

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3

Э.И. СТАРОВОЙТОВ, д-р физ.-мат. наук, проф.

профессор кафедры «Строительная механика, геотехника и строительные конструкции»¹

E-mail: edstar0@yandex.by

В.С. САЛИЦКИЙ

аспирант¹

E-mail: vladislavsalitski@gmail.com

¹Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 25.11.2025.

ИЗГИБ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЧНОЙ ПО ТОЛЩИНЕ КРУГОВОЙ ПЯТИСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ

Рассмотрена задача об изгибе осесимметричной распределенной нагрузкой пятислойной круговой симметричной по толщине пластины. Центральные и внешние слои предполагаются несущими, тонкими, повышенной жесткости. Они воспринимают основную часть силовой нагрузки и могут проявлять упругопластические свойства. Их деформирование отвечает гипотезам Кирхгофа. Для связи несущих слоев используются два относительно толстых нелинейно упругих заполнителя. Они обеспечивают перераспределение усилий между слоями, применяются для защиты от нежелательных внешних воздействий — температуры, радиации. Деформирование заполнителей описывается гипотезами Тимошенко, т. е. учитывается относительный сдвиг — дополнительный поворот нормали к срединной поверхности слоя. Система дифференциальных уравнений равновесия рассматриваемой пластины получена с помощью вариационного метода Лагранжа. Она включает систему из двух нелинейных дифференциальных уравнений. Искомые функции являются прогиб пластины, радиальное перемещение срединной плоскости центрального несущего слоя и два относительных сдвига в заполнителях. Для решения соответствующей краевой задачи применен метод упругих решений Ильюшина. Общее решение получено в рекуррентном виде. Приведены формулы расчета искомых перемещений и относительных сдвигов при граничных условиях жесткой заделки контура пластины. Численно исследована сходимость метода и зависимость решения от физической нелинейности материалов слоев.

Ключевые слова: круговая пятислойная пластина, физическая нелинейность, изгиб, аналитическое решение, численные результаты

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2026-2-75-62-70>

Введение. Слоистые элементы конструкций широко применяются в различных областях современной техники и строительства, что потребовало разработки методик их расчета при различных внешних воздействиях. В монографиях [1–7] предлагаются подходы к разработке расчетных моделей трехслойных и многослойных конструкций, выполненных из композитных материалов, проявляющих в процессе деформирования упру-

гие и физически нелинейные свойства. Несущие слои, как правило, приняты тонкими, достаточно жесткими, подчиняющимися гипотезам Бернулли (Кирхгофа). В легких заполнителях справедлива гипотеза Тимошенко, т. е. учитывается деформация относительного сдвига.

Свободные и собственные колебания тонкостенных слоистых и пятислойных пластин и стержней рассмотрены в работах [8–12]. Пяти-

слоистые упругие конструкции состоят из трех несущих слоев и двух заполнителей. Решение задач получено в виде разложения в ряды по системам собственных функций. Численно исследована зависимость частот собственных колебаний от геометрических и упругих характеристик материалов слоев.

В статьях [13–16] рассмотрены особенности колебаний трехслойных стержней, находящихся под действием локальных, импульсных и нестационарных нагрузок. В [16] учтено воздействие упругого основания. Для решения соответствующих начально-краевых задач использован метод разложения искомых перемещений в ряды по системам собственных функций.

В статьях [17–19] исследованы динамические характеристики цилиндрических и сферических оболочек с учетом влияния упругого основания и нестационарного контактного взаимодействия. В работах [20–24] исследовано акустическое, ударно-периодическое и жидкостное воздействие на колебания трехслойных круговых пластин, включая сверхзвуковой флаттер.

Изгиб прямоугольных, круговых и кольцевых пластин на упругих основаниях Винклера и Пастернака рассмотрен в статьях [25–29]. Кинематические гипотезы принимались соответствующими ломаной линии, заполнители легкие. Осесимметричному деформированию упругопластических трехслойных пластин и стержней посвящены работы [30, 31]. Физические уравнения состояния соответствуют уравнениям малых упругопластических деформаций, заполнители жесткие. Сжимаемость заполнителя и развитие дефектов в многослойных композитных пластинах при статических нагрузках учтены в [32, 33]. Деформированию пятислойных упругих круговых симметричных по толщине пластин посвящены публикации [34–36].

Здесь приводится постановка и решение краевой задачи об изгибе упругопластической симметричной по толщине круговой пятислойной пластины.

Постановка задачи. В пятислойной, несимметричной по толщине пластине вводится цилиндрическая система координат, связанная со средней плоскостью внутреннего несущего слоя (рисунок 1). В тонких жестких несущих слоях 1, 2, 4 справедливы гипотезы Кирхгофа. Для описания деформирования сравнительно толстых заполнителей 3, 5 используется гипотеза Тимошенко, предполагающая прямолинейность и поворот нормалей на дополнительный угол $\psi(r)$ — относительный сдвиг в заполнителях. Искомыми функциями являются прогиб пластины $w(r)$ и относительный сдвиг $\psi(r)$. Осесимметричная нагрузка $q(r)$ распределена по поверхности пластины. На контуре ($r = r_0$) принимается наличие жесткой диафрагмы, не допускающей относительный сдвиг

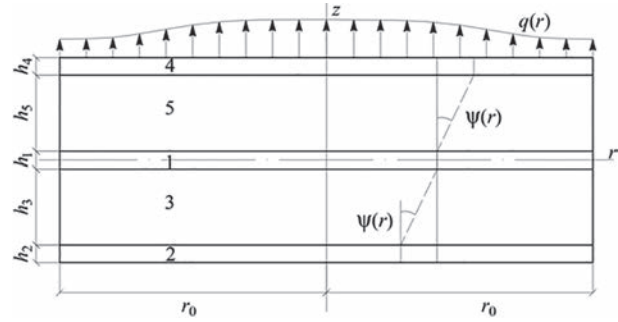


Рисунок 1 — Расчетная схема и нумерация слоев в пятислойной пластине

слоев ($\psi(r_0) = 0$). Через h_k обозначена толщина k -го слоя.

Из гипотезы Тимошенко следует

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{rz}^{(5)} &= u_{r,z}^{(5)} + w_{,r} = \psi; \\ 2\varepsilon_{rz}^{(3)} &= u_{r,z}^{(3)} + w_{,r} = \psi, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\psi(r)$ — относительный сдвиг в заполнителях 3, 5; запятой в нижнем индексе обозначена операция дифференцирования по следующей за ней координате; верхний числовой индекс здесь и далее, если другое не указано, — номер слоя.

