphi_{ji}^0 \right] = \hat{g} \cos \varphi_{ji}^0 \sin \alpha_j^0 \quad (i = 1 : n); \\ &\sum_{i=1}^n \left\{ m_{ji} r_j (\xi_0 \sin \Delta - \eta_0 \cos \Delta) \sin \varphi_{ji}^0 \sin \alpha_j^0 - \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{1}{2} (J_{x_2} - J_{z_2}) \sin 2\alpha_j^0 - m_{ji} (s_2 r_j \sin \beta \sin \varphi_{ji}^0 \sin \alpha_j^0 + \right. \right. \end{aligned} \quad (4)$$

$$+ r_j^2 \sin^2 \varphi_{ji}^0 \sin \alpha_j^0 \cos \alpha_j^0] + m_{ji} \widehat{g} r_j \sin \varphi_{ji}^0 \cos \alpha_j^0 \} = 0$$

$$\left(j = 1 : s; \Delta = \gamma + \beta; \widehat{g} = \frac{g}{v^2} \right).$$

В общем случае нахождение значений неизвестных в аналитическом виде представляет собой трудную задачу.

Рассмотрим случаи, когда имеется одна беговая дорожка и в ней расположены по два балансировочных шарика. Из уравнений стационарности движений (4) для переменных φ_1^0, φ_2^0 получим:

$$\xi_0 (\cos \Delta \sin \varphi_1^0 + \sin \Delta \cos \alpha_0 \cos \varphi_1^0) + \eta_0 (\sin \Delta \sin \varphi_1^0 - \cos \Delta \cos \alpha_0 \cos \varphi_1^0) + s_2 (\cos \varphi_1^0 \cos \alpha_0 + \sin \varphi_1^0) \times$$

$$\times \sin \beta - \frac{r}{2} \sin^2 \alpha_0 \sin 2\varphi_1^0 = \widehat{g} \cos \varphi_1^0 \sin \alpha_0; \quad (5)$$

$$\xi_0 (\cos \Delta \sin \varphi_2^0 + \sin \Delta \cos \alpha_0 \cos \varphi_2^0) + \eta_0 (\sin \Delta \sin \varphi_2^0 - \cos \Delta \cos \alpha_0 \cos \varphi_2^0) + s_2 (\cos \varphi_2^0 \cos \alpha_0 + \sin \varphi_2^0) \times$$

$$\times \sin \beta - \frac{r}{2} \sin^2 \alpha_0 \sin 2\varphi_2^0 = \widehat{g} \cos \varphi_2^0 \sin \alpha_0.$$

Проведем преобразования в системе (5). Для этого разрешим уравнения (5) относительно ξ_0, η_0 :

$$\xi_0 \cos \alpha_0 \sin (\varphi_1^0 - \varphi_2^0) + s_2 \sin (\varphi_1^0 - \varphi_2^0) \cos \alpha_0 \cos \gamma -$$

$$- 2r \sin^2 \alpha_0 \left[\sin \Delta \sin \varphi_1^0 \sin \varphi_2^0 \sin \frac{\varphi_1^0 + \varphi_2^0}{2} + \right.$$

$$\left. + \cos \Delta \cos \alpha_0 \cos \varphi_1^0 \cos \varphi_2^0 \cos \frac{\varphi_1^0 + \varphi_2^0}{2} \right] \sin \frac{\varphi_1^0 - \varphi_2^0}{2} =$$

$$= \widehat{g} \sin \alpha_0 \sin \Delta \sin (\varphi_1^0 - \varphi_2^0); \quad (6)$$

$$\eta_0 \cos \alpha_0 \sin (\varphi_1^0 - \varphi_2^0) + s_2 \sin (\varphi_1^0 - \varphi_2^0) \cos \alpha_0 \sin \gamma +$$

$$+ 2r \sin^2 \alpha_0 \left[\cos \Delta \sin \varphi_1^0 \sin \varphi_2^0 \sin \frac{\varphi_1^0 + \varphi_2^0}{2} - \right.$$

$$\left. - \sin \Delta \cos \alpha_0 \cos \varphi_1^0 \cos \varphi_2^0 \cos \frac{\varphi_1^0 + \varphi_2^0}{2} \right] \sin \frac{\varphi_1^0 - \varphi_2^0}{2} =$$

$$= -\widehat{g} \sin \alpha_0 \cos \Delta \sin (\varphi_1^0 - \varphi_2^0).$$

Уравнения (6) допускают два вида решений. Для первого вида $\sin \frac{\varphi_1^0 - \varphi_2^0}{2} = 0$, который имеет решение $\varphi_1^0 - \varphi_2^0 = 2k\pi$, то есть шарики находятся вместе по беговой дорожке.

Для второго вида решения:

$$(\xi_0 + s_2 \cos \gamma) \cos \alpha_0 - r \sin^2 \alpha_0 \times \left[\sin \Delta \sin \varphi_1^0 \sin \varphi_2^0 \times \right.$$

$$\left. \times \sin \frac{\varphi_1^0 + \varphi_2^0}{2} + \cos \Delta \cos \alpha_0 \cos \varphi_1^0 \cos \varphi_2^0 \cos \frac{\varphi_1^0 + \varphi_2^0}{2} \right] =$$

$$\frac{\cos \frac{\varphi_1^0 - \varphi_2^0}{2}}{2} \quad (7)$$

$$= \widehat{g} \sin \alpha_0 \sin \Delta;$$

$$(\eta_0 + s_2 \sin \gamma) \cos \alpha_0 + \left[r \sin^2 \alpha_0 \cos \Delta \sin \varphi_1^0 \sin \varphi_2^0 \times \right.$$

$$\left. \times \sin \frac{\varphi_1^0 + \varphi_2^0}{2} - \sin \Delta \cos \alpha_0 \cos \varphi_1^0 \cos \varphi_2^0 \cos \frac{\varphi_1^0 + \varphi_2^0}{2} \right] =$$

$$\frac{\cos \frac{\varphi_1^0 - \varphi_2^0}{2}}{2}$$

$$= -\widehat{g} \sin \alpha_0 \cos \Delta.$$

Второй случай соответствует движению ротора с остаточным дисбалансом. Для определения угла наклона беговой дорожки при стационарном движении первого вида обратимся к уравнению относительно угла α .

