

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3

Э.И. СТАРОВОЙТОВ, д-р физ-мат. наук, А.А. ПОДДУБНЫЙ
Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

ИЗГИБ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ СО СТУПЕНЧАТО-ПЕРЕМЕННОЙ ГРАНИЦЕЙ, ЧАСТИЧНО ОПЕРТОГО НА УПРУГОЕ ОСНОВАНИЕ

Рассмотрен изгиб упругого трехслойного стержня со ступенчато-переменной толщиной одного из несущих слоев. Стержень частично оперт на упругое основание. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета стержня приняты гипотезы ломаной нормали. Получена система уравнений равновесия и ее общее аналитическое решение в перемещениях. Проведен численный анализ решения

Ключевые слова: трехслойный стержень, частичное опирание, упругое основание, переменная граница

Введение

Композиционные, в том числе слоистые элементы конструкций широко используются в транспортном машиностроении: в качестве корпусных элементов вагонов, авиационных аппаратов, космических объектов, строительных панелей, и т.д. В связи с этим актуальной является проблема их расчета при различных внешних воздействиях и внутренней конфигурации. Статическое деформирование трехслойных элементов конструкций с гладкой конфигурацией, исследовано в работах [1–4]. Изгиб трехслойного стержня постоянного сечения полностью опертого на упругое основание рассмотрен в работах [5, 6]. Исследование НДС однородных тонкостенных конструкций ступенчато-переменной толщины содержится, в основном, в работах Г.Н. Белостоцкого, О.В. Игнатъева, В.В. Карпова и др. [7, 8]. В публикациях [9, 10] рассмотрено деформирование трехслойных стержней с нерегулярной границей, не связанных с упругим основанием. Здесь исследован изгиб подобных стержней, частично опертых на упругое основание. Для постановки и решения краевых задач использован вариационный метод Лагранжа и аппарат обобщенных функций. Решение соответствующих систем дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами проведено методом «сшивания» решений, полученных в областях их непрерывности.

Постановка задачи. Рассматривается несимметричный по толщине упругий трехслойный стержень с жестким наполнителем (рисунок 1). Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью наполнителя. Для описания кинематики пакета используется гипотеза «ломаной» нормали: в тонких несущих слоях 1, 2 справедлива гипотеза Кирхгофа, в несжимаемом по толщине сравнительно толстом наполнителе 3 нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(x)$. Де-

формации считаются малыми. На внешний слой 1 стержня действует распределенная поперечная нагрузка постоянной интенсивности q . Более тонкой своей частью стержень опирается на упругое основание Винклера, в результате на нижний слой действует реакция:

$$q_f = -kw,$$

где k — коэффициент жесткости упругого основания; $w(x)$ — прогиб стержня.

Так как материалы всех слоев несжимаемы в поперечном направлении, то прогиб во всех точках поперечного сечения стержня одинаков. На торцах предполагается наличие жестких диафрагм, препятствующих относительно смещению срединной плоскости наполнителя, h_k — толщина k -го слоя ($k=1, 2, 3$; $h_3=2c$), при этом толщина нижнего слоя изменяется в точке x_0 ступенчато:

$$h_3 = 2c, \quad h_2 = h_{20} + h_{21}H_0(x-x_0),$$

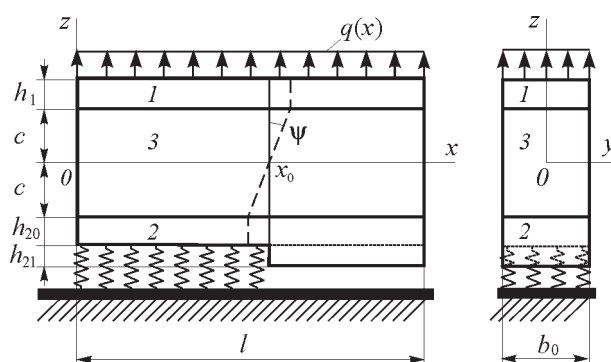


Рисунок 1 — Расчетная схема стержня, частично опертого на упругое основание

где $H_0(x_0)$ — функция нулевого порядка из семейства функций Хевисайда:

$$H_n(x) = \begin{cases} \frac{x^n}{n!}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

Введенные геометрические гипотезы позволяют выразить продольные перемещения в слоях $u^{(k)}$ через три искомые функции $u(x)$, $y(x)$ и $w(x)$:

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,x} \quad (c \leq z \leq c + h_1), \\ u^{(3)} &= u + z\psi - zw_{,x} \quad (-c \leq z \leq c), \\ u^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,x} \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c), \end{aligned} \quad (2)$$

где запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате; z — координата рассматриваемого волокна.

Компоненты тензора деформаций в слоях $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ ($i, j=x, z$) следуют из соотношений Коши и перемещений (2). В слоях стержня вводятся внутренние силы и моменты:

$$\begin{aligned} N^{(k)} &= b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} dz, \quad M^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} z dz, \\ Q^{(3)} &= b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} dz, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\sigma_x^{(k)}$, $\sigma_{xz}^{(3)}$ — компоненты тензора напряжений, b_0 — ширина поперечного сечения стержня.