После интегрирования соотношений (1) получим формулы для вычисления радиальных перемещений $u_r^{(k)}$ в слоях:

$$\begin{aligned} u_r^{(4)} &= -zw_{,r} + h_3\psi; & 0,5h_1 + h_3 \leq z \leq 0,5h_1 + h_3 + h_2; \\ u_r^{(5)} &= -zw_{,r} + (z - 0,5h_1)\psi; & 0,5h_1 \leq z \leq 0,5h_1 + h_3; \\ u_r^{(1)} &= -zw_{,r}; & -0,5h_1 \leq z \leq 0,5h_1; \\ u_r^{(3)} &= -zw_{,r} + (z + 0,5h_1)\psi; \\ & -0,5h_1 - h_3 \leq z \leq -0,5h_1; & u_r^{(2)} = -zw_{,r} - h_3\psi; \\ & -0,5h_1 - h_3 - h_2 \leq z \leq -0,5h_1 - h_3, \end{aligned} \quad (2)$$

где z — координата рассматриваемой точки поперечного сечения; $h_3\psi, -h_3\psi$ — величины смещений верхнего и нижнего несущих слоев за счет относительных сдвигов в заполнителях; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Деформации следуют из (2) и соотношений Коши. Связь напряжений и деформаций в слоях описывается соотношениями теории малых упругопластических деформаций Ильюшина [3], которые справедливы также и для нелинейно упругих материалов при прямом нагружении:

$$\begin{aligned} s_\alpha^{(k)} &= 2G_k \left(1 - \omega_k \left(\varepsilon_u^{(k)} \right) \right) \varepsilon_\alpha^{(k)}; \\ \sigma^{(k)} &= 3K_k \varepsilon^{(k)} \quad (\alpha = r, \varphi; k = 1, \dots, 5); \end{aligned} \quad (3)$$

$s_{rz}^{(3)} = G_3 \left(1 - \omega_3 \left(\varepsilon_u^{(3)} \right) \right) \psi_2$; $s_{rz}^{(5)} = G_3 \left(1 - \omega_3 \left(\varepsilon_u^{(5)} \right) \right) \psi_1$, где $s_\alpha^{(k)}, s_{rz}^{(3)}, s_{rz}^{(5)}, \varepsilon_\alpha^{(k)}$ — девиаторы; $\sigma^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$ — шаровые части тензоров напряжений и деформаций; G_k, K_k — модули сдвига и объемной деформации

материалов слоев, причем материалы внешних несущих слоев одинаковы, заполнителей тоже ($G_3 = G_5, K_3 = K_5$); $\varepsilon_u^{(k)}$ — интенсивность деформаций; $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)})$ — функции пластичности и физической нелинейности материалов слоев, которые при $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_y^{(k)}$ (в заполнителях $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_s^{(k)}$) обращаются в ноль; $\varepsilon_y^{(k)}, \varepsilon_s^{(k)}$ — деформационные пределы текучести и физической нелинейности материалов слоев.

Используя компоненты тензора напряжений $\sigma_\alpha^{(k)}$ ($\alpha = r, \varphi$), введем обобщенные внутренние усилия и моменты в пластине:

$$\begin{aligned} T_\alpha &\equiv \sum_{k=1}^5 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^5 \sigma_\alpha^{(k)} dz; \quad M_\alpha \equiv \sum_{k=1}^5 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^5 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz; \\ Q &= \int_{0,5h_1}^{0,5h_1+h_5} \sigma_{rz}^{(5)} dz + \int_{-0,5h_1-h_3}^{-0,5h_1} \sigma_{rz}^{(3)} dz; \\ H_\alpha &= h_3(T_\alpha^{(4)} - T_\alpha^{(2)}) - 0,5h_1(T_\alpha^{(5)} - T_\alpha^{(3)}) + M_\alpha^{(5)} + M_\alpha^{(3)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Система дифференциальных уравнений равновесия и граничные условия во внутренних обобщенных усилиях пятислойной пластины, полученные в [34] с помощью вариационного принципа Лагранжа, будут справедливы и в рассматриваемом случае, т. к. при их выводе не были использованы физические уравнения связи напряжений с деформациями:

$$\begin{aligned} H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) - Q &= 0; \\ M_{r,r} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_\varphi) &= -q. \end{aligned} \quad (5)$$

На границе $r = r_0$ должны выполняться силовые условия:

$$\begin{aligned} T_r &= T_r^0; \quad H_r = H_r^0; \quad M_r = M_r^0; \\ M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) &= Q^0, \end{aligned} \quad (6)$$

где T_r^0, H_r^0, M_r^0, Q^0 — известные контурные усилия.

Выделим в компонентах тензора напряжений упругие (индекс e) и неупругие (индекс ω) составляемые:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^{(k)} &= \sigma_{ae}^{(k)} - \sigma_{a\omega}^{(k)} \quad (\alpha = r, \varphi; k = 1, \dots, 5); \\ \sigma_{rz}^{(3)} &= \sigma_{rze}^{(3)} - \sigma_{rz\omega}^{(3)}; \quad \sigma_{rz}^{(5)} = \sigma_{rze}^{(5)} - \sigma_{rz\omega}^{(5)}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{ae}^{(k)} &= 2G_k \varepsilon_\alpha^{(k)} + K_k \theta^{(k)}; \quad \sigma_{a\omega}^{(k)} = 2G_k \omega_k \varepsilon_\alpha^{(k)}; \\ \sigma_{rze}^{(3)} &= 2G_3 \varepsilon_{rz}^{(3)}; \quad \sigma_{rz\omega}^{(3)} = 2G_3 \omega_3 \varepsilon_{rz}^{(3)}; \\ \sigma_{rze}^{(5)} &= 2G_3 \varepsilon_{rz}^{(5)}; \quad \sigma_{rz\omega}^{(5)} = 2G_3 \omega_3 \varepsilon_{rz}^{(5)}. \end{aligned}$$

Внутренние усилия и моменты (4) в слоях пластины также разложим на линейную (индекс e) и нелинейную (индекс ω) составляющие:

$$\begin{aligned} T_\alpha^{(k)} &= T_{ae}^{(k)} - T_{a\omega}^{(k)}; \quad M_\alpha^{(k)} = M_{ae}^{(k)} - M_{a\omega}^{(k)}; \\ Q &= Q_e - Q_\omega \quad (\alpha = r, \varphi; i = 1, 2; k = 1, \dots, 5), \end{aligned} \quad (8)$$

где упругие $T_{ae}^{(k)}, M_{ae}^{(k)}, Q_{ie}$ и нелинейные составляющие $T_{a\omega}^{(k)}, M_{a\omega}^{(k)}, Q_{i\omega}$ вычисляются по интегральным формулам (4), в которых напряжения $\sigma_\alpha^{(k)}$ нужно заменить на $\sigma_{ae}^{(k)}$ и $\sigma_{a\omega}^{(k)}$, а $\sigma_{rz}^{(3)}, \sigma_{rz}^{(5)}$ на $\sigma_{rze}^{(3)}, \sigma_{rze}^{(5)}$ и $\sigma_{rz\omega}^{(3)}, \sigma_{rz\omega}^{(5)}$ из (7) соответственно.