Так как уравнения движения по отношению переменных α_j не зависят друг от друга, ниже индекс при переменной α_j писать не будем. Учитывая, что в каждой дорожке имеется по два балансировочных шарика, из последнего уравнения (4) получим

$$(\xi_0 \sin \Delta - \eta_0 \cos \Delta) N_1 \sin \alpha - \left[\frac{1}{2} (J_{x_2} - J_{z_2}) \sin 2\alpha - \right.$$

$$\left. - (s_2 N_1 \sin \beta \sin \alpha + N_3 \sin \alpha \cos \alpha) \right] = -g \cos \alpha N_1,$$

где

$$N_1 = r (m_1 \sin \varphi_1 + m_2 \sin \varphi_2) \sin \varphi;$$

$$N_3 = r^2 (m_1 \sin^2 \varphi_1 + m_2 \sin^2 \varphi_2).$$

Для случая стационарного движения первого вида $\varphi_1^0 = \varphi_2^0 = \varphi$, $N_1 = r_1 \tilde{m} \sin \varphi$, $N_2 = r_1 \tilde{m} \cos \varphi$, $N_3 = r_1^2 \tilde{m} \sin^2 \varphi$, $\tilde{m} = m_1 + m_2$, а уравнения для определения α , ξ_0 , η_0 преобразуются к следующему виду:

$$\left(\frac{k}{v^2} - M \right) \xi_0 - \frac{c}{v} \eta_0 = \left[m_p s_1 + (m_{\text{бс}} + \tilde{m}) s_2 \sin \gamma + \right.$$

$$\left. + (N_1 \cos \alpha \sin \Delta - N_2 \cos \Delta) \right];$$

$$\left(\frac{k}{v^2} - M \right) \eta_0 + \frac{c}{v} \xi_0 = \left[(m_{\text{бс}} + \tilde{m}) s_2 \sin \gamma - \right.$$

$$\left. - (N_1 \cos \alpha \cos \Delta N_1 + N_2 \sin \Delta) \right]; \quad (8)$$

$$\left\{ (\xi_0 \sin \Delta - \eta_0 \cos \Delta) - \left[\frac{J_{x_2} - J_{z_2}}{N_1} - \frac{N_3}{N_1} \right] \times \right.$$

$$\left. \times \cos \alpha - s_2 \sin \beta \right\} \sin \alpha = -\frac{g}{v^2} \cos \alpha.$$

Соотношение (8) представляет собой систему трансцендентных уравнений относительно $\xi_0, \eta_0, \varphi, \alpha_0$. Для построения асимптотического решения используем метод теории возмущений (метод малого параметра) [17]. Для достаточно больших угловых скоростей в качестве малого параметра примем $\varepsilon = \frac{1}{v^2}$, и, соответственно, система будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
 (k\varepsilon - M)\xi_0 - \varepsilon\tilde{c}\eta_0 &= m_p s_1 + (m_{\text{вс}} + \tilde{m})s_2 \sin \gamma + \\
 &+ (N_1 \cos \alpha_0 \sin \Delta - N_2 \cos \Delta); \\
 (k\varepsilon - M)\eta_0 + \varepsilon\tilde{c}\xi_0 &= (m_{\text{вс}} + \tilde{m})s_2 \sin \gamma - \\
 &- (N_1 \cos \alpha_0 \cos \Delta + N_2 \sin \Delta); \\
 \left\{ (\xi_0 \sin \Delta - \eta_0 \cos \Delta) - \left[\frac{J_{x_2} - J_{z_2}}{N_1} - \frac{N_3}{N_1} \right] \times \right. \\
 &\left. \times \cos \alpha_0 - s_2 \sin \beta \right\} \sin \alpha_0 = -\varepsilon g \cos \alpha_0.
 \end{aligned} \quad (9)$$

Согласно общей теории возмущений, решение системы (8) будем искать в виде:

$$\begin{aligned}
 \xi_0 &= \bar{\xi}_0 + \bar{\xi}_1 \varepsilon + \bar{\xi}_2 \varepsilon^2 + \dots; \\
 \eta_0 &= \bar{\eta}_0 + \bar{\eta}_1 \varepsilon + \bar{\eta}_2 \varepsilon^2 + \dots; \\
 \cos \alpha_0 &= \cos \bar{\alpha}_0 - \sin \bar{\alpha}_0 \times \\
 &\times (\varepsilon \bar{\alpha}_1 + \varepsilon^2 \bar{\alpha}_2) - \frac{\cos \alpha_0}{2} (\varepsilon \bar{\alpha}_1 + \varepsilon^2 \bar{\alpha}_2)^2 + \dots
 \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя (10) в систему уравнений (9) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, получим для нулевой степени:

$$\begin{aligned}
 &\left((\bar{\xi}_0 \sin \Delta - \bar{\eta}_0 \cos \Delta) + \right. \\
 &\left. + s_2 \sin \beta - Q \cos \bar{\alpha}_0 \right) \sin \bar{\alpha}_0 = 0; \\
 \bar{\xi}_0 &= -\frac{1}{M} (m_p s_1 + (m_{\text{вс}} + \tilde{m})s_2 \cos \gamma + \\
 &+ N_1 \cos \bar{\alpha}_0 \sin \Delta - N_2 \cos \Delta); \\
 \bar{\eta}_0 &= -\frac{1}{M} ((m_{\text{вс}} + \tilde{m})s_2 \sin \gamma - \\
 &- N_1 \cos \bar{\alpha}_0 \cos \Delta - N_2 \sin \Delta),
 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{где } Q = \frac{(J_{x_2} - J_{z_2}) - N_3}{N_1}; \quad N_2 = r(m_1 \cos \varphi_1 + m_2 \cos \varphi_2).$$

Приравнявая коэффициенты при первой степени малого параметра, получим:

$$\begin{aligned}
 &\left[\left((\bar{\xi}_0 \sin \Delta - \bar{\eta}_0 \cos \Delta) + s_2 \sin \beta \right) \cos \bar{\alpha}_0 - Q \cos 2\bar{\alpha}_0 \right] \bar{\alpha}_1 + \\
 &+ (\bar{\xi}_1 \sin \Delta - \bar{\eta}_1 \cos \Delta) \sin \bar{\alpha}_0 = -g \cos \bar{\alpha}_0; \\
 M^2 \bar{\xi}_1 - 2kM \bar{\xi}_0 &= m_p s_1 k + (m_{\text{вс}} + \tilde{m})s_2 (k \cos \gamma + \tilde{c} \sin \gamma) + \\
 &+ N_1 (\cos \bar{\alpha}_0 (k \sin \Delta - \tilde{c} \cos \Delta) + M \sin \bar{\alpha}_0 \sin \Delta^* \bar{\alpha}_1) - \\
 &- N_2 (k \cos \Delta + \tilde{c} \sin \Delta);
 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
 M^2 \bar{\eta}_1 - 2kM \bar{\eta}_0 &= -m_p s_1 \tilde{c} + (m_{\text{вс}} + \tilde{m})s_2 \times \\
 &\times (k \sin \gamma - \tilde{c} \cos \gamma) - N_1 (\cos \bar{\alpha}_0 (k \cos \Delta + \tilde{c} \sin \Delta) + \\
 &+ M \sin \bar{\alpha}_0 \cos \Delta^* \bar{\alpha}_1) - N_2 \cos \bar{\alpha}_0 (k \sin \Delta - \tilde{c} \cos \Delta).
 \end{aligned} \quad (13)$$

Второй порядок относительно малого параметра:

$$\begin{aligned}
 &\left[(\bar{\xi}_0 \sin \Delta - \bar{\eta}_0 \cos \Delta) + s_2 \sin \beta \right] \left(\bar{\alpha}_2 \cos \bar{\alpha}_0 - \frac{\sin \bar{\alpha}_0}{2} \bar{\alpha}_1^2 \right) + \\
 &+ (\bar{\xi}_1 \sin \Delta - \bar{\eta}_1 \cos \Delta) \cos \bar{\alpha}_0 \bar{\alpha}_1 + Q (\cos 2\bar{\alpha}_0 \bar{\alpha}_2 + \\
 &+ \sin 2\bar{\alpha}_0 \bar{\alpha}_1^2) + (\bar{\xi}_2 \sin \Delta - \bar{\eta}_2 \cos \Delta) \sin \bar{\alpha}_0 = -g \sin \bar{\alpha}_0 \bar{\alpha}_1;
 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
 M^2 \bar{\xi}_2 - 2Mk \bar{\xi}_1 + (k^2 + \tilde{c}^2) \bar{\xi}_0 &= N_1 [M \sin \Delta (\sin \bar{\alpha}_0 \bar{\alpha}_2 + \\
 &+ \frac{\cos \bar{\alpha}_0}{2} \bar{\alpha}_1^2) - (k \sin \Delta - \tilde{c} \cos \Delta) \sin \bar{\alpha}_0 \bar{\alpha}_1];
 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
 M^2 \bar{\eta}_2 - 2Mk \bar{\eta}_1 + (k^2 + \tilde{c}^2) \bar{\eta}_0 &= N_1 [-M \cos \Delta (\sin \bar{\alpha}_0 \bar{\alpha}_2 + \\
 &+ \frac{\cos \bar{\alpha}_0}{2} \bar{\alpha}_1^2) + (k \cos \Delta - \tilde{c} \sin \Delta) \sin \bar{\alpha}_0 \bar{\alpha}_1].
 \end{aligned} \quad (16)$$

Из нулевого приближения (11) получим:

$$\begin{aligned}
 &\left\{ (\bar{\xi}_0 \sin \Delta - \bar{\eta}_0 \cos \Delta) - \right. \\
 &\left. - (Q \cos \bar{\alpha}_0 - s_2 \sin \beta) \right\} \sin \bar{\alpha}_0 = 0.
 \end{aligned} \quad (17)$$

Уравнение (19) имеет два решения:

$$\begin{aligned}
 \sin \bar{\alpha}_0 &= 0 \\
 \text{или} & \quad (18)
 \end{aligned}$$

$$Q \cos \bar{\alpha}_0 = (\bar{\xi}_0 \sin \Delta - \bar{\eta}_0 \cos \Delta) + s_2 \sin \beta.$$

