

УДК 531.132.1

С.А. БОРИСЕВИЧ

Белорусский государственный технологический университет, г. Минск

А.Н. КАМЛЮК, канд. физ.-мат. наук

Командно-инженерный институт МЧС Республики Беларусь, г. Минск

ВОЗДЕЙСТВИЕ НА ЛЕСНУЮ МАШИНУ ГИБКОГО СТВОЛА ДЕРЕВА ПРИ ЕГО ПАДЕНИИ

В статье представлена модель для изучения динамического поведения гибкого ствола дерева. Разработана методика интегрирования уравнений движения модели дерева. В качестве примера рассмотрена динамика падения дерева с учетом сил сопротивления, линейных по скорости, действующих на его крону. Рассмотрены взаимодействие ствола дерева с упругим основанием, а также воздействие ствола дерева на лесную машину в случае повала дерева путем опрокидывания его вокруг нижнего основания.

Ключевые слова: численная модель дерева, динамика падения, деформация, лесная машина, гибкость ствола дерева, упругое основание

Введение. Тонкие стержни, находящиеся в двумерном пространстве и подверженные большим деформациям и перемещениям, часто встречаются в различных инженерных задачах. Анализ операций технологического процесса лесосечных работ показывает, что все они связаны с перемещением дерева. После срезания и сталкивания дерева при свободном его падении происходит вращение ствола под действием силы тяжести. Теоретическое рассмотрение этого процесса предполагает вращение ствола в плоскости, и в большинстве случаев это приемлемо. Изучение этого процесса необходимо при решении задач по взаимодействию машины, ее рабочих органов и деревьев.

Исследование влияния падающего дерева на основание и на лесную машину имеет важное практическое значение. Решение задачи усложняется тем фактом, что ствол дерева в процессе взаимодействия деформируется, поэтому необходимо учитывать поперечные изгибные колебания ствола. Учет гибкости ствола дерева может существенно улучшить понимание его механического поведения и увеличить точность расчетов. Результаты этого исследования позволят выяснить, как влияет гибкость ствола дерева на характер взаимодействия ствола дерева с упругим основанием и лесной машиной.

Точное решение задач о движении деформируемых систем в рамках классической теории упругости удается получить в замкнутой форме лишь в немногих относительно простых случаях. В общем случае это сделать невозможно, поэтому приходится упрощать расчетную модель, в частности, путем уменьшения числа степеней свободы. Можно рассматривать ствол дерева в виде дискретной модели, состоящей из конечного числа сегментов. Это приводит к численному решению для любых операций, связанных с перемещением дерева. Моделирование гибких стержней моделью в виде жестких тел, соединенных между собой упругими связями, широко используется и имеет преимущества по сравнению с конечно-элементным способом, а именно: моделирование гибкого тела конечным числом гибких элементов, соединенных жестко.

В данной статье рассмотрена модель дерева в виде цепочки жестких звеньев, соединенных упругими шарнирами (рисунок 1) для моделирования механического поведения ствола дерева [1, 2]. Модель представляет собой

некоторое число цилиндров, соединенных между собой пружинами. Цилиндры могут друг относительно друга поворачиваться в плоскости. Данная модель, называемая «rod-chain model», широко используется для изучения динамики длинных гибких нитей в потоке жидкости, однако для исследования поведения падающего дерева используется впервые (см. [3] и цитируемую там литературу).

В работе решены следующие задачи:

- 1) на основании уравнения Лагранжа второго рода получены уравнения движения, в которых сила сопротивления, действующая на крону дерева, введена при помощи диссипативной функции Релея;
- 2) рассмотрено взаимодействие гибкого ствола дерева с упругим основанием модели Винклера и лесной машиной.