После этого обобщенные внутренние усилия в соответствии с (8) будут равны:

$$\begin{aligned} T_\alpha &= T_{ae} - T_{a\omega} \equiv \sum_{k=1}^5 T_{ae}^{(k)} - \sum_{k=1}^5 T_{a\omega}^{(k)}; \\ M_\alpha &= M_{ae} - M_{a\omega} \equiv \sum_{k=1}^5 M_{ae}^{(k)} - \sum_{k=1}^5 M_{a\omega}^{(k)}; \\ H_\alpha &= H_{ae} - H_{a\omega}; \\ H_{ae} &\equiv h_3(T_{ae}^{(4)} - T_{ae}^{(2)}) - 0,5h_3(T_{ae}^{(5)} - T_{ae}^{(3)}) + M_{ae}^{(5)} + M_{ae}^{(3)}; \\ H_{a\omega} &= h_3(T_{a\omega}^{(4)} - T_{a\omega}^{(2)}) - 0,5h_1(T_{a\omega}^{(5)} - T_{a\omega}^{(3)}) + M_{a\omega}^{(5)} + M_{a\omega}^{(3)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Подставив в уравнения равновесия (5) выражения для внутренних усилий (9), запишем их в виде:

$$\begin{aligned} H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) - Q &= h_\omega; \\ M_{r,r} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_\varphi) &= -q + q_\omega. \end{aligned} \quad (10)$$

На границе $r = r_0$ в соответствии с (6) и (9) должны выполняться требования:

$$\begin{aligned} T_r &= T_r^0 + T_{r\omega}; \quad H_r = H_r^0 + H_{r\omega}; \quad M_r = M_r^0 + M_{r\omega}; \\ M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) &= Q^0 + M_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(M_{r\omega} - M_{\varphi\omega}). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь левая часть уравнений содержит линейные составляющие внутренних усилий, в которых нижний индекс e опущен для простоты. Справа сосредоточены члены с нижним индексом ω , в которые включены добавки, отражающие физическую нелинейность материалов несущих слоев и заполнителя:

$$\begin{aligned} h_\omega &= H_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(H_{r\omega} - H_{\varphi\omega}) - Q_\omega; \\ q_\omega &= M_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega,r} - M_{\varphi\omega,r}). \end{aligned} \quad (12)$$

Линейные (упругие) составляющие обобщенных внутренних усилий по-прежнему выражаются через перемещения формулами, приведенными в [34, 35], поэтому система уравнений равновесия в перемещениях, соответствующая (10), сохраняет левую часть и приводится к виду:

$$\begin{aligned} L_2(a_4 \psi - a_{5w,r}) - 2h_3 G_3 \psi &= h_\omega; \\ L_3(a_5 \psi - a_{6w,r}) &= -q + q_\omega, \end{aligned} \quad (13)$$

где коэффициенты a_i и дифференциальные операторы L_2, L_3 равны:

$$\begin{aligned} a_1 &= [K_4^+ h_4 + K_5^+ h_5 + K_1^+ h_1 + K_3^+ h_3 + K_2^+ h_2]; \\ a_2 &= \left[K_5^+ \frac{h_5^2}{2} + K_4^+ h_4 h_5 \right]; \end{aligned}$$

$$a_3 = \left[K_3^+ \frac{h_3^2}{2} + K_2^+ h_2 h_3 \right];$$

$$a_4 = \left[K_4^+ \frac{h_4}{2} (h_1 + 2h_5 + h_4) + K_5^+ \frac{h_5}{2} (h_1 + h_5) - K_3^+ \frac{h_3}{2} (h_1 + h_3) + K_2^+ \frac{h_2}{2} (h_1 + 2h_3 + h_2) \right];$$

$$a_5 = \left[K_4^+ h_4 h_5^2 + K_5^+ \frac{h_5^3}{3} \right];$$

$$a_6 = \left[K_4^+ \frac{h_4 h_5}{2} (h_1 + 2h_5 + h_4) + K_5^+ h_5 \left(\frac{h_1 h_5}{4} + \frac{h_5^2}{3} \right) \right];$$

$$a_7 = \left[K_2^+ h_2 h_3 + K_3^+ \frac{h_3^3}{3} \right];$$

$$a_8 = \left[K_2^+ \frac{h_2 h_3}{2} (h_1 + 2h_3 + h_2) + K_3^+ h_3 \left(\frac{h_1 h_3}{4} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right];$$

$$a_9 = \left[K_4^+ h_4 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_4}{2} + h_1 h_5 + \frac{h_4^2}{3} + h_4 h_5 + h_5^2 \right) + K_5^+ h_5 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_5}{2} + \frac{h_5^2}{3} \right) + K_1^+ \frac{h_1^3}{12} + K_3^+ h_3 \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3} \right) + K_2^+ h_2 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_2}{2} + h_1 h_3 + \frac{h_2^2}{3} + h_2 h_3 + h_3^2 \right) \right];$$

$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r} (rg) \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2};$$

$$L_3(g) \equiv \frac{1}{r} (rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Для замыкания краевой задачи к системе дифференциальных уравнений (13) необходимо добавить силовые (11) либо кинематические граничные условия.

Методика решения задачи. Точное решение нелинейной системы дифференциальных уравнений (13) с граничными условиями (11) получить не представляется возможным, поэтому для ее исследования необходимо применять численные или приближенные методы.

В нашем случае применим алгоритм приближенного решения задачи, основанный на методе упругих решений Ильюшина, который позволяет на каждом шаге итерации рассматриваемую задачу сводить к соответствующей задаче теории упругости с некоторыми дополнительными «внешними» нагрузками. В этом случае система дифференциальных уравнений (13) принимает следующий итерационный вид:

$$L_2 \left(a_4 \Psi^{(n)} - a_5 w_{,r}^{(n)} \right) - 2h_3 G_3 \Psi^{(n)} = h_{\omega}^{(n-1)}; \\ L_3 \left(a_5 \Psi^{(n)} - a_6 w_{,r}^{(n)} \right) = -q + q_{\omega}^{(n-1)}, \quad (14)$$

где n — номер приближения;

$$h_{\omega}^{(n-1)} = H_{r_{\omega}}^{(n-1)} \text{,}_r + \frac{1}{r} \left(H_{r_{\omega}}^{(n-1)} - H_{\phi_{\omega}}^{(n-1)} \right) - Q_{\omega}^{(n-1)};$$

$$q_{\omega}^{(n-1)} = M_{r_{\omega}}^{(n-1)} \text{,}_{rr} + \frac{1}{r} \left(2M_{r_{\omega}}^{(n-1)} \text{,}_r - M_{\phi_{\omega}}^{(n-1)} \text{,}_r \right).$$