Преобразуем второе решение, используя выражения для $\bar{\xi}_0$, $\bar{\eta}_0$. Соответственно имеет место выражение

$$\begin{aligned}
 \bar{\xi}_0 \sin \Delta - \bar{\eta}_0 \cos \Delta &= -\frac{1}{M} (m_p s_1 \sin \Delta + \\
 &+ (m_{\text{вс}} + \tilde{m})s_2 \sin \beta + N_1 \cos \bar{\alpha}_0),
 \end{aligned}$$

подставляя которое в (20) и разрешая относительно $\cos \bar{\alpha}_0$, имеем:

$$\cos \bar{\alpha}_0 = \frac{m_p \tilde{m} (s_2 \sin \beta - s_1 \sin \Delta) \sin \varphi}{-\frac{M \tilde{m}}{2} r + (\tilde{m}^2 - \tilde{m} M) r \sin^2 \varphi}. \quad (19)$$

Рассмотрим первый случай, когда $\sin \bar{\alpha}_0 = 0 \Rightarrow \bar{\alpha}_0 = 0, \pi$. Ко второму случаю обратимся позже. Соответственно отклонения центра масс ротора $\bar{\xi}_0$ и $\bar{\eta}_0$ определяются из уравнений:

$$\begin{aligned}
 \bar{\xi}_0 &= -\frac{1}{M} (m_p s_1 + (m_{\text{вс}} + \tilde{m})s_2 \cos \gamma + \\
 &+ \tilde{m} r (\sin \varphi \sin \Delta - \cos \varphi \cos \Delta)); \\
 \bar{\eta}_0 &= -\frac{1}{M} ((m_{\text{вс}} + \tilde{m})s_2 \sin \gamma + \\
 &+ \tilde{m} r (\sin \varphi \cos \Delta + \cos \varphi \sin \Delta)).
 \end{aligned}$$

Для первого порядка степени малого параметра:

$$\begin{aligned}
 \bar{\alpha}_1 &= \frac{-g}{\bar{\xi}_0 \sin \Delta - \bar{\eta}_0 \cos \Delta + s_2 \sin \beta - Q}; \\
 \bar{\xi}_1 &= \frac{1}{M^2} (2kM \bar{\xi}_0 + m_p s_1 k + (m_{\text{вс}} + \tilde{m})s_2 (k \cos \gamma + \\
 &+ \tilde{c} \sin \gamma) + \tilde{m} r (-k \cos (\varphi + \Delta) - \tilde{c} \sin (\varphi + \Delta)));
 \end{aligned}$$

$$\bar{\eta}_1 = \frac{1}{M^2} \left(2kM\tilde{\eta}_0 - m_p s_1 \tilde{c} + (m_{\text{св}} + \tilde{m}) s_2 (k \sin \gamma - \tilde{c} \cos \gamma) - \tilde{m} r (k \sin(\varphi + \Delta) - \tilde{c} \cos(\varphi + \Delta)) \right).$$

Отсюда видно, что первое приближение для $\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1$ не зависит от $\bar{\alpha}_1$. Подставляя выражение $\xi_0 \sin \Delta - \eta_0 \cos \Delta$ через параметры системы, для $\bar{\alpha}_1$ имеем

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{-MgN_1}{\left[m_p (s_2 \sin \beta - s_1 \sin \Delta) - N_1 \right] N_1 - ((J_{x_2} - J_{z_2}) - N_3) M}.$$

Приравнявая коэффициенты при второй степени порядка малого параметра для $\bar{\alpha}_2, \bar{\xi}_2, \bar{\eta}_2$, получим соотношения:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_2 &= \frac{(\bar{\xi}_1 \sin \Delta - \bar{\eta}_1 \cos \Delta) \bar{\alpha}_1}{\bar{\xi}_0 \sin \Delta - \bar{\eta}_0 \cos \Delta + s_2 \sin \beta - Q}; \\ \bar{\xi}_2 &= \frac{1}{M} \left(2k\bar{\xi}_1 + r\tilde{m} \sin \varphi \sin \Delta \frac{\bar{\alpha}_1^2}{2} \right) - \frac{k^2 + \tilde{c}}{M^2} \bar{\xi}_0; \\ \bar{\eta}_2 &= \frac{1}{M} \left(2\bar{\eta}_1 + r\tilde{m} \sin \varphi \cos \Delta \frac{\bar{\alpha}_1^2}{2} \right) - \frac{k^2 + \tilde{c}}{M^2} \bar{\eta}_0. \end{aligned}$$

Полученные результаты позволяют построить асимптотическое решение системы уравнений (8) с учетом второго порядка относительно малого параметра.

