МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3

Э.И. СТАРОВОЙТОВ, Д.В. ЛЕОНЕНКО, доктора физ.-мат. наук
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

Рассмотрено деформирование упругого трехслойного стержня в температурном поле. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета стержня приняты гипотезы ломаной нормали. Получена система уравнений равновесия и ее общее аналитическое решение в перемещениях. Проведен численный анализ решения.

Ключевые слова: *термоупругость, трехслойный стержень, гипотеза ломаной нормали, кинематика*

Введение. В условиях деформации изгиба трехслойные конструкции, которые состоят из двух несущих слоев и заполнителя, оказываются наиболее рациональными, то есть близкими к оптимальным с точки зрения обеспечения минимума весовых показателей при заданных ограничениях на прочность и жесткость. В рамках теории малых упругопластических деформаций [1] в работах [2–7] приведены результаты по однократному квазистатическому и динамическому деформированию трехслойных элементов конструкций, связанных и несвязанных с винклеровым основанием. Здесь рассмотрено деформирование в температурном поле несимметричного по толщине трехслойного стержня.

Постановка задачи. Рассмотрим трехслойный стержень с жестким заполнителем (рисунок 1). Систему координат x, y, z свяжем со срединной плоскостью заполнителя. Принимаем, что в тонких несущих слоях *1*, *2* справедливы гипотезы Бернулли, в несжимаемом по толщине сравнительно толстом заполнителе *3* нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(x)$. В этом случае перемещения по толщине стержня непрерывны, напряжения терпят разрыв. Применимость подобных моделей деформирования для слоистых систем подробно обсуждается в [8].

На внешний слой стержня действует распределенная силовая нагрузка $p(x)$, $q(x)$. Температурное поле T_k в стержне считаем известным, например, в [2] приведена приближенная расчетная формула. Через $w(x)$ и $u(x)$ обозначены прогиб и продольное перемещение срединной плоскости заполнителя. На торцах предполагается наличие жестких диафрагм, препятствующих относительному сдвигу слоев. С помощью введенных гипотез продольные перемещения в слоях $u^{(k)}$ выражаются через три искомые функции $u(x)$, $\psi(x)$ и $w(x)$:

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u + c\psi - zw,_x \ (c \le z \le c + h_1), \\ u^{(3)} &= u + z\psi - zw,_x \ (-c \le z \le c), \\ u^{(2)} &= u - c\psi - zw,_x \ (-c - h_2 \le z \le -c), \end{aligned} \qquad (1)$$

где z — координата рассматриваемого волокна; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате; верхний индекс k — номер слоя.

Компоненты тензора деформаций ε_{ij} следуют из соотношений Коши и выражений (1), напряжения — из закона Гука. Внутренние силы и моменты вводятся соотношениями:

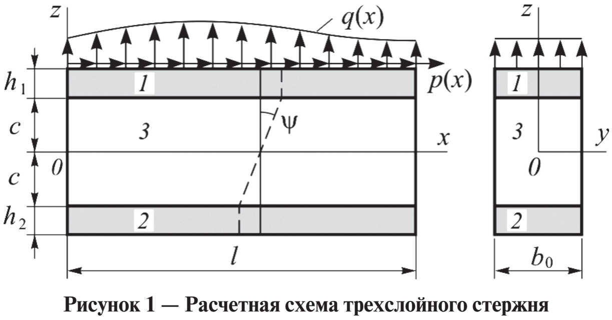

Рисунок 1 — Расчетная схема трехслойного стержня

$$
\begin{gathered}
N=\sum_{k=1}^{3} N^{(k)}, \quad M=\sum_{k=1}^{3} M^{(k)}, \\
H=c\left(N^{(1)}-N^{(2)}\right)+M^{(3)}, \ Q=Q^{(3)}, \\
N^{(k)}=b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} dz, \ M^{(k)}=b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} z\, dz, \\
Q^{(3)}=b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} dz,
\end{gathered} \tag{2}
$$

где $\sigma_{xx}^{(k)}$, $\sigma_{xz}^{(3)}$ — компоненты тензора напряжений; b_0 — ширина сечения стержня; интегралы берутся по толщине h_k каждого из слоев.