На контуре пластины ($r = r_0$) граничные условия в усилиях (11) для рассматриваемой итерационной задачи на n -м шаге принимают вид

$$T_r^{(n)} = T_r^0 + T_{r_{\omega}}^{(n-1)}; \quad H_r^{(n)} = H_r^0 + H_{r_{\omega}}^{(n-1)};$$

$$M_r^{(n)} = M_r^0 + M_{r_{\omega}}^{(n-1)};$$

$$M_r^{(n)} \text{,}_r + \frac{1}{r} \left(M_r^{(n)} - M_{\phi}^{(n)} \right) = Q^0 + M_{r_{\omega}}^{(n-1)} \text{,}_r + \quad (15)$$

$$+ \frac{1}{r} \left(M_{r_{\omega}}^{(n-1)} - M_{\phi_{\omega}}^{(n-1)} \right).$$

Нелинейные составляющие внутренних усилий в (14), (15) будут равны:

$$T_{\alpha\omega}^{(n-1)} \equiv \sum_{k=1}^5 \int_{h_k}^{\omega} \sigma_{\alpha\omega}^{(k, n-1)} dz = \sum_{k=1}^5 2G_k \int_{h_k}^{\omega} \omega_k \left(\varepsilon_u^{(k, n-1)} \right) \vartheta_{\alpha}^{(k, n-1)} dz;$$

$$M_{\alpha\omega}^{(n-1)} \equiv \sum_{k=1}^5 \int_{h_k}^{\omega} \sigma_{\alpha\omega}^{(k, n-1)} z dz = \sum_{k=1}^5 2G_k \int_{h_k}^{\omega} \omega_k \left(\varepsilon_u^{(k, n-1)} \right) \vartheta_{\alpha}^{(k, n-1)} z dz;$$

$$H_{\alpha\omega}^{(n-1)} = h_3 \left(T_{\alpha\omega}^{(4, n-1)} - T_{\alpha\omega}^{(2, n-1)} \right) - 0,5 h_1 \left(T_{\alpha\omega}^{(5, n-1)} - T_{\alpha\omega}^{(3, n-1)} \right) + \\ + M_{\alpha\omega}^{(5, n-1)} + M_{\alpha\omega}^{(3, n-1)};$$

$$Q_{\omega}^{(n-1)} = G_3 \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \omega_3 \left(\varepsilon_u^{(3, n-1)} \right) \vartheta_{\alpha}^{(3, n-1)} dz +$$

$$+ 2G_5 \int_{\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2} + h_5} \omega_5 \left(\varepsilon_u^{(5, n-1)} \right) \vartheta_{\alpha}^{(5, n-1)} dz \quad (\alpha = r, \phi).$$

Если граничные условия заданы в перемещениях, то на n -м шаге приближения они будут следующие:

- при жесткой заделке контура пластины:

$$\Psi^{(n)}(r_0) = 0; \quad w^{(n)}(r_0) = 0; \quad w_{,r}^{(n)}(r_0) = 0; \quad (16)$$

- при шарнирном опирании:

$$\Psi^{(n)}(r_0) = 0; \quad w^{(n)}(r_0) = 0;$$

$$M_r^{(n)}(r_0) = M_{r_{\omega}}^{(n-1)}(r_0). \quad (17)$$

Общее решение краевой задачи. Умножим второе уравнение в (14) на r и проведем его однократное интегрирование:

$$L_2 \left(a_4 \Psi^{(n)} - a_5 w_{,r}^{(n)} \right) - 2h_3 G_3 \Psi^{(n)} = h_{\omega}^{(n-1)}; \quad (18)$$

$$L_2 \left(a_5 \Psi^{(n)} - a_6 w_{,r}^{(n)} \right) = -\frac{1}{r} \left(\int (q - q_{\omega}^{(n-1)}) r dr + C_1 \right).$$

Здесь и далее встречающиеся интегралы берутся в пределах от 0 до r , если другое не указано. Умножим первое уравнение системы (18) на a_6 , а второе — на a_5 . После вычитания из первого уравнения второго придем к неоднородному модифицированному уравнению Бесселя для определения функции $\psi(r)$:

$$L_2((a_4 a_6 - a_5^2) \psi^{(n)}) - 2a_6 h_3 G_3 \psi^{(n)} = \frac{a_5}{r} \left(\int (q - q_\omega^{(n-1)}) r dr - C_1 \right) + a_6 h_\omega^{(n-1)}.$$

Это уравнение приводится к стандартному виду

$$L_2(\psi^{(n)}) - \beta^2 \psi^{(n)} = f_\omega^{(n-1)}, \quad (19)$$

где

$$\beta^2 = \frac{2a_6 h_3 G_3}{(a_4 a_6 - a_5^2)};$$

$$f_\omega^{(n-1)}(r) = \frac{1}{(a_4 a_6 - a_5^2)} \left(\frac{a_5}{r} \left(\int (q - q_\omega^{(n-1)}) r dr - C_1 \right) + a_6 h_\omega^{(n-1)} \right).$$

Решением уравнения (19) будет выражение

$$\psi^{(n)} = C_2 I_1(\beta r) + C_3 K_1(\beta r) + \psi_r^{(n)}, \quad (20)$$

где $I_1(\beta r)$, $K_1(\beta r)$ — функции Бесселя и Макдональда; $\psi_r^{(n)}$ — частное решение уравнения (19), которое на n -ом шаге можно принять в виде

$$\psi_r^{(n)} = -K_1(\beta r) \int I_1(\beta r) f_\omega^{(n-1)}(r) r dr + I_1(\beta r) \int K_1(\beta r) f_\omega^{(n-1)}(r) r dr.$$

Прогиб получим, применив оператор L_3^{-1} ко второму уравнению системы (14) и проинтегрировав по радиальной координате:

$$w^{(n)} = \frac{a_5}{a_6} \int \psi^{(n)} dr + \frac{1}{a_6} \int L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) dr - \frac{C_1}{4} r^2 \times (\ln r - 1) + \frac{C_5}{4} r^2 + C_6 \ln r + C_4, \quad (21)$$

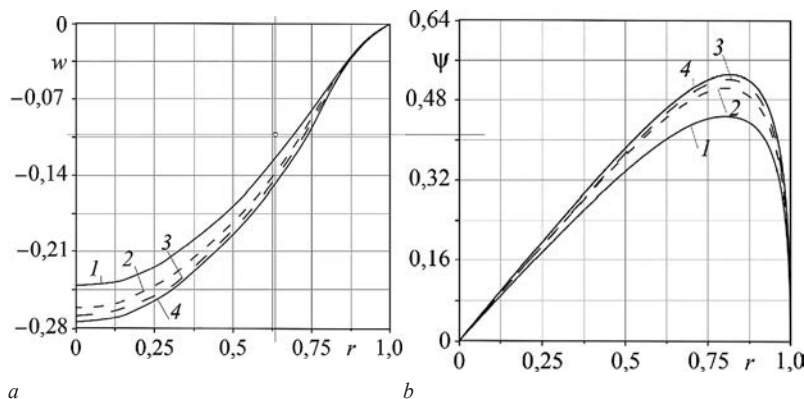


Рисунок 2 — Прогиб и относительный сдвиг в упругопластической пластине: a — прогиб w ; b — относительный сдвиг ψ ; 1 — упругие перемещения; 2–4 — упругопластические на n -м шаге
 Figure 2 — Deflection and relative shear in an elastoplastic plate: a — deflection w ; b — relative shear ψ ; 1 — elastic displacements; 2–4 — elastoplastic displacements at the n -th step