Уравнения равновесия трехслойного стержня в усилиях (3) и силовые граничные условия следуют из принципа возможных перемещений Лагранжа:

$$\delta A = \delta W, \quad (4)$$

где δA и δW — вариации работ внешних сил и внутренних напряжений:

$$\begin{aligned} \delta A &= \iint_S (q + q_r) \delta w dS = b_0 \int_0^l (q + q_r) \delta w dx, \\ \delta W &= \iint_S \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} (\sigma_x^{(k)} \delta \varepsilon_x^{(k)} + 2\sigma_{xz}^{(3)} \delta \varepsilon_{xz}^{(3)} \delta_{k3}) dz dS = \\ &= b_0 \int_0^l \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} \delta \varepsilon_x^{(k)} dz + 2 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} \delta \varepsilon_{xz}^{(3)} dz \right] dx. \end{aligned}$$

Подставив в полученные из (4) уравнения внутренние усилия и моменты (3), выраженные через искомые перемещения, а также реакцию основания Винклера, получим систему уравнений равновесия рассматриваемого трехслойного стержня в перемещениях:

$$\begin{aligned} &(a_1 + a_{10} H_0(x - x_0)) u_{,xx} + \\ &+ (a_6 + a_{60} H_0(x - x_0)) \psi_{,xx} - \\ &- (a_7 + a_{70} H_0(x - x_0)) w_{,xxx} = -p, \\ &(a_6 + a_{60} H_0(x - x_0)) u_{,xx} + \\ &+ (a_2 + a_{20} H_0(x - x_0)) \psi_{,xx} - \\ &- (a_3 + a_{30} H_0(x - x_0)) w_{,xxx} - a_5 \psi = 0, \\ &(a_7 + a_{70} H_0(x - x_0)) u_{,xxx} + \\ &+ (a_3 + a_{30} H_0(x - x_0)) \psi_{,xxx} - \\ &- (a_4 + a_{40} H_0(x - x_0)) w_{,xxxx} = -q + \kappa w H(x_1 - x). \end{aligned} \quad (5)$$

Это система обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывными, из-за функции Хевисайда (1), коэффициентами. Постоянные составляющие коэффициентов:

$$\begin{aligned} a_1 &= K_1^+ h_1 + K_2^+ h_{20} + 2K_3^+ c, \\ a_{10} &= K_2^+ h_{21}, \quad K_k^+ \equiv K_k + \frac{4}{3} G_k, \end{aligned}$$

$$a_2 = c^2 \left[K_1^+ h_1 + K_2^+ h_{20} + \frac{2}{3} K_3^+ c \right], \quad a_{20} = c^2 K_2^+ h_{21},$$

$$a_3 = c \left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) + K_2^+ h_{20} \left(c + \frac{1}{2} h_{20} \right) + \frac{2}{3} K_3^+ c^2 \right],$$

$$a_{30} = c K_2^+ h_{21} \left(c + h_{20} + \frac{1}{2} h_{21} \right),$$

$$a_4 = K_1^+ h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) +$$

$$+ K_2^+ h_{20} \left(c^2 + c h_{20} + \frac{1}{3} h_{20}^2 \right) + \frac{2}{3} K_3^+ c^3,$$

$$a_{40} = K_2^+ h_{21} \left(c(A + 2h_{20} + h_{21}) + h_{20} h_{21} + h_{20}^2 + \frac{1}{3} h_{21}^2 \right),$$

$$a_5 = 2G_3 c, \quad a_6 = c \left[K_1^+ h_1 - K_2^+ h_{20} \right], \quad a_{60} = -c K_2^+ h_{21},$$

$$a_7 = K_1^+ h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) - K_2^+ h_{20} \left(c + \frac{1}{2} h_{20} \right),$$

$$a_{70} = -K_2^+ h_{21} \left(c + h_{20} + \frac{1}{2} h_{21} \right),$$

G_k, K_k — модули сдвиговой и объемной деформации k -го слоя.

Решение краевой задачи. В соответствии с предлагаемой процедурой решения, рассмотрим систему уравнений (5) в двух зонах: I — область опирания на упругое основание ($x < x_0$), II — область ступеньки ($x > x_0$).