Для связи напряжений и деформаций в слоях используем термоупругие соотношения закона Гука (3) в девиаторно-шаровой форме

$$
\begin{gathered}
s_x^{(k)}=2G_k(T_k)э_x^{(k)}, \ s_{xz}^{(3)}=2G_3 э_{xz}^{(3)}, \\
у^{(k)}=3K_k(T_k)(е^{(k)}-\alpha_k T_k), \\
\sigma_{xz}^{(3)}=s_{xz}^{(3)}=2G_3 э_{xz}^{(3)}
\end{gathered} \tag{3}
$$

где $s_x^{(k)}$, $э_x^{(k)}$ — девиаторные; $у^{(k)}$, $е^{(k)}$ — шаровые части тензоров напряжений и деформаций; G_k, K_k — модули сдвига и объемного деформирования; α_k — коэффициент линейного температурного расширения.

Компоненты тензора напряжений в слоях с учетом выражений (3) записываются в виде:

$$
\begin{gathered}
\sigma_{xx}^{(k)}=s_{xx}^{(k)}+\sigma^{(k)}=2G_k э_{xx}^{(k)}+3K_k(\varepsilon^{(k)}-\alpha_k T_k)= \\
=K_k^{+}\varepsilon_{xx}^{(k)}-3K_k\alpha_k T_k, \\
\sigma_{xz}^{(3)}=s_{xz}^{(3)}=2G_3 э_{xz}^{(3)}=G_3\psi,
\end{gathered} \tag{4}
$$

где введено обозначение $K_k^{+}=K_k+\frac{4}{3}G_k$.

С помощью соотношений (1), (3) и (4) внутренние усилия и моменты (2) выражаются через искомые функции $u(x)$, $\psi(x)$, $w(x)$:

$$
\begin{gathered}
N^{(1)}=b_0 \int_c^{c+h_1} \sigma_{xx}^{(1)} dz=b_0 K_1^{+}\left[h_1\left(u,_x+c\psi,_x\right)-\right. \\
\left.-\left(c+\tfrac{1}{2}h_1\right)h_1 w,_{xx}\right]-3b_0 K_1\alpha_1 \int_c^{c+h_1} T_1 dz, \\
N^{(2)}=b_0 \int_{-c-h_2}^{-c} \sigma_{xx}^{(2)} dz=b_0 K_2^{+}\left[h_2\left(u,_x-c\psi,_x\right)+\right. \\
\left.+\left(c+\tfrac{1}{2}h_2\right)h_2 w,_{xx}\right]-3b_0 K_2\alpha_2 \int_{-c-h_2}^{-c} T_2 dz,
\end{gathered} \tag{5}
$$

$$
N^{(3)}=b_0 \int_{-c}^{c} \sigma_{xx}^{(3)} dz=2b_0 K_3^{+} c\, u,_x-3b_0 K_3\alpha_3 \int_{-c}^{c} T_3 dz,
$$

$$
\begin{gathered}
M^{(1)}=b_0 \int_c^{c+h_1} \sigma_{xx}^{(1)} z dz=b_0 K_1^{+}\left[h_1\left(c+\tfrac{1}{2}h_1\right)\left(u,_x+c\psi,_x\right)-\right. \\
\left.-\left(c^2+ch_1+\tfrac{1}{3}h_1^2\right)h_1 w,_{xx}\right]-3K_1\alpha_1 \int_c^{c+h_1} T_1 z dz,
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
M^{(2)}=b_0 \int_{-c-h_2}^{-c} \sigma_{xx}^{(2)} z\, dz=b_0 K_2^{+}\left[-h_2\left(c+\tfrac{1}{2}h_2\right)\times\right. \\
\left.\times\left(u,_x-c\psi,_x\right)-\left(c^2+ch_2+\tfrac{1}{3}h_2^2\right)h_2 w,_{xx}\right]+ \\
+3K_2\alpha_2 h_2 \int_c^{c+h_1} T_2 dz,
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
M^{(3)}=b_0 \int_{-c}^{c} \sigma_{xx}^{(3)} z\, dz \\
=\tfrac{2}{3}b_0 K_3^{+} c^3\left(\psi,_x-w,_{xx}\right)-3K_3\alpha_3 \int_{-c}^{c} T_3 z dz, \\
Q^{(3)}=b_0 \int_{-c}^{c} \sigma_{xz}^{(3)} dz=2b_0 G^{(3)} c\psi.
\end{gathered}
$$