Теперь рассмотрим второй случай, то есть соответствующий несбалансированному вращательному движению ротора с остаточным дисбалансом:

$$\begin{aligned} \xi_0 \cos \alpha_0 \cos \frac{\varphi_1^0 - \varphi_2^0}{2} + s_2 \cos \frac{\varphi_1^0 - \varphi_2^0}{2} \cos \alpha_0 \cos \gamma - \\ - r \sin^2 \alpha_0 \left[\sin \Delta \sin \varphi_1^0 \sin \varphi_2^0 \sin \frac{\varphi_1^0 + \varphi_2^0}{2} + \right. \\ \left. + \cos \Delta \cos \alpha_0 \cos \varphi_1^0 \cos \varphi_2^0 \cos \frac{\varphi_1^0 + \varphi_2^0}{2} \right] = \\ = \bar{g} \sin \alpha_0 \sin \Delta \cos \frac{\varphi_1^0 - \varphi_2^0}{2}; \quad (22) \\ \eta_0 \cos \alpha_0 \cos \frac{\varphi_1^0 - \varphi_2^0}{2} + s_2 \cos \frac{\varphi_1^0 - \varphi_2^0}{2} \cos \alpha_0 \sin \gamma + \\ + r \sin^2 \alpha_0 \left[\cos \Delta \sin \varphi_1^0 \sin \varphi_2^0 \sin \frac{\varphi_1^0 + \varphi_2^0}{2} - \right. \\ \left. - \sin \Delta \cos \alpha_0 \cos \varphi_1^0 \cos \varphi_2^0 \cos \frac{\varphi_1^0 + \varphi_2^0}{2} \right] = \\ = -\bar{g} \sin \alpha_0 \cos \Delta \cos \frac{\varphi_1^0 - \varphi_2^0}{2}. \end{aligned}$$

Как сделали выше, преобразуем систему (22). Для этого умножим первое уравнение на $\cos \Delta \alpha$, второе — на $\sin \Delta$ и сложим. Аналогично отнимем правые и левые части уравнения, умножая первое на $\sin \Delta$, а второе — на $\cos \Delta$.

В итоге имеем:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_0 \left[(\xi_0 \cos \Delta + \eta_0 \sin \Delta + s_2 \cos \beta) \cos \frac{\varphi_1^0 - \varphi_2^0}{2} - \right. \\ \left. - r \sin^2 \alpha_0 \cos \varphi_1^0 \cos \varphi_2^0 \cos \frac{\varphi_1^0 + \varphi_2^0}{2} \right] = 0; \quad (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha_0 (\xi_0 \sin \Delta - \eta_0 \cos \Delta + s_2 \sin \beta) \cos \frac{\varphi_1^0 - \varphi_2^0}{2} - \\ - r \sin^2 \alpha_0 \sin \varphi_1^0 \sin \varphi_2^0 \sin \frac{\varphi_1^0 + \varphi_2^0}{2} = \frac{g}{v^2} \sin \alpha_0 \cos \frac{\varphi_1^0 - \varphi_2^0}{2}. \quad (24) \end{aligned}$$

Из уравнения (23) следует, что

$$\cos \alpha_0 = 0 \quad \left(\alpha_0 = \pm \frac{\pi}{2} \right)$$

или

$$\begin{aligned} (\xi_0 \cos \Delta + \eta_0 \sin \Delta + s_2 \cos \beta) \cos \frac{\varphi_1^0 - \varphi_2^0}{2} - \\ - r \sin^2 \alpha_0 \cos \varphi_1^0 \cos \varphi_2^0 \cos \frac{\varphi_1^0 + \varphi_2^0}{2} = 0. \end{aligned}$$

Первый случай соответствует вертикальному положению беговой дорожки, а из уравнения (24) получим

$$-r_0 \sin \varphi_1^0 \sin \varphi_2^0 \sin \frac{\varphi_1^0 + \varphi_2^0}{2} = \frac{g}{v^2} \cos \frac{\varphi_1^0 - \varphi_2^0}{2}.$$

Теперь определим положения балансировочных шариков по беговой дорожке и отклонение центра масс ротора. Подставляя значение угла в систему (9), имеем:

$$\begin{aligned} (k\varepsilon - M) \xi_0 - \varepsilon \tilde{c} \eta_0 = m_p s_1 + (m_{\text{св}} + \tilde{m}) s_2 \sin \gamma - N_3 \cos \Delta; \\ (k\varepsilon - M) \eta_0 + \varepsilon \tilde{c} \xi_0 = (m_{\text{св}} + \tilde{m}) s_2 \sin \gamma - N_3 \sin \Delta; \quad (25) \end{aligned}$$

$$N_1 [(\xi_0 \sin \Delta - \eta_0 \cos \Delta) + s_2 \sin \beta] = 0; \quad (26)$$

$$r \sin \varphi_1^0 \sin \varphi_2^0 \sin \frac{\varphi_1^0 + \varphi_2^0}{2} = -\frac{g}{v^2} \cos \frac{\varphi_1^0 - \varphi_2^0}{2}. \quad (27)$$

Соответственно, из (26):

$$N_1 = r(m_1 \sin \varphi_1^0 + m_2 \sin \varphi_2^0) = 0$$

или

$$(\xi_0 \sin \Delta - \eta_0 \cos \Delta) + s_2 \sin \beta = 0.$$

1. Выполняется равенство $N_1 = m_1 \sin \varphi_1^0 + m_2 \sin \varphi_2^0 = 0$. Легко определить, что решение $\varphi_1^0 = 0, \pi$ и $\varphi_2^0 = \pi, 0$ удовлетворяет уравнениям (26) и (27), то есть балансировочные шарики будут располагаться друг напротив друга. Остаточный дисбаланс ξ_0, η_0 определяется из уравнений:

$$\begin{aligned} \xi_0 = \frac{1}{A^2} (m_p s_1 \delta_1 + (m_{\text{св}} + \tilde{m}) s_2 (\delta_1 \cos \gamma + \delta_2 \sin \gamma) - \\ - r(\pm m_1 \mp m_2)(\delta_1 \cos \Delta + \delta_2 \sin \Delta)); \end{aligned}$$

$$\eta_0 = \frac{1}{A^2} \left(-m_p s_1 \delta_2 + (m_{6c} + \tilde{m}) s_2 (\delta_1 \sin \gamma - \delta_2 \cos \gamma) - r(\pm m_1 \mp m_2)(\delta_1 \sin \Delta - \delta_2 \cos \Delta) \right),$$

где $\delta_1 = \left(\frac{k}{v^2} - M \right)$; $\delta_2 = \frac{c}{v}$; $A = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$.