Уравнения движения. В качестве обобщенных координат выберем углы поворота стержней φ , отсчитываемые от вертикали (см. рисунок 1). Принимаем, что движение происходит в одной плоскости. Координаты центров тяжести k -го стержня определяются выражениями:

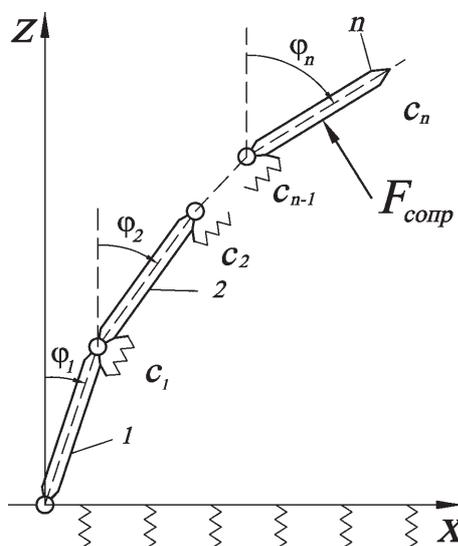


Рисунок 1 — Модель дерева и упругое основание модели Винклера

$$\begin{aligned} x_{Ck} &= \sum_{i=1}^{k-1} l_i \sin \varphi_i + \frac{1}{2} l_k \sin \varphi_k, \\ z_{Ck} &= \sum_{i=1}^{k-1} l_i \cos \varphi_i + \frac{1}{2} l_k \cos \varphi_k, \end{aligned} \quad (1)$$

где l_i — длина i -го стержня. В (1) и при всех дальнейших вычислениях индекс k относится к параметрам k -го стержня.

Кинетическая энергия рассматриваемой системы находится по формуле

$$T = \sum_{k=1}^n \left(\frac{m_k v_{Ck}^2}{2} + \frac{J_k \dot{\varphi}_k^2}{2} \right) \quad (2)$$

где m_k — масса стержня, $v_{Ck}^2 = \dot{x}_{Ck}^2 + \dot{z}_{Ck}^2$ — скорость центра масс стержня; J_k — динамический центральный осевой момент инерции стержня, (для цилиндра $J_k = m_k (l_k^2/12 + d_k^2/16)$, d_k — диаметр стержня).

Потенциальная энергия системы состоит из энергии в поле сил тяжести и энергии упругих связей:

$$\Pi = \sum_{k=2}^n \frac{c_k (\varphi_k - \varphi_{k-1})^2}{2} + \sum_{k=1}^n g m_k z_{Ck}, \quad (3)$$

где c_k — жесткость упругих связей.

Жесткость упругих связей вычисляется согласно выражению [2]:

$$c_k = \frac{E J_{Ak}}{\Delta l}. \quad (4)$$

Будем полагать, что сила сопротивления воздуха, действующая на каждый элемент, пропорциональна первой степени скорости его центра масс: $\mathbf{F}_k = -\beta_k \mathbf{v}_{Ck}$. При линейной зависимости силы сопротивления от скорости для вычисления обобщенной силы сопротивления удобно ввести диссипативную функцию Релея Φ :

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \beta_k \frac{v_{Ck}^2}{2}.$$

Тогда обобщенная сила сопротивления может быть записана в виде

$$Q_k = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_k}.$$

Дифференциальные уравнения движения модели формулируются с помощью уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_k} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_k} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}_k} \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

В результате получаем систему дифференциальных уравнений второго порядка, линейную по угловым ускорениям элементов, но сильно нелинейную по самим обобщенным координатам. Систему ввиду ее громоздкости не выписываем.

Конкретизируя модель, разобьем ствол дерева на n равных частей. Примем, что диаметр ствола по длине дерева изменяется по линейному закону [6]:

$$d = d_0 - qs, \quad (6)$$

где d_0 — диаметр ствола у основания; q — коэффициент сбега; s — дуговая координата, отсчитываемая от основания ствола.

Для определения коэффициента сбега будем считать, что в вершине дерева, при $s = l$, диаметр ствола $d = d_B$. Тогда коэффициент сбега из (6) можно определить как

$$q = (d_0 - d_B)/l. \quad (7)$$

Заменим каждую часть, представляющую собой усеченный конус, цилиндром, с эффективным диаметром, равным среднему диаметру конуса. Представим дуговую координату в (6) как $s = k\Delta l$, тогда:

$$d_k = d_0 - q\Delta l(k-1/2), \quad k=1 \dots n, \quad (8)$$

где Δl — длина стержней, $\Delta l = l/n$.