Уравнения равновесия трехслойного стержня получим, используя принцип возможных перемещений Лагранжа:

$$
\delta A=\delta W, \tag{6}
$$

где δA, δW — вариации работ внешних сил и внутренних напряжений.

При определении работы внешних сил $\delta A=\delta A_1+ +\delta A_2$ считаем, что к срединной поверхности заполнителя приложены произвольные распределенные нагрузки $p(x)$, $q(x)$, а к торцам стержня — сосредоточенные силы и моменты. Вариация работы внешней нагрузки будет

$$
\delta A_1=\iint_S (p\delta u+q\delta w) dS=b_0 \int_0^l (p\delta u+q\delta w) dx.
$$

Вариация работы внешних сил и моментов на торцах

$$
\delta A_2=(N_0-N_l)\delta u+(Q_0-Q_l)\delta w-(M_0-M_l)\delta w,_x,
$$

где N_0, Q_0, M_0, N_l, Q_l, M_l — заданные силы и моменты на торцах ($x=0$; l).

Вариацию работы сил упругости принимаем следующей:

$$
\begin{gathered}
\delta W=\iint_S \sum_{k=1}^{3} \int_{h_k} (\sigma_{xx}^{(k)}\delta\varepsilon_{xx}^{(k)}+2\sigma_{xz}^{(3)}\delta\varepsilon_{xz}^{(3)}\delta_{k3}) dz\ dS= \\
=b_0 \int_0^l \left[\sum_{k=1}^{3} \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)}\delta\varepsilon_{xx}^{(k)} dz+2\int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)}\delta\varepsilon_{xz}^{(3)} dz\right] dx.
\end{gathered} \tag{7}
$$

С помощью соотношений (1) вариации деформаций в (7) выражаются через вариации независимых перемещений δu, $\delta\psi$ и δw. Подставив полученные выражения в уравнение (6) и приравняв нулю коэффициенты при независимых вариациях, получим систему дифференциальных уравнений равновесия трехслойного стержня в усилиях. Из нее, используя соотношения (5), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений равновесия трехслойного термоупругого стержня в перемещениях:

$$
\begin{gathered}
a_1 u,_{xx}+a_6,\psi_{xx}-a_7 w,_{xxx}=-p, \\
a_6 u,_{xx}+a_2,\psi_{xx}-a_3 w,_{xxx}-a_5\psi=0, \\
a_7 u,_{xxx}+a_3,\psi_{xxx}-a_4 w,_{xxxx}=-q.
\end{gathered} \tag{8}
$$

Коэффициенты, входящие в систему (8), следующие

$$
\begin{gathered}
a_1=K_1^{+}h_1+K_2^{+}h_2+2K_3^{+}c, \\
a_2=c^2\left[K_1^{+}h_1+K_2^{+}h_2+\tfrac{2}{3}K_3^{+}c\right], \\
a_3=c\left[K_1^{+}h_1\left(c+\tfrac{1}{2}h_1\right)+K_2^{+}h_2\left(c+\tfrac{1}{2}h_2\right)+\tfrac{2}{3}K_3^{+}c^2\right], \\
a_4=K_1^{+}h_1\left(c^2+ch_1+\tfrac{1}{3}h_1^2\right)+K_2^{+}h_2\left(c+ch_2+\tfrac{1}{3}h_2^2\right)+\tfrac{2}{3}K_3^{+}c^3, \\
a_5=2G_3 c,\ a_6=c\left[K_1^{+}h_1-K_2^{+}h_2\right], \\
a_7=K_1^{+}h_1\left(c+\tfrac{1}{2}h_1\right)-K_2^{+}h_2\left(c+\tfrac{1}{2}h_2\right), \\
K_k^{+}=K_k+\tfrac{4}{3}G_k.
\end{gathered} \tag{9}
$$