2. Рассмотрим случай

$$\cos \alpha_0 = 0; (\xi_0 \sin \Delta - \eta_0 \cos \Delta) + s_2 \sin \beta = 0. \quad (28)$$

Из системы уравнений (25) легко получить соотношение

$$\begin{aligned} \xi_0 \sin \Delta - \eta_0 \cos \Delta = & \frac{1}{A^2} \left[m_p s_1 (\delta_1 \sin \Delta + \delta_2 \cos \Delta) + \right. \\ & \left. + (m_{6c} + \tilde{m}) s_2 (\delta_1 \sin \beta + \delta_2 \cos \beta) - \right. \\ & \left. - \delta_2 r (m_1 \cos \varphi_1^0 + m_2 \cos \varphi_2^0) \right]. \end{aligned}$$

Подставляя полученный результат в условие (28), имеем

$$\begin{aligned} & \left[m_p s_1 (\delta_1 \sin \Delta + \delta_2 \cos \Delta) + (m_{6c} + \tilde{m}) s_2 \times \right. \\ & \quad \left. \times (\delta_1 \sin \beta + \delta_2 \cos \beta) - \right. \\ & \left. - \delta_2 r (m_1 \cos \varphi_1^0 + m_2 \cos \varphi_2^0) \right] + A^2 s_2 \sin \beta = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Присоединяя соотношение (27), получим

$$r \sin \varphi_1^0 \sin \varphi_2^0 \sin \frac{\varphi_1^0 + \varphi_2^0}{2} = -\frac{g}{v^2} \cos \frac{\varphi_1^0 - \varphi_2^0}{2}. \quad (30)$$

Таким образом, из уравнений (29) и (30) определяются положения балансировочных шариков. Если угловая скорость вращения ротора имеет достаточно большие значения, то $\varepsilon = \frac{1}{v^2} \approx 0$. Тогда уравнения (29) и (30) преобразуются и примут вид:

$$\begin{aligned} r \sin \varphi_1^0 \sin \varphi_2^0 \sin \frac{\varphi_1^0 + \varphi_2^0}{2} &= 0; \\ -m_p s_1 \sin \Delta - (m_{6c} + \tilde{m}) s_2 \sin \beta + M s_2 \sin \beta &= 0, \end{aligned}$$

так как второе уравнение зависит только от параметров системы и не всегда имеет место. Действительно, если иметь в виду что $M = m_p + m_{6c} + \tilde{m}$, то

$$m_p (s_2 \sin \beta - s_1 \sin \Delta) = 0 \Rightarrow s_2 \sin \beta = s_1 \sin \Delta.$$

По постановке задачи это равенство не всегда имеет место. Таким образом, второй случай при достаточно больших угловых скоростях физически не реализуем.

3. Выполняется соотношение

$$\begin{aligned} (\xi_0 \cos \Delta + \eta_0 \sin \Delta) \cos \frac{\varphi_1^0 - \varphi_2^0}{2} + s_2 \cos \frac{\varphi_1^0 - \varphi_2^0}{2} \cos \beta - \\ - r \sin^2 \alpha_0 \cos \varphi_1^0 \cos \varphi_2^0 \cos \frac{\varphi_1^0 + \varphi_2^0}{2} = 0 \end{aligned}$$

или

$$\sin^2 \alpha_0 = \frac{\left((\xi_0 \cos \Delta + \eta_0 \sin \Delta) + s_2 \cos \beta \right) \cos \frac{\varphi_1^0 - \varphi_2^0}{2}}{r \cos \varphi_1^0 \cos \varphi_2^0 \cos \frac{\varphi_1^0 + \varphi_2^0}{2}}.$$

Как видно, определение величин $\xi_0, \eta_0, \varphi_1, \varphi_2, \alpha$ сводится к решению системы уравнений:

$$\begin{aligned} \left(\frac{k}{v^2} - M \right) \xi_0 - \frac{c}{v} \eta_0 = & \left[m_p s_1 + (m_{6c} + \tilde{m}) s_2 \sin \gamma + \right. \\ & \left. + r \cos \alpha_0 (m_1 \sin \varphi_1^0 + m_2 \sin \varphi_2^0) \sin \Delta - \right. \\ & \left. - r (m_1 \cos \varphi_1^0 + m_2 \cos \varphi_2^0) \cos \Delta \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{k}{v^2} - M \right) \eta_0 + \frac{c}{v} \xi_0 = & \left[(m_{6c} + \tilde{m}) s_2 \sin \gamma - \right. \\ & \left. - r \cos \alpha_0 (m_1 \sin \varphi_1^0 + m_2 \sin \varphi_2^0) \cos \Delta + \right. \\ & \left. + (m_1 \cos \varphi_1^0 + m_2 \cos \varphi_2^0) \sin \Delta \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left((\xi_0 \sin \Delta - \eta_0 \cos \Delta) - \left[\frac{J_{x_2} - J_{z_2}}{N_1} - \frac{N_3}{N_1} \right] \cos \alpha_0 - \right. \\ \left. - s_2 \sin \beta \right) \sin \alpha_0 = -\frac{g}{v^2} \cos \alpha_0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r \sin^2 \alpha_0 \cos \varphi_1^0 \cos \varphi_2^0 \cos \frac{\varphi_1^0 + \varphi_2^0}{2} = & \left((\xi_0 \cos \Delta + \right. \\ & \left. + \eta_0 \sin \Delta) + s_2 \cos \beta \right) \cos \frac{\varphi_1^0 - \varphi_2^0}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha_0 \left[(\xi_0 \cos \Delta - \eta_0 \sin \Delta + s_2 \sin \beta) \right] \cos \frac{\varphi_1^0 - \varphi_2^0}{2} - \\ - r \sin^2 \alpha_0 \sin \varphi_1^0 \sin \varphi_2^0 \sin \frac{\varphi_1^0 + \varphi_2^0}{2} = \\ = \frac{g}{v^2} \sin \alpha_0 \cos \frac{\varphi_1^0 - \varphi_2^0}{2}. \end{aligned}$$