Осевые моменты инерции сечений:

$$J_{Ak} = \pi d_k^4/64, \quad (9)$$

и массы звеньев модели:

$$m_k = \rho \pi d_k^2 \Delta l, \quad k=0 \dots n. \quad (10)$$

Интегрирование уравнений движения. С учетом начальных условий (начальных углов отклонения стержней от вертикали и их начальных скоростей) получена система уравнений, линейных относительно старшей производной $\dot{\varphi}_k$, которая решалась численно в пакете Maple 11. Угловые ускорения из системы находились при помощи метода Ньютона-Рафсона [4].

Численное интегрирование уравнений движения производилось с помощью модификации базовой схемы Верле, так называемой полушаговой «leap-frog» схемы [5]:

$$\dot{\varphi}(t + \Delta t/2) = \dot{\varphi}(t - \Delta t/2) + \ddot{\varphi}(t)\Delta t, \quad (11)$$

$$\varphi(t + \Delta t) = \varphi(t) + \dot{\varphi}(t + \Delta t/2)\Delta t, \quad (12)$$

где $\boldsymbol{\varphi}$ — вектор углов поворота; $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ — вектор угловых скоростей; $\ddot{\boldsymbol{\varphi}}$ — вектор угловых ускорений.

Текущие скорости вычислялись по формуле:

$$\dot{\varphi}(t) = 0.5(\dot{\varphi}(t + \Delta t/2) + \dot{\varphi}(t - \Delta t/2)).$$

Для численного решения шаг по времени принимаем следующим образом: при свободном падении $\Delta t = 0,001$ с, при взаимодействии с упругим основанием и машиной $\Delta t = 0,0001$ с. При этом были приняты следующие параметры ствола дерева [6]: длина — $l = 19$ м, диаметры — $d_0 = 24$ см, $d_B = 10$ см, модуль упругости древесины — $E = 1,2 \cdot 10^{10}$ Па, плотность древесины — $r = 780$ кг/м³, массу вычисляли исходя из объема ствола и плотности древесины. Коэффициенты β_k примем отличными от нуля для нескольких последних стержней модели в соответствии с расположением кроны дерева и будем считать, что их значения распределены по треугольному закону со значением $\beta = 70$ Н·с/м у основания треугольника и нулевым значением на верхнем конце ствола. В приведенных ниже расчетах ствол дерева разбивался на 20 частей. Расчеты проводились при учете сил сопротивления, однако для проверки работоспособности алгоритма моделирования расчеты выполнялись и при отсутствии сил сопротивления, когда критерий сохранения энергии системы был использован для оценки точности моделирования.

Свободное падение дерева. Интегрирование дифференциальных уравнений движения проводилось при условии, что первоначальная осевая линия задана прямой с углом наклона $\varphi_0 = 10^\circ$ и начальная угловая скорость $\omega_0 = 0,1$ рад/с.

Формы осевой линии ствола дерева при падении в различные моменты времени показаны на рисунке 2. Анализируя графики, следует отметить, что при отсутствии сил сопротивления жесткость ствола не позволяет ему существенно деформироваться, и он движется практически как абсолютно твердое тело. При наличии сил сопротивления ствол дерева заметно деформируется и время падения значительно увеличивается.

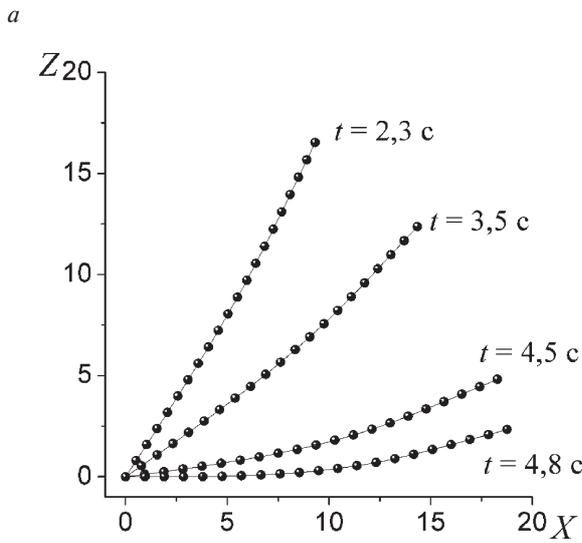
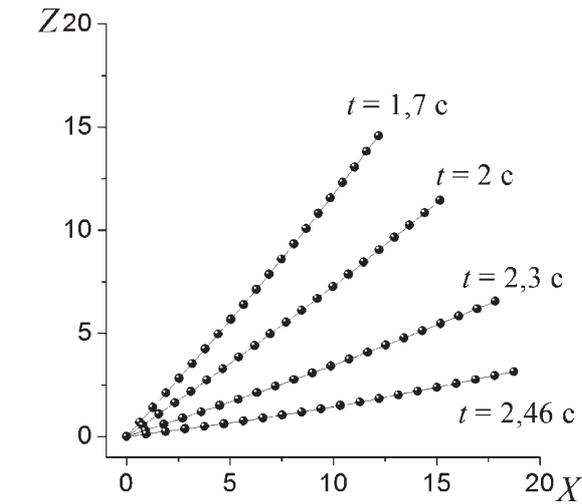