В первой из них функция Хевисайда обращается в ноль и $h_2 = h_{20}$. Искомые перемещения в этой области пометим индексом «1» внизу. Система (5) принимает вид:

$$\begin{aligned} a_1 u_{1,xx} + a_6 \psi_{1,xx} - a_7 w_{1,xxx} &= -p, \\ a_6 u_{1,xx} + a_2 \psi_{1,xx} - a_3 w_{1,xxx} - a_5 \psi_1 &= 0, \\ a_7 u_{1,xxx} + a_3 \psi_{1,xxx} - a_4 w_{1,xxxx} - \kappa w_1 &= -q. \end{aligned} \quad (6)$$

Продифференцируем два раза первое уравнение в (6) и подставим в него $\psi_{,xxx}$ из второго уравнения. После введения имеем неоднородное линейное дифференциальное уравнение шестого порядка с постоянными коэффициентами относительно прогиба:

$$w_{1,xxxxxx} + \alpha_1 w_{1,xxxx} + \alpha_6 w_{1,xxx} + \alpha_7 w_1 = f(x), \quad (7)$$

где:

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha_2 q + \alpha_5 q_{,xx} + \alpha_3 p_{,x} + \alpha_4 p_{,xxx}, \\ \alpha_1 &= \frac{a_1 a_6 (a_1 a_6 - a_7^2)}{(a_1 a_3 - a_6 a_7)^2 - (a_1 a_4 - a_7^2)(a_1 a_2 - a_6^2)}, \\ \alpha_2 &= \frac{\alpha_7}{\kappa}, \quad \alpha_3 = -\frac{a_7}{a_1 \kappa} \alpha_7, \\ \alpha_4 &= \frac{a_7 (a_1 a_2 - a_6^2) - a_6 (a_1 a_3 - a_6 a_7)}{(a_1 a_3 - a_6 a_7)^2 - (a_1 a_4 - a_7^2)(a_1 a_2 - a_6^2)}, \\ \alpha_5 &= \frac{\alpha_6}{\kappa}, \\ \alpha_6 &= \frac{-a_1 (a_1 a_2 - a_6^2) \kappa}{(a_1 a_3 - a_6 a_7)^2 - (a_1 a_4 - a_7^2)(a_1 a_2 - a_6^2)}, \\ \alpha_7 &= \frac{a_1^2 a_3 \kappa}{(a_1 a_3 - a_6 a_7)^2 - (a_1 a_4 - a_7^2)(a_1 a_2 - a_6^2)}. \end{aligned}$$

Решение уравнения (7) можно представить в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения $w_0(x)$ и частного решения неоднородного уравнения $w_p(x)$. Для нахождения $w_0(x)$ выпишем характеристическое уравнение, соответствующее однородному уравнению (7):

$$\lambda^6 + \alpha_1 \lambda^4 + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_3 = 0. \quad (8)$$

Это бикубическое уравнение с действительными коэффициентами. Пусть $\lambda^2 = \xi$, тогда (8) примет вид:

$$\xi^3 + \alpha_1 \xi^2 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 = 0. \quad (9)$$

Дискриминант уравнения (9):

$$D = -4m_1^3 - 27m_2^2, \quad (10)$$

$$m_1 = \alpha_2 - \frac{\alpha_1^2}{3}, \quad m_2 = \frac{2\alpha_1^3}{27} - \frac{\alpha_1\alpha_2}{3} + \alpha_3.$$

Определить аналитически знак дискриминанта в общем случае не представляется возможным. Поэтому в рамках принятой модели проведем численный анализ (10) для реальных геометрических и механических параметров материалов слоев в зависимости от жесткости упругого основания. Если принять в качестве материала несущих слоев сплав Д16Т, наполнитель — политетрафторэтилен (ПТФЭ), толщины несущих слоев $h_1 = h_2 = 0,02$, наполнителя — $h_3 = 2c = 0,2$, то получим, что дискриминант (10) равен нулю при значениях $\kappa_1 = 31$, $\kappa_2 = 640$ (МПа/м). Соответствующий график показан на рисунке 2.

Следовательно, в областях I и III дискриминант отрицателен, поэтому уравнение (8) имеет два комплексно-сопряженных и один действительный корень. Если значение дискриминанта находится в области II, то все три корня действительные.

Необходимо отметить, что границы областей зависят от материалов и геометрических параметров слоев стержня, однако наибольшее влияние на них оказывает жесткость упругого основания. Поэтому выделим три типа оснований в зависимости от значения их коэффициента жесткости:

- $0 < \kappa < \kappa_1$ — легкие основания;
- $\kappa_1 < \kappa < \kappa_2$ — основания средней жесткости;
- $\kappa > \kappa_2$ — основания высокой жесткости.

Вид аналитических решений задач о деформировании рассматриваемого трехслойного стержня в указанных областях будет различаться, поэтому в дальнейшем примем основание средней жесткости. В этом случае решение будет следующим [5, 6]:

$$w_1(x) = C_{11}e^{\lambda_1 x} + C_{21}e^{-\lambda_1 x} + C_{31}e^{\lambda_3 x} + C_{41}e^{-\lambda_3 x} + C_{51}e^{\lambda_5 x} + C_{61}e^{-\lambda_5 x} + \frac{q_0}{\kappa},$$

$$u_1(x) = C_{11}a_{21}e^{\lambda_1 x} - C_{21}a_{21}e^{-\lambda_1 x} + C_{31}a_{22}e^{\lambda_3 x} - C_{41}a_{22}e^{-\lambda_3 x} + C_{51}a_{23}e^{\lambda_5 x} - C_{61}a_{23}e^{-\lambda_5 x} + b_5 q_0 \left(\frac{b_2}{\kappa} + b_3 \right) x + C_{71}x + C_{81},$$

$$a_{71}u_{2,xxx} + a_{31}\psi_{2,xxx} - a_{41}w_{2,xxx} = -q,$$

где C_{11}, \dots, C_{81} — константы интегрирования.