Применение метода возмущений в последнем случае не дает положительного результата, так как найти решение порождающего уравнения аналитического вида не удастся.

Заключение. 1. Проведен анализ стационарных движений статически несбалансированного ротора с АБУ. При этом учитывается не только эксцентricность центра АБУ, но и случай, когда беговые дорожки с балансировочными шариками обладают осью вращения.

2. С помощью метода возмущений исследован один из видов стационарного движения и в частном случае получено асимптотическое решение с точностью второй степени малого параметра.

3. Также в аналитическом виде получены значения координаты центра масс ротора и расположения балансировочных шариков в одном из случаев несбалансированного стационарного движения.

Список литературы

- Genta, G. Dynamics of rotating systems / G. Genta. — New York: Springer, 2005. — 658 p.
- Yamamoto, T. Linear and nonlinear rotordynamics: a modern treatment with applications / T. Yamamoto, Y. Ishida. — New York: Wiley, 2001. — 325 p.
- Никифоров, А.Н. Состояние проблемы уравнивания роторов / А.Н. Никифоров // Вестник научно-технического развития. — 2013. — № 4(68). — С. 20–28.
- Быков, В.Г. Динамика ротора с эксцентрическим шаровым автобалансирующим устройством / В.Г. Быков, А.С. Ковачев // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. — 2014. — Т. 1, № 4. — С. 579–588.
- Быков, В.Г. Прохождение через резонанс статически неуравновешенного ротора с «неидеальным» автобалансирующим механизмом / В.Г. Быков, А.С. Ковачев // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. — 2017. — Т. 4, № 4. — С. 671–680.
- Быков, В.Г. Динамика статически неуравновешенного ротора с эллиптическим шаровым автобалансирующим устройством / В.Г. Быков, А.С. Ковачев // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. — 2019. — Т. 6, № 3. — С. 452–461.
- Быков, В.Г. Нестационарные режимы движения статически неуравновешенного ротора с автобалансирующим механизмом / В.Г. Быков // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. — 2010. — № 3. — С. 89–96.
- Быков, В.Г. Математическая модель гибкого ротора на основе обобщенных лагранжевых координат / В.Г. Быков, А.Е. Мельников // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. — 2010. — № 4. — С. 110–118.
- Пасынкова, И.А. Совместные нелинейные колебания неуравновешенного ротора и корпуса / И.А. Пасынкова // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. — 2014. — Т. 1, № 1. — С. 152–161.
- Горбенко, А.Н. Некоторые нетривиальные свойства механической системы «ротор – шариковый автобалансирующий» / А.Н. Горбенко // Вибрации в технике и технологиях. — 2002. — № 3(24). — С. 33–36.
- Кыдырбекулы, А.Б. Об автоколебаниях в вертикальных роторных системах, установленных на упругих опорах / А.Б. Кыдырбекулы, Г.Е. Ибраев // Journal of Mathematics, Mechanics, Computer Science. — 2020. — № 1(105). — С. 160–173. — DOI: <https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.V105.I1.14>.
- Ollson, K.-O. Limits for the use of auto-balancing / K.-O. Ollson // International Journal of Rotating Machinery. — 2004. — Vol. 10, iss. 3. — P. 221–226. — DOI: <https://doi.org/10.1155/S1023621X04000235>.
- Зайцев, Н.Н. Инженерный анализ установившихся режимов однодискового ротора с многоядным шаровым автобалансирующим устройством / Н.Н. Зайцев, Д.Н. Зайцев, А.А. Макаров // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Аэрокосмическая техника. — 2017. — № 48. — С. 43–59. — DOI: <https://doi.org/10.15593/2224-9982/2017.48.05>.
- Диментберг, Ф.М. Колебания машин / Ф.М. Диментберг, К.Т. Шаталов, А.А. Гусаров. — М.: Машиностроение, 1964. — 308 с.
- Кельзон, А.С. Управление колебаниями роторов / А.С. Кельзон, Л.М. Калинин; под ред. К.М. Рагульска. — СПб.: Политехника, 1992. — 118 с.
- Кельзон, А.С. Динамика роторов в упругих опорах / А.С. Кельзон, Ю.П. Циманский, В.И. Яковлев. — М.: Наука, 1982. — 280 с.
- Найфэ, А.Х. Методы возмущений / А.Х. Найфэ; пер. с англ. А.А. Меликяна, А.А. Миронова; под ред. Ф.Л. Черноусько. — М.: Мир, 1976. — 652 с.

SIDIKOV Mansur N., Ph. D. in Eng.