где C_1, \dots, C_5 — константы интегрирования;

$$L_3^{-1}(q) \equiv \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int r q dr dr dr.$$

Исходя из условия ограниченности решения в центре пластины ($r = 0$) для сплошных пластин, в (18), (20), (21) следует положить $C_1 = C_3 = C_6 = 0$. В результате итерационное решение задачи об изгибе упругопластической пятислойной симметричной круговой пластины принимает вид:

$$\psi^{(n)} = C_2 I_1(\beta r) + \psi_r^{(n)}; \quad (22)$$

$$w^{(n)} = \frac{a_5}{a_6} \int \psi^{(n)} dr + \frac{1}{a_6} \int L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) dr + \frac{C_5}{4} r^2 + C_4.$$

При жесткой заделке контура пластины, из (16) получим:

$$C_2^{(n)} = -\frac{\psi_r}{I_1(\beta r_0)} \Big|_{r=r_0}; \quad C_5^{(n)} = -\frac{2}{a_6 r_0} L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0};$$

$$C_4^{(n)} = -\frac{a_5}{a_6} \left(\frac{C_2^{(n)}}{\beta} I_0(\beta r_0) + \int \psi_r dr \Big|_{r=r_0} \right) - \frac{1}{a_6} \int L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) dr \Big|_{r=r_0} - \frac{C_5^{(n)}}{4} r_0^2. \quad (23)$$

В случае шарнирного закрепления контура для определения C_5 имеем следующее алгебраическое уравнение:

$$M_r^{(n-1)}(r_0) = -a_6 w^{(n-1)} \Big|_{r=r_0} - a_7 \frac{w^{(n-1)}}{r_0} \Big|_{r=r_0} + a_5 \psi^{(n-1)} \Big|_{r=r_0} = 0. \quad (24)$$

Константы интегрирования C_2, C_4 сохраняют свой вид.

Таким образом, формулы (22)–(24) позволяют вычислять перемещения при изгибе упругопластической круговой пятислойной симметричной пластины.

Численные результаты получены для пятислойной круговой пластины единичного ра-

диуса при равномерно распределенной нагрузке $q_0 = -30$ МПа. Контур защемлен. Слои пластины набраны из материалов Д16-Т — фторопласт — Д16-Т — фторопласт — Д16-Т. Толщины слоев, отнесенные к радиусу r_0 : $h_1 = h_2 = h_4 = 0,02$; $h_3 = h_5 = 0,1$. Механические характеристики материалов заимствованы из [5]: для Д16Т — $G_1 = 0,267 \cdot 10^5$ МПа; $K_1 = 0,8 \cdot 10^5$ МПа; $A_1 = 0,96$; $\alpha_1 = 2,34$; $\varepsilon_y^{(1)} = 0,735$ %; для фторопласта — $G_3 = 90$ МПа; $K_1 = 345$ МПа; $A_3 = 0,905$; $\alpha_3 = 1,48$; $\varepsilon_s = \varepsilon_y^{(1)} = 3,3$ %.

Рисунок 2 подтверждает практическую сходимость итерационного метода, основанного на методе «упругих» решений Ильющина. Номер кривой соответствует номеру итерации, 1 — для упругой пластины. Здесь второе приближение для прогиба (см. рисунок 2 а) отличается от предыдущего примерно на 9 %. Третье приближение превосходит второе на 4,5 %. Четвертое, принятое за искомое значение, отличается от предыдущего менее чем на 1 %.

Аналогичная картина наблюдается и для относительного сдвига (см. рисунок 2 б). Таким образом, учет физической нелинейности материалов слоев в рассматриваемом случае увеличивает искомые перемещения примерно на 14,6 %.

Распределение областей пластических деформаций в материалах несущих слоев и физической нелинейности в заполнителях по поперечному

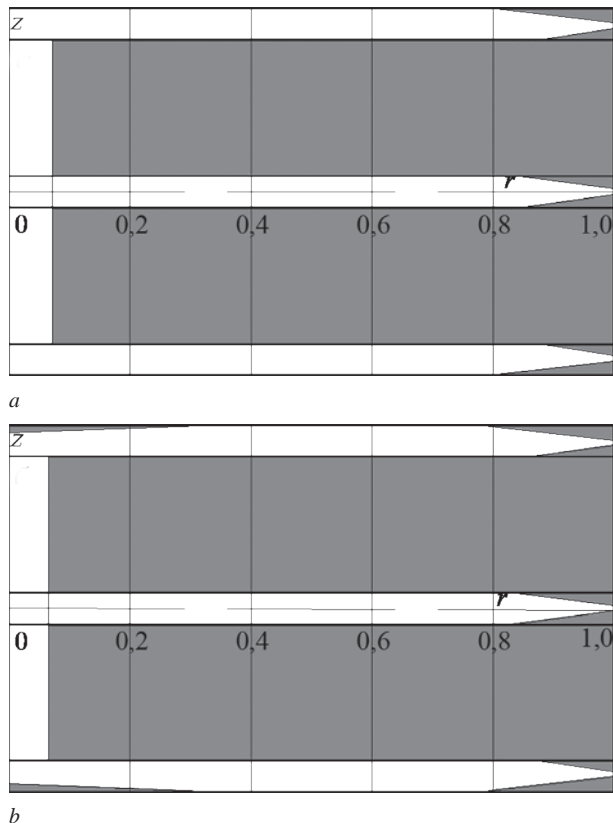


Рисунок 3 — Области пластичности и физической нелинейности материалов слоев: а — $q = -30$ МПа; б — $q = -35$ МПа
 Figure 3 — Areas of plasticity and physical nonlinearity of layer materials: а — $q = -30$ МПа; б — $q = -35$ МПа

сечению пластины в зависимости от величины внешней силовой нагрузки можно проследить по рисунку 3. Здесь во втором случае области пластичности появляются в центре несущих слоев, в заполнителях упругие области в центре несколько уменьшаются.

Выводы. Предложенная постановка и методика решения соответствующих краевых задач позволяют исследовать перемещения при изгибе в пятислойной упругопластической пластине, симметричной по толщине.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-2030».