Теперь рассмотрим систему уравнений (5) в области со ступенькой. Здесь функция Хевисайда равна единице ($x \geq x_0$), $h_2 = h_{20} + h_{21}$, реакция основания отсутствует. Искомые перемещения в этой области пометим индексом «2» вниз. Система (5) преобразуется к виду:

$$a_{11}u_{2,xx} + a_{61}\psi_{2,xx} - a_{71}w_{2,xxx} = -p,$$

$$a_{61}u_{2,xx} + a_{21}\psi_{2,xx} - a_{31}w_{2,xxx} - a_5\psi_2 = 0, \quad (12)$$

$$a_{71}u_{2,xxx} + a_{31}\psi_{2,xxx} - a_{41}w_{2,xxx} = -q,$$

где $a_{11} = a_1 + a_{10}$, $a_{21} = a_2 + a_{20}$, $a_{31} = a_3 + a_{30}$, $a_{41} = a_4 + a_{40}$, $a_{61} = a_6 + a_{60}$, $a_{71} = a_7 + a_{70}$.

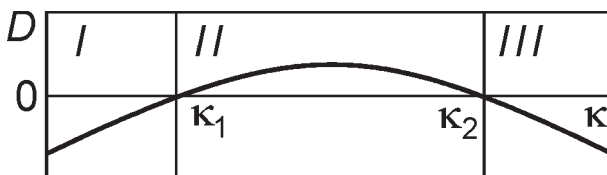


Рисунок 2 — Изменение дискриминанта D в зависимости от коэффициента жесткости основания κ

Аналитическое решение системы (12) совпадает по виду с приведенным в [2] решением для трехслойного стержня постоянной толщины. В нашем случае:

$$\psi_2 = C_{22}\text{sh}(\beta_2 x) + C_{32}\text{ch}(\beta_2 x) - \frac{\gamma_{12}}{\beta_2^2}(qx + C_{12}),$$

$$w_2(x) = \frac{1}{\alpha_{22}} \left[\frac{\alpha_{12}}{\beta_2} \left[C_{22}\text{ch}(\beta_2 x) + C_{32}\text{sh}(\beta_2 x) - \frac{\gamma_{12}}{\beta_2} \left(\frac{1}{2}qx + C_{12} \right) x \right] + a_{11}q \frac{x^4}{24} + \frac{a_{11}C_{12}}{6}x^3 \right] + \frac{C_{42}}{2}x^2 + C_{52}x + C_{62}, \quad (13)$$

$$u_2(x) = \gamma_{32} \left(C_{22}\text{sh}(\beta_2 x) + C_{32}\text{ch}(\beta_2 x) - \frac{\gamma_{12}}{\beta_2^2}(qx + C_{12}) \right) + \frac{1}{\alpha_{22}} \left[a_{71}q \frac{x^3}{6} + \frac{a_{71}}{2}C_{12}x^2 \right] + C_{72}x + C_{82},$$

где C_{12}, \dots, C_{82} — константы интегрирования,

$$\gamma_{12} = \frac{a_{11}\alpha_{12}}{\alpha_{22}\alpha_{32} - \alpha_{12}^2}, \quad \gamma_{22} = \frac{a_{61}\alpha_{22} - a_{71}\alpha_{12}}{\alpha_{22}\alpha_{32} - \alpha_{12}^2},$$

$$\gamma_{32} = \frac{a_{31}a_{71} - a_{41}a_{61}}{\alpha_{22}},$$

$$\alpha_{22}\alpha_{32} - \alpha_{12}^2 \neq 0, \quad \alpha_{12} = a_{11}a_{31} - a_{61}a_{71},$$

$$\alpha_{22} = a_{11}a_{41} - a_{71}^2, \quad \alpha_{32} = a_{11}a_{21} - a_{61}^2.$$

Объединяя (11) и (13), получим искомое решение краевой задачи:

$$\psi(x) = \psi_1(x) + (\psi_2(x) - \psi_1(x))H(x - x_0),$$

$$u(x) = u_1(x) + (u_2(x) - u_1(x))H(x - x_0), \quad (14)$$

$$w(x) = w_1(x) + (w_2(x) - w_1(x))H(x - x_0).$$

Константы интегрирования C_{11}, \dots, C_{81} , C_{12}, \dots, C_{82} определяются из 8 граничных условий на торцах стержня и дополнительных 8 условий равенства перемещений и их производных в точке нерегулярности $x = x_0$. При этом предполагается наличие на торцах стержня жестких диафрагм, препятствующих относительному сдвигу слоев.