Коэффициенты a_i зависят от жесткостных свойств материалов слоев и через них от температуры. Изменение параметров упругости несущих слоев описывается известной линейной формулой Белла

$$\{G(T),\,K(T),\,E(T)\}=\{G(0),\,K(0),\,E(0)\}\,\phi(T),$$
$$\phi(T)=\begin{cases}1, & 0<T/T_m\le 0{,}06,\\ 1{,}03(1-T/(2T_m)), & 0{,}06<T/T_m\le 0{,}57,\end{cases}$$

в полимерном заполнителе подобная зависимость принимается в виде, предложенном в [2],

$$G_3(T_3)=\frac{G_3(T_0)}{\phi_3(T_3)},\; K_3(T_3)=\frac{K_3(T_0)}{\phi_3(T_3)},\qquad \phi_3(T)=1+B\left(\frac{T-T_0}{T_m}\right)^{\gamma}, \tag{10}$$

где T_m — температура плавления материала; $G(0)$, $K(0)$, $E(0)$ — значения модулей упругости при так называемом «нулевом напряжении», которые можно определить, зная G_0 при некоторой температуре (например, при T_0 = 293 K), тогда $G(0)=G_0/\phi(T_0)$.

В дальнейшем температурное поле считаем усредненным по толщине k-го слоя, иначе нарушаются принятые геометрические гипотезы о прямолинейности нормалей в слоях. В этом случае значения упругих параметров постоянны внутри каждого слоя

$$G_k(T_k)\equiv G_k(T_{0k}),\; K_k(T_k)\equiv K_k(T_{0k}),$$
$$T_{0k}(t)=\frac{1}{h_k}\int_{h_k}T_k(z,\,t)\,dz.$$

Решение задачи термоупругости. Отметим, что температура в уравнения равновесия (8) не входит, поэтому можно воспользоваться ее аналитическим решением, полученным в [2] при изотермической нагрузке:

$$\begin{gathered}\psi(x)=C_2\,\mathrm{sh}(\beta x)+C_3\,\mathrm{ch}(\beta x)+\\ +\frac{1}{\beta}\left[\mathrm{sh}(\beta x)\int g(x)\,\mathrm{ch}(\beta x)dx-\mathrm{ch}(\beta x)\int g(x)\,\mathrm{sh}(\beta x)dx\right],\\ w(x)=\frac{1}{\alpha_2}\left[\alpha_1\int\psi\,dx-a_7L_3^{-1}(p)+a_1L_4^{-1}(q)+\frac{a_1C_1}{6}x^3\right]+\\ +\frac{C_4}{2}x^2+C_5x+C_6,\\ u(x)=\gamma_3\psi+\frac{1}{\alpha_2}\left[-a_4L_2^{-1}(p)+a_7L_3^{-1}(q)+\frac{a_7}{2}C_1x^2\right]+\\ +C_7x+C_8.\end{gathered}\tag{11}$$

Здесь и далее L_1^{-1}, L_2^{-1}, L_3^{-1}, L_4^{-1} — линейные интегральные операторы

$$\begin{gathered}L_1^{-1}(g)\equiv\int g\,dx,\;\; L_2^{-1}(g)\equiv\iint g\;dx\,dx,\\ L_3^{-1}(g)\equiv\iiint g\;dx\,dx\,dx,\\ L_4^{-1}(g)\equiv\iint\iint g\;dx\,dx\,dx\,dx,\\ g(x)=\gamma_2p+\gamma_1\left(\int q\;dx+C_1\right),\\ \beta^2=\frac{a_1a_5\alpha_2}{\alpha_2\alpha_3-\alpha_1^2}>0,\;\gamma_1=\frac{a_1\alpha_1}{\alpha_2\alpha_3-\alpha_1^2},\\ \gamma_2=\frac{a_6\alpha_2-a_7\alpha_1}{\alpha_2\alpha_3-\alpha_1^2},\;\gamma_3=\frac{a_3a_7-a_4a_6}{\alpha_2}.\end{gathered}\tag{12}$$

Константы интегрирования C_1, ..., C_8 определяются из граничных условий. В нашем случае температура в решении (11) учитывается параметрами жесткости слоев (9) и граничными условиями в силу зависимости внутренних (5) усилий от температуры.