Список литературы

1. Carrera, E. Thermal stress analysis of composite beams, plates and shells: computational modelling and applications / E. Carrera, F.A. Fazzolari, M. Cinefra. — Academic Press, 2016. — 440 p.
2. Aghalovyan, L.A. Asymptotic theory of anisotropic plates and shells / L.A. Aghalovyan; transl. by D. Prikazchikov. — Singapore: World Scientific, 2015. — 360 p.
3. Zhuravkov, M. Mechanics of solid deformable body / M. Zhuravkov, Y. Lyu, E. Starovoitov. — Singapore: Springer Singapore, 2023. — 308 p. — DOI: <https://doi.org/10.1007/978-981-19-8410-5>.
4. Абдусаттаров, А. Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагрузках / А. Абдусаттаров, Э.И. Старовойтов, Н.Б. Рузиева. — Ташкент: IDEAL PRESS, 2023. — 381 с.
5. Деформирование трехслойных пластин при термосиловых нагрузках: монография / Э.И. Старовойтов, А.В. Нестерович, Ю.В. Шафиева, А.Г. Козел. — Гомель: БелГУТ, 2024. — 395 с.
6. Deformation of three-layer structural elements in thermal radiation fields / E.I. Starovoitov, M.A. Zhuravkov, D.V. Leonenko, Y. Lyu. — Singapore: Springer Singapore, 2024. — 384 p. — DOI: <https://doi.org/10.1007/978-981-97-7217-9>.
7. Mikhasev, G.I. Localized dynamics of thin-walled shells / G.I. Mikhasev, P.E. Tovstik. — New York: Chapman and Hall/CRC. — 2020. — 366 p. — DOI: <https://doi.org/10.1201/9781315115467>.
8. Mikhasev, G.I. Free vibrations of elastic laminated beams, plates and cylindrical shells / G.I. Mikhasev, H. Altenbach // Thin-walled laminated structures. Buckling, vibrations and their suppression / G.I. Mikhasev, H. Altenbach. — Cham, 2019. — P. 157–198. — DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-12761-9_4. — (Advanced structured materials: STRUCT-MAT; vol. 106).
9. Лачугина, Е.А. Поперечные колебания пятислойной упругой круговой пластины с жестким заполнителем / Е.А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. — 2022. — Вып. 15. — С. 116–122.
10. Лачугина, Е.А. Свободные колебания пятислойной круговой пластины с легкими заполнителями / Е.А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. — 2023. — Вып. 16. — С. 111–116.
11. Будникова, Д.А. Анализ собственных колебаний пятислойного стержня / Д.А. Будникова // Механика. Исследования и инновации. — 2024. — Вып. 17. — С. 33–39.
12. Будникова, Д.А. Собственные частоты колебаний пятислойного стержня / Д.А. Будникова // Проблемы физики, математики и техники. — 2025. — № 2(63). — С. 11–15.
13. Горшков, А.Г. Колебания трехслойных стержней под действием локальных нагрузок различных форм / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. — 2004. — № 1. — С. 45–52.
14. Старовойтов, Э.И. Особенности колебания трехслойного стержня при локальных и импульсных воздействиях / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, А.В. Яровая // Прикладная механика. — 2005. — Т. 41, № 7. — С. 122–129.
15. Fedotenkov, G.V. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam / G.V. Fedotenkov, D.V. Tarlakovsky,

- Y.A. Vahterova // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2019. — Vol. 40, iss. 4. — P. 439–447. — DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080219040061>.
16. Pradhan, M. Static and dynamic stability analysis of an asymmetric sandwich beam resting on a variable Pasternak foundation subjected to thermal gradient / M. Pradhan, P.R. Dash, P.K. Pradhan // Meccanica. — 2016. — Vol. 51, iss. 3. — P. 725–739. — DOI: <https://doi.org/10.1007/s11012-015-0229-6>.
 17. Bakulin, V.N. Parametric resonance of a three-layered cylindrical composite rib-stiffened shell / V.N. Bakulin, D.A. Boitsova, A.Ya. Nedbai // Mechanics of Composite Materials. — 2021. — Vol. 57, iss. 5. — P. 623–634. — DOI: <https://doi.org/10.1007/s11029-021-09984-9>.
 18. Tarlakovskii, D.V. Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells / D.V. Tarlakovskii, G.V. Fedotenkov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. — 2014. — Vol. 43, iss. 2. — P. 145–152. — DOI: <https://doi.org/10.3103/S1052618814010178>.
 19. Bending oscillations of a cylinder, surrounded by an elastic medium and containing a viscous liquid and an oscillator / L.I. Mogilevich, V.S. Popov, D.V. Kondratov, L.N. Rabinskiy // Journal of Vibroengineering. — 2017. — Vol. 19, iss. 8. — P. 5758–5766. — DOI: <https://doi.org/10.21595/jve.2017.18179>.
 20. Paimushin, V.N. Static and monoharmonic acoustic impact on a laminated plate / V.N. Paimushin, R.K. Gazizullin // Mechanics of Composite Materials. — 2017. — Vol. 53, iss. 3. — P. 283–304. — DOI: <https://doi.org/10.1007/s11029-017-9662-z>.
 21. Леоненко, Д.В. Колебания круговой трехслойной ступенчатой пластины при ударном периодическом воздействии / Д.В. Леоненко, М.В. Маркова // Механика машин, механизмов и материалов. — 2022. — № 3(60). — С. 68–76. — DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2022-3-60-68-76>.
 22. Леоненко, Д.В. Колебания круговой трехслойной пластины под действием линейной во времени внешней нагрузки / Д.В. Леоненко, М.В. Маркова // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. — 2023. — Т. 1. — С. 49–63.
 23. Агеев, Р.В. Колебания стенок щелевого канала с вязкой жидкостью, образованного трехслойным и твердым дисками / Р.В. Агеев, Л.И. Могилевич, В.С. Попов // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 2014. — № 1. — С. 3–11.
 24. Grover, N. An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates / N. Grover, B.N. Singh, D.K. Maiti // Aerospace Science and Technology. — 2016. — Vol. 52. — P. 41–51. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ast.2016.02.017>.
 25. Старовойтов, Э.И. Изгиб прямоугольной трехслойной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Е.П. Дорская // Проблемы машиностроения и автоматизации. — 2006. — № 3. — С. 45–50.
 26. Старовойтов, Э.И. Изгиб упругой трехслойной круговой пластины на основании Пастернака / Э.И. Старовойтов, А.Г. Козел // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2018. — Т. 24, № 3. — С. 392–406.
 27. Старовойтов, Э.И. Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, М. Сулейман // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. — 2006. — Т. 3, № 4. — С. 55–62.
 28. Старовойтов, Э.И. Деформирование локальными нагрузками композитной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, М. Сулейман // Механика композитных материалов. — 2007. — Т. 43, № 1. — С. 109–120.
 29. Козел, А.Г. Сравнение решений задач изгиба трехслойных пластин на основаниях Винклера и Пастернака / А.Г. Козел // Механика машин, механизмов и материалов. — 2021. — № 1(54). — С. 30–37. — DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2021-1-54-30-37>.
 30. Горшков, А.Г. Циклические нагружения упругопластических тел в нейтронном потоке / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая // Известия Академии наук. Механика твердого тела. — 2001. — № 1. — С. 79–85.
 31. Старовойтов, Э.И. Упругопластическое деформирование трехслойных стержней в температурном поле / Э.И. Старовойтов // Проблемы машиностроения и автоматизации. — 2012. — № 3. — С. 91–98.
 32. Babaytsev, A.V. Развитие дефектов в многослойных композитах при статических нагрузках / A.V. Babaytsev, M.Yu. Kalyagin, L.N. Rabinskiy // Russian Engineering Research. — 2024. — Vol. 44, iss. 1. — P. 112–115. — DOI: <https://doi.org/10.3103/S1068798X24010064>.
 33. Захарчук, Ю.В. Деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем = Deformation of the circular three-layer plate with a compressible filler / Ю.В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. — 2017. — № 4(33). — С. 53–57.
 34. Салицкий, В.С. Изгиб заземленной по контуру круговой пятислойной пластины / В.С. Салицкий // Механика. Исследования и инновации: сб. науч. тр. / под ред. А.О. Шимановского. — Гомель, 2022. — Вып. 15. — С. 209–213.
 35. Салицкий, В.С. Изгиб локальной нагрузкой круглой пятислойной пластины / В.С. Салицкий // Проблемы физики, математики и техники. — 2024. — № 3(60). — С. 27–31. — DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_27.
 36. Salicki, V. Local loading of circular five-layer plate / V. Salicki // AIP Conference Proceedings. — 2025. — Vol. 3265, iss. 1. — DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0265375>.