Рассмотрим два вида закрепления стержня. В случае жесткой заделки торцов стержня граничные условия следующие:

$$x = 0, \quad I: u_{(1,2)} = \psi_{(1,2)} = w_{(1,2)} = w_{(1,2),x} = 0. \quad (15)$$

Для шарнирно опертого по обоим торцам стержня должны выполняться условия:

$$x = 0, \quad I: u_{(1,2)} = \psi_{(1,2)} = w_{(1,2)} = M_{(1,2)} = 0. \quad (16)$$

При заделке обоих концов стержня из требования сопряжения решений при $x = x_0 = x_1$ и граничных условий на торцах стержня (15) получаем для определения констант интегрирования следующую систему из 16 алгебраических уравнений:

$$1. \left. (\psi_2(x) - \psi_1(x)) \right|_{x=x_1} = 0 \Rightarrow$$

$$C_{11}a_{11}e^{\lambda_1 x_1} - C_{21}a_{11}e^{-\lambda_1 x_1} + C_{31}a_{12}e^{\lambda_3 x_1} - C_{41}a_{12}e^{-\lambda_3 x_1} + C_{51}a_{13}e^{\lambda_5 x_1} - C_{61}a_{13}e^{-\lambda_5 x_1} - C_{22}\text{sh}(\beta_2 x_1) - C_{32}\text{ch}(\beta_2 x_1) + C_{12} \frac{\gamma_{12}}{\beta_2^2} =$$

$$= -b_2 \frac{q_0}{\kappa} x_1 - b_3 q_0 x_1 - \frac{\gamma_{12}}{\beta_2^2} q x_1;$$

$$2. \langle \psi_{2,x}(x) - \psi_{1,x}(x) \rangle \Big|_{x=x_1} = 0 \Rightarrow$$

$$C_{11}\lambda_1 a_{11} e^{\lambda_1 x_1} + C_{21}\lambda_1 a_{11} e^{-\lambda_1 x_1} + C_{31}\lambda_3 a_{12} e^{\lambda_3 x_1} +$$

$$+ C_{41}\lambda_3 a_{12} e^{-\lambda_3 x_1} + C_{51}\lambda_5 a_{13} e^{\lambda_5 x_1} + C_{61}\lambda_5 a_{13} e^{-\lambda_5 x_1} -$$

$$- C_{22}\beta_2 \operatorname{ch}(\beta_2 x_1) - C_{32}\beta_2 \operatorname{sh}(\beta_2 x_1) =$$

$$= -b_2 \frac{q_0}{\kappa} - b_3 q_0 - \frac{\gamma_{12}}{\beta_2^2} q;$$

$$3. \langle \psi_{2,xx}(x) - \psi_{1,xx}(x) \rangle \Big|_{x=x_1} = 0 \Rightarrow$$

$$C_{11}\lambda_1^2 a_{11} e^{\lambda_1 x_1} - C_{21}\lambda_1^2 a_{11} e^{-\lambda_1 x_1} + C_{31}\lambda_3^2 a_{12} e^{\lambda_3 x_1} -$$

$$- C_{41}\lambda_3^2 a_{12} e^{-\lambda_3 x_1} + C_{51}\lambda_5^2 a_{13} e^{\lambda_5 x_1} -$$

$$- C_{61}\lambda_5^2 a_{13} e^{-\lambda_5 x_1} - C_{22}\beta_2^2 \operatorname{Ah}(\beta_2 x_1) -$$

$$- C_{32}\beta_2^2 \operatorname{sh}(\beta_2 x_1) = 0;$$

$$4. \langle w_1(x) - w_2(x) \rangle \Big|_{x=x_1} = 0 \Rightarrow$$

$$C_{11}e^{\lambda_1 x_1} + C_{21}e^{-\lambda_1 x_1} + C_{31}e^{\lambda_3 x_1} + C_{41}e^{-\lambda_3 x_1} + C_{51}e^{\lambda_5 x_1} +$$

$$+ C_{61}e^{-\lambda_5 x_1} + C_{12} \left(\frac{\alpha_{12}\gamma_{12}}{\alpha_{22}\beta_2^2} x_1 - \frac{a_{11}}{6\alpha_{22}} x_1^3 \right) -$$

$$- \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}\beta_2} [C_{22}\operatorname{ch}(\beta_2 x_1) + C_{32}\operatorname{sh}(\beta_2 x_1)] -$$

$$- \frac{C_{42}}{2} x_1^2 - C_{52} x_1 - C_{62} = -\frac{q_0}{\kappa} - \frac{\gamma_{12}}{2\beta_2} q_0 x_1^2;$$

$$5. \langle w_{1,x}(x) - w_{2,x}(x) \rangle \Big|_{x=x_1} = 0 \Rightarrow$$

$$C_{11}\lambda_1 e^{\lambda_1 x_1} - C_{21}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} + C_{31}\lambda_3 e^{\lambda_3 x_1} -$$