Рисунок 2 — Упругая линия ствола дерева при падении в различные моменты времени: а — без учета сил сопротивления; б — с учетом сил сопротивления

Взаимодействие падающего дерева с упругим основанием. Рассмотрим падение ствола дерева на упругое основание (см. рисунок 1), описываемое линейной моделью Винклера без демпфирования, в которой деформации поверхности пропорциональны нагрузке и полностью исчезают при ее снятии [7].

При касании поверхности основания ($z_{с\kappa} < 0$) в выражение для потенциальной энергии (3) добавляется дополнительное слагаемое, соответствующее потенциальной энергии деформации упругого основания. Потенциальная энергия принимает вид

$$\Pi^* = \Pi + \sum_{k=1}^n \frac{c_{осн\kappa} \Delta z_{с\kappa}^2}{2}, \quad (13)$$

где $c_{осн\kappa}$ — жесткости пружин упругого основания. В расчетах принято, что стержни модели соприкасаются с пружинами своими центрами масс. Коэффициенты жесткости пружин основания приняты равными $c_{осн\kappa} = c_{осн} = 6,5 \cdot 10^5$ Н/м [7].

Формы осевой линии ствола дерева в процессе взаимодействия с упругим основанием представлены на рисунке 3, из которого видно, что сначала, с увеличением номе-

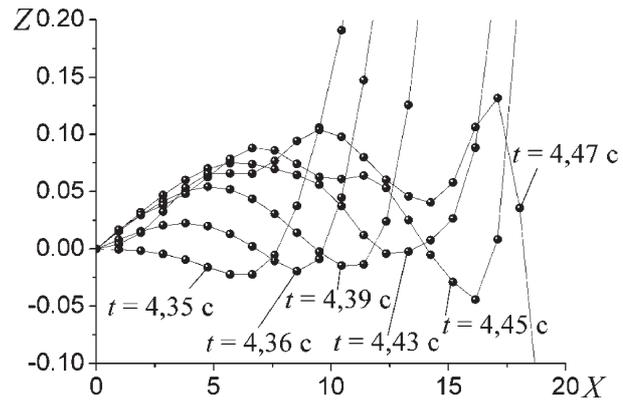


Рисунок 3 — Упругая линия ствола дерева при взаимодействии с основанием в различные моменты времени

ра соприкасающегося стержня, деформации пружин основания нарастают, затем в средней части ствола уменьшаются практически до нуля, а затем резко увеличиваются при соприкосновении с основанием последних стержней модели. Максимальная деформация пружин основания вызывается последним стержнем модели ствола и составляет $\Delta z_c = 0,22$ м. В реальном случае воздействие конца ствола дерева на упругое основание смягчает крона дерева. Это легко учесть, изменяя длину пружин упругого основания в месте соприкосновения кроны дерева.

Импульс, произведенный стволом дерева на основание, можно вычислить по формуле:

$$S = \sum_j \sum_k c_{осн} \Delta z_{jk} \Delta t, \quad k=1...n, \quad j=1...t_{вз} / \Delta t,$$

где Δz_{jk} — деформации основания; $t_{вз}$ — продолжительность взаимодействия.