STAROVOITOV Eduard I., D. Sc. in Phys. and Math., Prof.

Professor of the Department “Structural Mechanics, Geotechnical and Structural Engineering”¹

E-mail: edstar0@yandex.by

SALICKI Vladislav S.

PhD Student¹

E-mail: vladislavsalski@gmail.com

¹Belarusian State University of Transport, Gomel, Republic of Belarus

Received November 25, 2025.

BENDING OF AN ELASTOPLASTIC FIVE-LAYER CIRCULAR PLATE SYMMETRIC IN THICKNESS

The problem of bending of a five-layer circular plate symmetric in thickness by axisymmetric distributed load is considered. The central and outer layers are assumed to be load-bearing, thin, and of increased rigidity. They perceive the main part of the force load and can exhibit elastoplastic properties. Their deformation follows the Kirchhoff hypotheses. Two relatively thick nonlinearly elastic fillers are used to connect

the load-bearing layers. They provide redistribution of forces between the layers and are used to protect against unwanted external influences such as temperature and radiation. The deformation of the fillers is described by Timoshenko hypotheses, which take into account the relative shift, the additional rotation of the normal to the middle surface of the layer. The system of differential equations of equilibrium for the considered plate is obtained using the variational method of Lagrange. It includes a system of two nonlinear differential equations. The sought-for functions are the deflection of the plate, the radial displacement of the midplane of the central supporting layer, and two relative shear displacements in the fillers. The Ilyushin method of elastic solutions is used to solve the corresponding boundary value problem. The general solution is obtained in a recursive form. Formulas are provided for calculating the sought-for displacements and relative shear displacements under the boundary conditions of rigid clamping of the plate contour. The convergence of the method and the dependence of the solution on the physical nonlinearity of the layer materials are numerically investigated.

Keywords: five-layer circular plate, physical nonlinearity, bending, analytical solution, numerical results

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2026-2-75-62-70>

References

- Carrera E., Fazzolari F.A., Cinefra M. *Thermal stress analysis of composite beams, plates and shells: computational modeling and applications*. Academic Press, 2016. 440 p.
- Aghalovyan L.A. *Asimptoticheskaya teoriya anizotropnykh plastin i obolochek* [Asymptotic theory of anisotropic plates and shells]. Moscow, Nauka Publ., Fizmatlib Publ., 1997. 414 p. (in Russ.).
- Zhuravkov M., Lyu Y., Starovoitov E. *Mechanics of solid deformable body*. Singapore, Springer Singapore, 2023. 308 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-981-19-8410-5>.
- Abdusattarov A., Starovoitov E.I., Ruzieva N.B. *Deformirovaniye i povrezhdaemost uprugoplasticheskikh elementov konstruktivnykh pri tsiklicheskikh nagruzheniyyakh* [Deformation and damage of elastic-plastic structural elements under cyclic loads]. Tashkent, IDEAL PRESS, 2023. 381 p. (in Russ.).
- Starovoitov E.I., Nesterovich A.V., Shafieva Yu.V., Kozel A.G. *Deformirovaniye trekhslonnykh plastin pri termosilovyykh nagruzhkakh* [Deformation of three-layer plates under thermal force loads]. Gomel, Belorusskiy gosudarstvennyy universitet transporta Publ., 2024. 395 p. (in Russ.).
- Starovoitov E., Zhuravkov M., Leonenko D., Lyu Y. *Deformation of three-layer structural elements in thermal radiation fields*. Singapore, Springer Singapore, 2024. 384 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-981-97-7217-9>.
- Mikhasev G.I., Tovstik P.E. *Localized dynamics of thin-walled shells*. New York, Chapman and Hall/CRC, 2020. 366 p. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781315115467>.
- Mikhasev G.I., Altenbach H. Free vibrations of elastic laminated beams, plates and cylindrical shells. *Thin-walled laminated structures. Buckling, vibrations and their suppression*, 2019, pp. 157–198. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-12761-9_4.
- Lachugina E.A. Poperechnyye kolebaniya pyatisloynoy uprugoy krugovoy plastiny s zhestkim zapolnitelem [Transverse vibrations of the five-layer elastic circular plate with rigid fillers]. *Mechanics. Researches and innovations*, 2022, iss. 15, pp. 116–122 (in Russ.).
- Lachugina E.A. Svobodnyye kolebaniya pyatisloynoy krugovoy plastiny s legkimi zapolnitelyami [Free vibrations of a five-layer circular plate with lightweight fillers]. *Mechanics. Researches and innovations*, 2023, iss. 16, pp. 111–116 (in Russ.).
- Budnikova D.A. Analiz sobstvennykh kolebaniy pyatisloynogo sterzhnya [Analysis of a five-layer rod natural oscillations]. *Mechanics. Researches and innovations*, 2024, iss. 17, pp. 33–39 (in Russ.).
- Budnikova D.A. Sobstvennyye chastoty kolebaniy pyatisloynogo sterzhnya [Natural frequencies of vibration of a five-layer rod]. *Problems of physics, mathematics and technics*, 2025, no. 2(63), pp. 11–15 (in Russ.).
- Gorshkov A.G., Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Kolebaniya trekhslonnykh sterzhney pod deystviem lokalnykh nagruzk razlichnykh form [Vibrations of three-layered beams under the action of local loads of various shapes]. *Ecological bulletin of research centers of the Black Sea economic cooperation*, 2004, no. 1, pp. 45–52 (in Russ.).
- Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Yarovaya A.V. Osobennosti kolebaniya trekhslonnykh sterzhnya pri lokalnykh i impulsnykh vozdeystviyakh [Vibrations of a sandwich rod under local and impulsive forces]. *Prikladnaya mekhanika*, 2005, vol. 41, no. 7, pp. 122–129 (in Russ.).
- Fedotenkov G.V., Tarlakovsky D.V., Vahterova Y.A. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam. *Lo-bachevskii journal of mathematics*, 2019, vol. 40, iss. 4, pp. 439–447. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080219040061>.
- Pradhan M., Dash P.R., Pradhan P.K. Static and dynamic stability analysis of an asymmetric sandwich beam resting on a variable Pasternak foundation subjected to thermal gradient. *Meccanica*, 2016, vol. 51, iss. 3, pp. 725–739. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11012-015-0229-6>.
- Bakulin V.N., Boitsova D.A., Nedbai A.Ya. Parametric resonance of a three-layered cylindrical composite rib-stiffened shell. *Mechanics of composite materials*, 2021, vol. 57, iss. 5, pp. 623–634. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11029-021-09984-9>.
- Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Two-dimensional non-stationary contact of elastic cylindrical or spherical shells. *Journal of machinery manufacture and reliability*, 2014, vol. 43, iss. 2, pp. 145–152. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1052618814010178>.
- Mogilevich L.I., Popov V.S., Kondratov D.V., Rabinskiy L.N. Bending oscillations of a cylinder, surrounded by an elastic medium and containing a viscous liquid and an oscillator. *Journal of vibroengineering*, 2017, vol. 19, iss. 8, pp. 5758–5766. DOI: <https://doi.org/10.21595/jve.2017.18179>.
- Paimushin V.N., Gazizullin R.K. Static and monoharmonic acoustic impact on a laminated plate. *Mechanics of composite materials*, 2017, vol. 53, iss. 3, pp. 283–304. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11029-017-9662-z>.
- Leonenko D.V., Markova M.V. Kolebaniya krugovoy trekhslonnoy stupenchatoy plastiny pri udarnom periodicheskom vozdeystvii [Vibrations of a three-layer circular step plate under periodic impact]. *Mechanics of machines, mechanisms and materials*, 2022, no. 3(60), pp. 68–76. DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2022-3-60-68-76> (in Russ.).
- Leonenko D.V., Markova M.V. Kolebaniya krugovoy trekhslonnoy plastiny pod deystviem vneshney nagruзки [Oscillations of a circular three-layer plate under external linear in time load]. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and informatics*, 2023, vol. 1, pp. 49–63 (in Russ.).
- Ageev R.V., Mogilevich L.I., Popov V.S. Kolebaniya stenok shchelevogo kanala s vyazkoy zhidkostyu, obrazovannogo trekhslonnykh i tverdym diskami [Vibrations of the walls of a slot channel with a viscous fluid formed by three-layer and solid disks]. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*, 2014, no. 1, pp. 3–11 (in Russ.).
- Grover N., Singh B.N., Maiti D.K. An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates. *Aerospace science and techno-*