$$- C_{41}\lambda_3 e^{-\lambda_3 x_1} + C_{51}\lambda_5 e^{\lambda_5 x_1} - C_{61}\lambda_5 e^{-\lambda_5 x_1} +$$

$$+ C_{12} \left(\frac{\alpha_{12}\gamma_{12}}{\alpha_{22}\beta_2^2} - \frac{a_{11}}{2\alpha_{22}} x_1^2 \right) -$$

$$- \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} [C_{22}\operatorname{sh}(\beta_2 x_1) + C_{32}\operatorname{ch}(\beta_2 x_1)] -$$

$$- C_{42} x_1 - C_{52} = -\frac{\gamma_{12}}{\beta_2} q_0 x_1;$$

$$6. \langle w_{1,xx}(x) - w_{2,xx}(x) \rangle \Big|_{x=x_1} = 0 \Rightarrow$$

$$C_{11}\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x_1} + C_{21}\lambda_1^2 e^{-\lambda_1 x_1} + C_{31}\lambda_3^2 e^{\lambda_3 x_1} +$$

$$+ C_{41}\lambda_3^2 e^{-\lambda_3 x_1} + C_{51}\lambda_5^2 e^{\lambda_5 x_1} + C_{61}\lambda_5^2 e^{-\lambda_5 x_1} -$$

$$- C_{12} \frac{a_{11}}{\alpha_{22}} x_1 - \frac{\alpha_{12}\beta_2}{\alpha_{22}} [C_{22}\operatorname{ch}(\beta_2 x_1) + C_{32}\operatorname{sh}(\beta_2 x_1)] -$$

$$- C_{42} = -\frac{\gamma_{12}}{\beta_2} q_0;$$

$$7. \langle u_1(x) - u_2(x) \rangle \Big|_{x=x_1} = 0 \Rightarrow$$

$$C_{11}a_{11} e^{\lambda_1 x_1} - C_{21}a_{11} e^{-\lambda_1 x_1} + C_{31}a_{12} e^{\lambda_3 x_1} -$$

$$- C_{41}a_{12} e^{-\lambda_3 x_1} + C_{51}a_{13} e^{\lambda_5 x_1} - C_{61}a_{13} e^{-\lambda_5 x_1} +$$

$$+ C_{81} x_1 + C_{91} - \gamma_{32} (C_{22} \operatorname{sh}(\beta_2 x_1) + C_{32} \operatorname{ch}(\beta_2 x_1)) -$$

$$- \left(\frac{a_{71}}{2\alpha_{22}} - \frac{\gamma_{12}\gamma_{32}}{\beta_2^2} \right) C_{12} x_1^2 + C_{72} x_1 + C_{82} =$$

$$= -b_3 q_0 \left(\frac{b_2}{\kappa} + b_3 \right) x_1 + \frac{a_{71} q_0}{6\alpha_{22}} x_1^3;$$

$$8. \langle u_{1,x}(x) - u_{2,x}(x) \rangle \Big|_{x=x_1} = 0 \Rightarrow$$

$$C_{11}\lambda_1 a_{11} e^{\lambda_1 x_1} + C_{21}\lambda_1 a_{11} e^{-\lambda_1 x_1} + C_{31}\lambda_3 a_{12} e^{\lambda_3 x_1} +$$

$$+ C_{41}\lambda_3 a_{12} e^{-\lambda_3 x_1} + C_{51}\lambda_5 a_{13} e^{\lambda_5 x_1} + C_{61}\lambda_5 a_{13} e^{-\lambda_5 x_1} +$$

$$+ C_{81} - \gamma_{32}\beta_2 (C_{22} \operatorname{ch}(\beta_2 x_1) + C_{32} \operatorname{sh}(\beta_2 x_1)) -$$

$$- \left(\frac{a_{71}}{\alpha_{22}} - \frac{2\gamma_{12}\gamma_{32}}{\beta_2^2} \right) C_{12} x_1 + C_{72} =$$

$$= -b_3 q_0 \left(\frac{b_2}{\kappa} + b_3 \right) + \frac{a_{71} q_0}{2\alpha_{22}} x_1^2;$$

$$9. (x=0; \psi_1=0) \Rightarrow$$

$$C_{11}a_{11} - C_{21}a_{11} + C_{31}a_{12} - C_{41}a_{12} + C_{51}a_{13} - C_{61}a_{13} = 0;$$

$$10. (x=0; u_1=0) \Rightarrow$$

$$C_{11}a_{21} - C_{21}a_{21} + C_{31}a_{22} - C_{41}a_{22} +$$

$$+ C_{51}a_{23} - C_{61}a_{23} + C_{91} = 0;$$

$$11. (x=0; w_1=0) \Rightarrow$$

$$C_{11} + C_{21} + C_{31} + C_{41} + C_{51} + C_{61} = -\frac{q_0}{\kappa};$$

$$12. (x=0; w_{1,x}=0);$$

$$C_{11}\lambda_1 - C_{21}\lambda_1 + C_{31}\lambda_3 - C_{41}\lambda_3 + C_{51}\lambda_5 - C_{61}\lambda_5 = 0;$$