В результате расчетов получили для жесткого ствола дерева импульс $S = 10720$ Нс, а для гибкого — $S = 8722$ Нс. Таким образом, гибкость ствола оказывает значительное влияние на взаимодействие ствола с упругим основанием и приводит к уменьшению импульса, произведенного стволом дерева на упругое основание почти на 20%. Полагая в формуле (13) все коэффициенты осн\kappa кроме одного, равными нулю можно получить модель для падения ствола на упругую невесомую опору.

Взаимодействие падающего дерева с лесной машиной.

Рассмотрим взаимодействие падающего дерева с лесной машиной (рисунок 4).

При касании каким-либо стержнем модели ствола машины в точке K , в выражение для кинетической энергии (2) добавляется дополнительное слагаемое T_m , соответствующее кинетической энергии машины:

$$T_m = \frac{1}{2} M (\dot{x}_c^2 + \dot{z}_c^2) + \frac{1}{2} J_c \dot{\phi}_c^2,$$

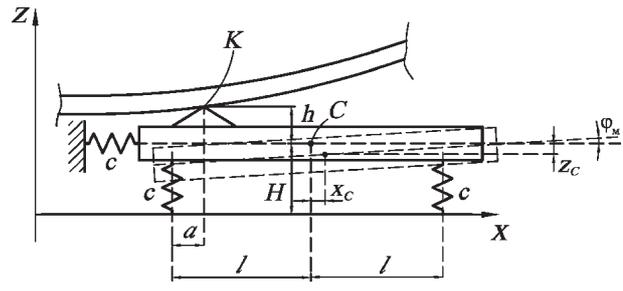


Рисунок 4 — Модель лесной машины

где M и J_C — масса и поперечный центральный момент инерции поддресоренной части машины, принятые в дальнейших расчетах соответственно $M = 15 \cdot 10^3$ кг и $J_C = 10^4$ кг·м²; x_C и z_C горизонтальное и вертикальное смещения центра тяжести поддресоренной части машины, φ_M — угол поворота поддресоренной части машины вокруг своего центра тяжести C .

Выразим смещения центра масс машины через координаты точки K , которая совпадает с центром тяжести какого-либо стержня модели ствола:

$$\begin{aligned} x_K &= x_C + (l-a)\cos\varphi_M - x_{C0}, \\ z_K &= z_C + (l-a)\sin\varphi_M - H, \end{aligned} \quad (14)$$

где x_{C0} — горизонтальная координата центра тяжести машины в момент соприкосновения ствола дерева с машиной; x_K и z_K — горизонтальная и вертикальная координаты опоры K .

Уравнения (14) предполагают, что относительное движение точек соприкосновения ствола дерева и машины отсутствует. В результате такого упрощения в уравнениях движения появляется только одна новая обобщенная координата φ_M .

Потенциальная энергия системы состоит из потенциальной энергии машины в поле сил тяжести (нулевой уровень потенциальной энергии совпадает с опорной поверхностью) и потенциальной энергии деформированных пружин подвески:

$$\begin{aligned} \Pi_M &= -Mgz_C + \frac{1}{2}[c_{\text{вер}}(z_C + l\varphi_M + f_{\text{ст}})^2 - c_{\text{вер}}f_{\text{ст}}^2 + \\ &+ c_{\text{вер}}(z_C - l\varphi_M + f_{\text{ст}})^2 - c_{\text{вер}}f_{\text{ст}}^2 + c_{\text{гор}}x_C^2], \end{aligned} \quad (15)$$

где $c_{\text{вер}}$ и $c_{\text{гор}}$ — вертикальная и горизонтальная приведенные жесткости пружин подвески, приняты: $c_{\text{вер}} = c_{\text{гор}} = 1,5 \cdot 10^6$ Н/м; $f_{\text{ст}}$ — статическая деформация пружин подвески.

Вычисляя и подставляя значение $f_{\text{ст}}$ в выражение для потенциальной энергии (15), получаем:

$$\Pi_M = c_{\text{вер}}z_C^2 + c_{\text{вер}}l^2\varphi_M^2 + \frac{1}{2}c_{\text{гор}}x_C^2. \quad (16)$$

Выражение (16) в момент соприкосновения ствола дерева и машины добавляется в выражение для потенциальной энергии (3).