Associate Professor of the Department “General Technical Disciplines”

E-mail: mansur.sidikov1711@gmail.com

Almalyk branch of NUST “MISIS”, Almalyk, Republic of Uzbekistan

Received October 10, 2025.

DETERMINING THE STATIONARY MOTIONS OF A STATICALLY UNBALANCED ROTOR WITH A BALL SELF-BALANCING DEVICE BY A SMALL PARAMETER METHOD

The small parameter method was used to analyze the necessary conditions for stationary motions of a rotor mounted on a flexible shaft with a ball self-balancing device, when running tracks of the balancing balls are installed not only by eccentricity, but also have a horizontal axis of rotation. In this case, the parameter inversely proportional to the square of the angular velocity of the rotor is taken as the small parameter. In a particular case, an asymptotic solution is obtained taking into account the second power of the small parameter, as well as an exact solution to one of the cases of unbalanced rotor motion.

Keywords: self-balancing device, eccentricity, running track, generalized coordinates

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2026-2-75-52-61>

References

- Genta G. Dynamics of rotating systems. New York, Springer, 2005. 658 p.
- Yamamoto T., Ishida Y. Linear and nonlinear rotordynamics: a modern treatment with applications. New York, Wiley, 2001. 325 p.
- Nikiforov A.N. Sostoyaniye problemy uravnoveshivaniya roto-rov [State of rotors balancing problem]. *Bulletin of science and technical development*, 2013, no. 4(68), pp. 20–28 (in Russ.).
- Bykov V.G., Kovachev A.S. Dinamika rotora s eksstentricheskim sharovym avtobalansirovochnym ustroystvom [Dynamic

- of a statically unbalanced rotor with eccentric ball autobalancer]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2014, vol. 1, no. 4, pp. 579–588 (in Russ.).
5. Bykov V.G., Kovachev A.S. Prokhozhdenie cherez rezonans staticheski neuravnoveshchannogo rotora s “neidealnym” avtobalansirovochnym mekhanizmom [Passage through the resonance of a statically unbalanced rotor with “imperfect” auto-balancing device]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4, no. 4, pp. 671–680 (in Russ.).
 6. Bykov V.G., Kovachev A.S. Dinamika staticheski neuravnoveshennogo rotora s ellipticheskim sharovym avtobalansirovochnym ustroystvom [Dynamics of a statically unbalanced rotor with an elliptic automatic ball balancer]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2019, vol. 6, no. 3, pp. 452–461 (in Russ.).
 7. Bykov V.G. Nestatsionarnye rezhimy dvizheniya staticheski neuravnoveshennogo rotora s avtobalansirovochnym mekhanizmom [Nonstationary behavior of statically unbalanced rotor with the automatic balancer]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2010, no. 3, pp. 89–96 (in Russ.).
 8. Bykov V.G., Melnikov A.E. Matematicheskaya model gibkogo rotora na osnove obobshchennykh lagranzhevyykh koordinat [A mathematical model of a flexible rotor using the generalized Lagrangian coordinates]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2010, no. 4, pp. 110–118 (in Russ.).
 9. Pasyukova I.A. Sovmestnye nelineynye kolebaniya neuravnoveshennogo rotora i korpusa [Non-linear vibration of the rotor-housing system]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2014, vol. 1, no. 1, pp. 152–161 (in Russ.).
 10. Gorbenko A.N. Nekotorye netrivialnye svoystva mekhanicheskoy sistemy “rotor – sharikovyy avtobalansir” [Some non-trivial properties of the “rotor – ball auto-balancer” mechanical system]. *Vibratsii v tekhnike i tekhnologiyakh*, 2002, no. 3(24), pp. 33–36 (in Russ.).
 11. Kydyrbekuly A.B., Ibrayev G.E. Ob avtokolebaniyakh v vertikalnykh rotornykh sistemakh, ustanovlennykh na uprugikh oporakh [The self-oscillation in the vertical rotor system mounted on elastic supports]. *Journal of mathematics, mechanics, computer science*, 2020, no. 1(105), pp. 160–173. DOI: <https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.V105.I1.14> (in Russ.).
 12. Ollson K.-O. Limits for the use of auto-balancing. *International journal of rotating machinery*, 2004, vol. 10, iss. 3, pp. 221–226. DOI: <https://doi.org/10.1155/S1023621X04000235>.
 13. Zaytsev N.N., Zaytsev D.N., Makarov A.A. Inzhenernyy analiz ustanovivshikhsya rezhimov odnodiskovogo rotora s mnogoradnym sharovym avtobalansiruyushchim ustroystvom [Engineering analysis of steady-state regimes of the single-disk rotor with multi-row ball self-balancing device]. *PNRPU aerospace engineering bulletin*, 2017, no. 48, pp. 43–59. DOI: <https://doi.org/10.15593/2224-9982/2017.48.05> (in Russ.).
 14. Dimentberg F.M., Shatalov K.T., Gusarov A.A. *Kolebaniya mashin* [Machine fluctuations]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1964. 308 p. (in Russ.).
 15. Kelzon A.S., Malinin L.M. *Upravlenie kolebaniyami rotorov* [Rotor oscillation control]. Saint Petersburg, Politekhnik Publ., 1992. 118 p. (in Russ.).
 16. Kelzon A.S., Tsimanskiy Yu.P., Yakovlev V.I. *Dinamika rotorov v uprugikh oporakh* [Dynamics of rotors in elastic supports]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 280 p. (in Russ.).
 17. Nayfeh A.H. *Perturbation methods*. Wiley-VCH, 1973. 448 p.