$$13. (x=l; \psi_2=0) \Rightarrow$$

$$- \frac{\gamma_{12}}{\beta_2^2} C_{12} + C_{22}\operatorname{sh}(\beta_2 l) + C_{32}\operatorname{ch}(\beta_2 l) = \frac{\gamma_{12} q_0 l}{\beta_2^2};$$

$$14. (x=l; u_2=0) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{a_{71}}{2\alpha_{22}} l^2 - \frac{\gamma_{32}\gamma_{12}}{\beta_2^2} \right) C_{12} +$$

$$+ \gamma_{32} (C_{22}\operatorname{sh}(\beta_2 l) + C_{32}\operatorname{ch}(\beta_2 l)) +$$

$$+ C_{72} l + C_{82} = \left(\frac{\gamma_{12} l}{\beta_2^2} - \frac{a_{71} l^3}{6\alpha_{22}} \right) q_0;$$

$$15. (x=l; w_2=0) \Rightarrow$$

$$\frac{l}{\alpha_{22}} \left(\frac{a_{11} l^2}{6} - \frac{\alpha_{12}\gamma_{12}}{\beta_2^2} \right) C_{12} +$$

$$+ \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}\beta_2} [C_{22}\operatorname{ch}(\beta_2 l) + C_{32}\operatorname{sh}(\beta_2 l)] +$$

$$+ \frac{C_{42}}{2} l^2 + C_{52} l + C_{62} = \frac{l^2 q_0}{2\alpha_{22}} \left(\frac{\alpha_{12}\gamma_{12}}{\beta_2^2} - \frac{a_{11} l^2}{12} \right);$$

$$16. (x=l; w_{2,x}=0) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\alpha_{22}} \left(\frac{a_{11} l^2}{2} - \frac{\alpha_{12}\gamma_{12}}{\beta_2^2} \right) C_{12} +$$

$$+ \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} [C_{22}\operatorname{sh}(\beta_2 l) + C_{32}\operatorname{ch}(\beta_2 l)] + \quad (17)$$

$$+ C_{42} l + C_{52} = \frac{l q_0}{\alpha_{22}} \left(\frac{\alpha_{12}\gamma_{12}}{\beta_2^2} - \frac{a_{11} l^2}{6} \right).$$

В случае шарнирно опертого одного из торцов стержня в системе (17) может измениться только 4-е или 8-е уравнения, которые следуют из условий (16):

$$4. (x=0; M_1=0);$$

$$8. (x=l; M_2=0).$$

Численные результаты. При численной реализации решений (14), (13), (11) интенсивность распределенной нагрузки и относительные толщины слоев в трехслойном пакете Д16Т—фторопласт—Д16Т принимались: $h_1=0,02$, $h_{20}=0,02$, $h_{21}=0,01$, $h_3=0,09$; $q_0=2$ МПа. Модули упругости материалов слоев (МПа): $G_1=G_2=0,267 \cdot 10^5$; $G_3=90$; $K_1=K_2=0,8 \cdot 10^5$; $K_3=4700$; коэффициент жесткости основания $\kappa=100$ МПа/м.

Рисунок 3 показывает изменение прогиба вдоль оси стержня при отсутствии ступеньки ($x_0=1$): 1 — $\kappa=0$ (упругое основание отсутствует); 2 — опирание по всей нижней поверхности стержня; 3 — опора левая половина нижнего слоя. С увеличением области опирания перемещения уменьшаются: полное опирание приводит к уменьшения прогиба на 24 %, частичное — на 10 %.

На рисунке 4 приведен прогиб стержня при наличии ступеньки ($x_0=1/2$): 1 — $\kappa=0$ (упругое основание отсутствует); 2 — опирание по всей нижней поверхности стержня; 3 — опора левая половина нижнего слоя. За счет ступеньки жесткость системы возрастает, что приводит к уменьшению перемещений в среднем на 8 %.

Выводы

Приведенная методика и решение краевой задачи позволяют проводить анализ напряженно-деформированного состояния при изгибе частично опертого трехслойного стержня со ступенчато границей в зависимости от прочностных и геометрических параметров слоев, жесткости упругого основания. При отсутствии «ступеньки» все приведенные аналитические результаты совпадают с соответствующими решениями для трехслойного полностью опертого стержня постоянного сечения [2, 6], при отсутствии опирания на упругое основание — с результатами в [9, 10]. Следует отметить, что подобные задачи возникают при надвигке мостов при их строительстве.

Обозначения

- $w(x)$ — прогиб стержня;
- $u(x)$ — продольные перемещения срединной поверхности заполнителя;
- $\psi(x)$ — относительный сдвиг в заполнителе;
- $u^{(k)}(x)$ — продольные перемещения в слоях стержня;
- x_0 — координата сечения, в котором ступенчато изменяется толщина стержня;
- h_k — толщина k -го слоя;
- $h_3=2c$ ($k=1, 2, 3$ — номер слоя);
- $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ — компоненты тензора напряжений и деформаций;
- δA — вариация работы внешних сил;
- δW — вариация работы внутренних сил упругости;
- q — интенсивность внешней распределенной нагрузки;
- K_k, G_k — объемный и сдвиговой модули упругости материалов слоев;
- $C_{11}, C_{81}, C_{12}, C_{82}$ — константы интегрирования.