Предположим, что в результате удара скорость стержня, соприкнувшегося с машиной, уменьшилась до нуля, и рассмотрим дальнейшее движение ме-

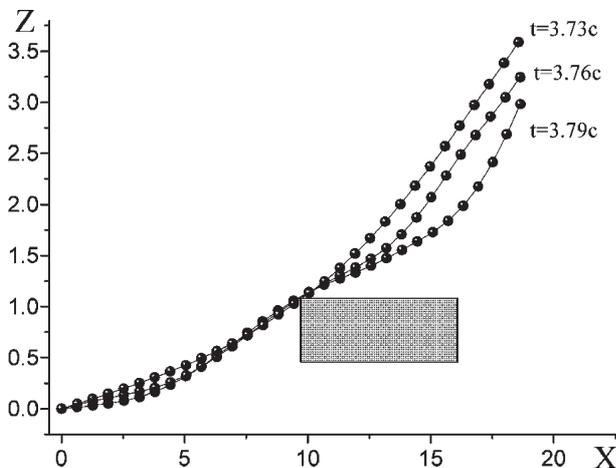


Рисунок 5 — Упругая линия ствола дерева при взаимодействии с машиной в различные моменты времени

ханической системы, состоящей из ствола дерева и машины.

Формы ствола дерева во время взаимодействия с машиной для случая, когда ствол соприкасается в середине его длины ($l_k/l = 0,5$), представлены на рисунок 5.

Для нахождения импульса, производимого стволом дерева на машину после процесса соударения, рассмотрим уравнения движения центра масс лесной машины:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= R_x - F_{\text{упр}}^{\text{гор}}, \\ M\ddot{z}_C &= R_z - Mg + F_{\text{упр1}}^{\text{вер}} + F_{\text{упр2}}^{\text{вер}}, \end{aligned} \quad (17)$$

где R_x и R_z — проекции силы взаимодействия машины со стволом дерева на оси координат; $F_{\text{упр}}^{\text{гор}}$ — сила упругости, действующая на машину со стороны горизонтальной пружины; $F_{\text{упр1}}^{\text{вер}}$ и $F_{\text{упр2}}^{\text{вер}}$ — силы упругости, действующие на машину со стороны вертикальных пружин.

Выражения для сил упругости, действующих на машину со стороны горизонтальной и вертикальных пружин соответственно равны:

$$\begin{aligned} F_{\text{упр}}^{\text{гор}} &= c_{\text{гор}}x_C, \\ F_{\text{упр1}}^{\text{вер}} &= c_{\text{вер}}(z_C + l\varphi_M + f_{\text{ст}}), \\ F_{\text{упр2}}^{\text{вер}} &= c_{\text{вер}}(z_C - l\varphi_M + f_{\text{ст}}). \end{aligned}$$

Решая уравнения движения центра масс машины (17), находим R_x и R_z , которые представлены на рисунок 6.

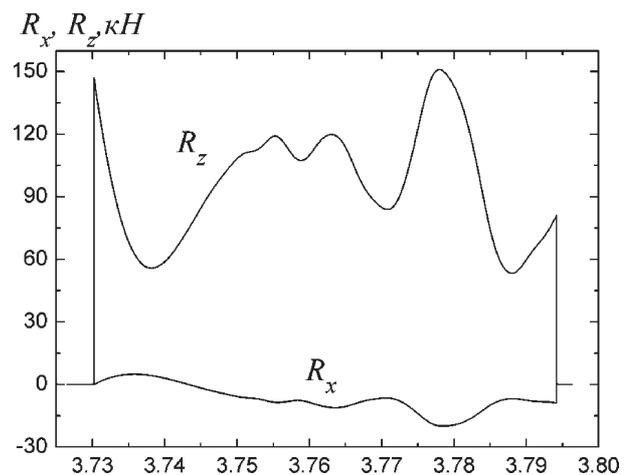


Рисунок 6 — Горизонтальная и вертикальная составляющие сил, действующих на машину в точке K (см. рисунок 4) со стороны ствола дерева $n = 30$ ($l_k/l = 0,5$)