- logy, 2016, vol. 52, pp. 41–51. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ast.2016.02.017>.
25. Starovoitov E.I., Dorovskaya E.P. Izgib pryamougolnoy trekhsloynoy plastiny na uprugom osnovanii [Bending of rectangular sandwich plate on elastic foundation]. *Problemy mashinostroeniya i avtomatizatsii*, 2006, no. 3, pp. 45–50 (in Russ.).
 26. Starovoitov E.I., Kozel A.G. Izgib uprugoy krugovoy trekhsloynoy plastiny na osnovanii Pasternaka [The bending of an elastic circular sandwich plate on the Pasternak foundation]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2018, vol. 24, no. 3, pp. 392–406 (in Russ.).
 27. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Suleyman M. Termouprugiy izgib koltsevoy trekhsloynoy plastiny na uprugom osnovanii [Thermoelastic bending of a ring sandwich plate on the elastic foundation]. *Ecological bulletin of research centers of the Black Sea economic cooperation*, 2006, vol. 3, no. 4, pp. 55–62 (in Russ.).
 28. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Suleyman M. Deformirovanie lokalnymi nagruzkami kompozitnoy plastiny na uprugom osnovanii [Deformation of a composite plate on an elastic foundation by local loads]. *Mekhanika kompozitnykh materialov*, 2007, vol. 43, no. 1, pp. 109–120 (in Russ.).
 29. Kozel A.G. Sravnenie resheniy zadach izgiba trekhsloynnykh plastin na osnovaniyakh Vinklera i Pasternaka [Comparison of solutions to the bending problems of three-layer plates on the Winkler and Pasternak foundations]. *Mechanics of machines, mechanisms and materials*, 2021, no. 1(54), pp. 30–37. DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2021-1-54-30-37> (in Russ.).
 30. Gorshkov A.G., Starovoitov E.I., Yarovaya A.V. Tsiklicheskie nagruzeniya uprugoplasticheskikh tel v neytronnom potoke [Cyclic loading of elastic-plastic bodies in neutron flux]. *Izvestiya Akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*, 2001, no. 1, pp. 79–85 (in Russ.).
 31. Starovoitov E.I. Uprugo-plasticheskoe deformirovanie trekhsloynnykh sterzhney v temperaturnom pole [Elastoplastic deformation of three-layer beam in a temperature field]. *Problemy mashinostroeniya i avtomatizatsii*, 2012, no. 3, pp. 91–98 (in Russ.).
 32. Babaytsev A.V., Kalyagin M.Yu., Rabinskiy L.N. Defect development in multilayer composites under static loads. *Russian engineering research*, 2024, vol. 44, iss. 1, pp. 112–115. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1068798X24010064>.
 33. Zakharchuk Yu.V. Deformirovanie krugovoy trekhsloynoy plastiny so szhimaemym zapolnitelem [Deformation of the circular three-layer plate with a compressible filler]. *Problems of physics, mathematics and technics*, 2017, no. 4(33), pp. 53–57 (in Russ.).
 34. Salicky V.S. Izgib zaschemlennoy po konturu krugovoy pyatisloynoy plastiny [Bending of a circular five-layer plate clamped on the contour]. *Mechanics. Researches and innovations*, 2022, iss. 15, pp. 209–213 (in Russ.).
 35. Salicky V.S. Izgib lokalnoy nagruzkoy krugloy pyatisloynoy plastiny [Bending a circular five-layer plate by local load]. *Problems of physics, mathematics and technics*, 2024, no. 3(60), pp. 27–31. DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_27 (in Russ.).
 36. Salicky V.S. Local loading of circular five-layer plate. *AIP conference proceedings*, 2025, vol. 3265, iss. 1. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0265375>.