Список литературы

1. Старовойтов, Э.И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки / Э.И. Старовойтов. — Гомель: БелГУТ, 2002. — 344 с.
2. Плескачевский, Ю.М. Деформирование металлополимерных систем / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. — Минск: Бел. наука. 2004. — 386 с.
3. Zhenqiang, Ch. Theory for multilayered anisotropic plates with weakened interfaces / A.K. Jemah, F.W. Williams // Trans. ASME. J. Appl. Mech. — 1996. — 63, N 4. — pp. 1019—1026.

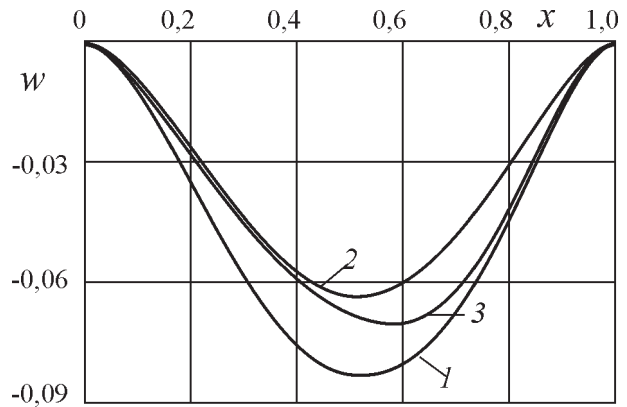


Рисунок 3 — Изменение прогиба вдоль оси трехслойного стержня при отсутствии ступеньки

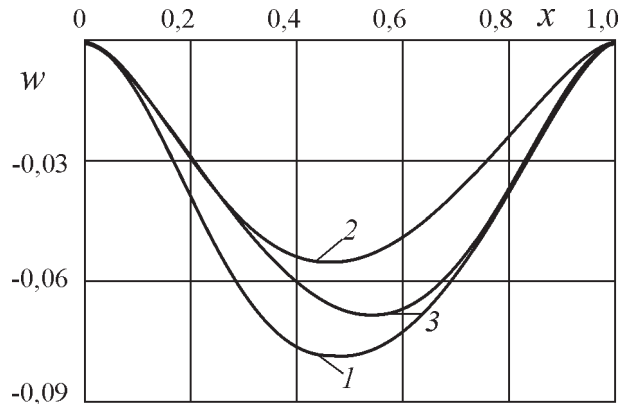


Рисунок 4 — Прогиб трехслойного стержня со ступенькой

4. Ebsioglu, J.K. On the theory on sandwich panels in the reference state / J.K. Ebsioglu // Internal. J. Eng-ng Sci. — 1966. — № 6. — pp. 166—194.
5. Старовойтов, С.А. Напряженно-деформированное состояние трехслойного стержня на упругом основании / С.А. Старовойтов // Вестн. БелГУТ «Наука и транспорт». — 2004. — № 1(8). — С. 25—28.
6. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании / Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 379 с.
7. Белосточный, Г.Н. Оболочки и геометрически нерегулярные пластинки с термочувствительной толщиной / Г.Н. Белосточный, Е.А. Русина // Докл. Росс. Акад. естественных наук: Поволжское межрегиональное отд. — Саратов: СГТУ, 1999. — № 1 — С. 28—37.
8. Игнатъев, О.В. Вариационно-разностный метод в нелинейной теории оболочек ступенчато-переменной толщины / О.В. Игнатъев, В.В. Карпов, В.Н. Филатов. — Волгоград, 2001. — 210 с.
9. Плескачевский, Ю.М. Изгиб трехслойного стержня с нерегулярной границей / Ю.М. Плескачевский, Е.Э. Старовойтова // Механика машин, механизмов и материалов. — 2008. — № 3(4). — С. 52—55.
10. Плескачевский, Ю.М. Изгиб трехслойного металлополимерного стержня ступенчато-переменной толщины / Ю.М. Плескачевский, Е.Э. Старовойтова // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: сб. науч. тр. / Днепропетровский нац. ун-т. — Днепропетровск: ІМА-пресс, 2009. — Вып. 13. — С. 186—192.

Starovoirov E.I., Poddubny A.A.

The bending of three-layer beam with variable border laying on the elastic basis

The bending of three-layer elastic beam partial support pattern on the elastic basis with stepped variable thickness of one of two stiff shells is considered. To describe kinematics of asymmetrical over thickness core pack the hypotheses of the broken normal are accepted. A system of equilibrium equations in terms of displacements has been derived. Analytical deciding a problem are received and their numeric analysis are conducted.

Поступила в редакцию 10.05.2010