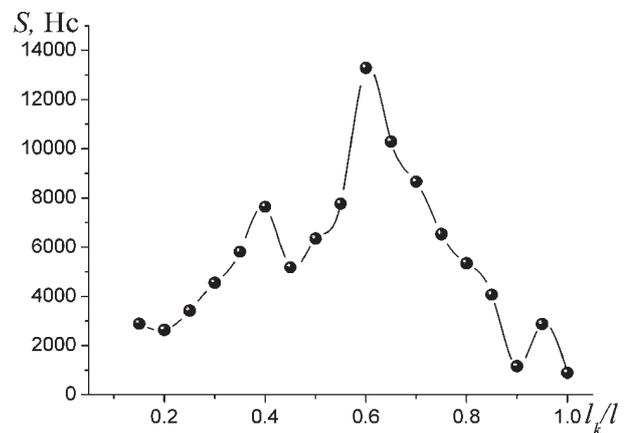


Рисунок 7 — График импульсов, произведенных стволом дерева при соударении для различных значений l_k/l

С целью оценки воздействия, производимого падающим деревом на лесную машину, вычислим импульс, передаваемый в данном процессе.

Проекция импульса на оси координат соответственно равны:

$$S_x = \int_0^{t_{ca}} R_x dt, \quad S_z = \int_0^{t_{ca}} R_z dt,$$

а его модуль $S = \sqrt{S_x^2 + S_z^2}$.

Значение импульса, переданного стволом дерева на машину, изменяется в зависимости от номера стержня, которым заменяющая гибкий ствол модель соприкасается с машиной. График импульсов для гибкого стержня при различных значениях l_k/l представлен на рисунке 7.

Из графика видно, что наибольшее значение импульса переданного стволом дерева на машину наблюдается, если точка соударения ствола находится на расстоянии $l_k/l = 0,6$ от основания ствола и составляет величину $S = 13290$ Нс.

Заключение. Разработана методика интегрирования уравнений движения модели дерева, учитывающей гибкость ствола. В качестве примера рассмотрена динамика падения дерева с учетом сил сопротивления, линейных по скорости, действующих на его крону. Рассмотрено взаимодействие ствола дерева с упругим основанием. Показано, что импульс, произведенный стволом дерева на упругое основание, уменьшается, если учесть его гибкость. Рассмотрено воздействие

ствола дерева на лесную машину в случае повала дерева путем опрокидывания его вокруг нижнего основания. Получены значения ударной силы, продолжительности удара и послееударного импульса для различных случаев повала дерева, которые будут полезны при проектировании лесных машин.

Список литературы

1. Борисевич, С. А. Разработка многоступенчатой модели гибкого ствола дерева / С. А. Борисевич, В. Б. Немцов // Тр. БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. — 2004. — Вып. XII. — С. 47—49.
2. Борисевич, С. А. Конечно-разностная схема для исследования падения ствола дерева / С. А. Борисевич // Тр. БГТУ. Сер. II, Лесная и деревообраб. пром-сть. — 2008. — Вып. XVI. — С. 104—107.
3. Wang, Gang. Optimization of the rod chain model to simulate the motions of a long flexible fiber in simple shear flows / Gang Wang, Wei Yu, Chixing Zhou // European Journal of Mechanics B. — 2006. — Vol. 25, № 3. — pp. 337—347.
4. Денис, Дж. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений / Дж. Дэннис, Р. Шнабель. — М.: Мир, 1988. — 440 с.
5. Allen, M. P. Computer Simulation of Liquids / M. P. Allen, D. J. Tildesley. — Oxford: Clarendon press, 1999. — 385 p.
6. Кортаев, Л. В. Параметры деревьев и хлыстов как объектов лесозаготовительного производства / Л. В. Кортаев. — Л.: АЛТИ, 1982. — 80 с.
7. Черкасов, И. И. Механические свойства грунтов в дорожном строительстве / И. И. Черкасов. — М.: Транспорт, 1976. — 247 с.

Borisevich S.A., Kamljuk A.N.

Dynamic of falling flexible tree stem

A rod-chain model was used to study the dynamics of a tree stem. A numerical method is developed for simulating the mechanical behavior of a flexible tree stem. The motion of the flexible tree stem is determined under the resistance forces exerting on the tree crown. Flexible tree stem interaction with an elastic foundation and a forest machine is investigated as well. The numerical model is applied for calculating the impulse of force on the elastic foundation and the forest machine.

Поступила в редакцию 15.07.2011.