Используя соотношения (5), получим конечные выражения обобщенной внутренней продольной силы и изгибающего момента (2) через перемещения (11) и температуру:

$$\begin{gathered}N=b_0\left(a_1u,_x+a_6\psi,_x-a_7w,_{xx}-3\sum_{k=1}^{3}K_k\alpha_k\int_{h_k}T_kdz\right),\\ M=b_0\left(a_7u,_x+a_3\psi,_x-a_4w,_{xx}-3\sum_{k=1}^{3}K_k\alpha_k\int_{h_k}T_kzdz\right).\end{gathered}\tag{13}$$

Рассмотрим два вида закрепления торцов стержня. В случае жесткой заделки левого конца стержня при свободном правом торце граничные условия следующие:

$$\begin{gathered}x=0:\quad w=w,_x=u=\psi=0,\\ x=l:\quad M=M,_x=N=\psi=0.\end{gathered}\tag{14}$$

Подставив решение (11) в условия (14), учитывая (13), получим систему линейных алгебраических уравнений для определения констант C_1, ..., C_8. После ее решения имеем:

$$\begin{gathered}C_1=-L_1^{-1}(q)\big|_{x=l},\; C_3=\frac{1}{\beta}\int g(x)\,\mathrm{sh}(\beta x)dx\big|_{x=0},\\ C_2=\frac{1}{\beta}\left[\frac{\mathrm{ch}(\beta l)}{\mathrm{sh}(\beta l)}\left(\int g(x)\,\mathrm{sh}(\beta x)dx\big|_{x=l}-\right.\right.\\ \left.\left.-\int g(x)\,\mathrm{sh}(\beta x)dx\big|_{x=0}\right)-\int g(x)\,\mathrm{ch}(\beta x)dx\big|_{x=l}\right],\\ C_4=\frac{a_7}{\alpha_2}\left(L_1^{-1}(p)\big|_{x=l}+3\sum_{k=1}^{3}K_k\alpha_k\int_{h_k}T_kdz\right)-\\ -\frac{a_1}{\alpha_2}\left(L_2^{-1}(q)\big|_{x=l}+3\sum_{k=1}^{3}K_k\alpha_k\int_{h_k}T_kzdz\right)-\frac{a_1}{\alpha_2}C_1l,\\ C_5=\frac{a_7}{\alpha_2}L_2^{-1}(p)\big|_{x=0}-\frac{a_1}{\alpha_2}L_3^{-1}(q)\big|_{x=0},\\ C_6=\frac{a_7}{\alpha_2}L_3^{-1}(p)\big|_{x=0}-\frac{a_1}{\alpha_2}L_4^{-1}(q)\big|_{x=0}-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\int\psi\,dx\big|_{x=0},\\ C_7=\frac{a_4}{\alpha_2}\left(L_1^{-1}(p)\big|_{x=l}+3\sum_{k=1}^{3}K_k\alpha_k\int_{h_k}T_kdz\right)-\\ -\frac{a_7}{\alpha_2}\left(L_2^{-1}(q)\big|_{x=l}+3\sum_{k=1}^{3}K_k\alpha_k\int_{h_k}T_kzdz\right)-\frac{a_7}{\alpha_2}C_1l,\\ C_8=\frac{a_4}{\alpha_2}L_2^{-1}(p)\big|_{x=0}-\frac{a_7}{\alpha_2}L_3^{-1}(q)\big|_{x=0}.\end{gathered}\tag{15}$$

Для шарнирно опертого по обоим торцам стержня граничные условия принимают вид:

$$x = 0; l: \quad w = M = u = \psi = 0. \qquad (16)$$

Им удовлетворяют следующие константы интегрирования:

$$C_1 = \frac{1}{l}\left(L_2^{-1}(q)\big|_{x=0} - L_2^{-1}(q)\big|_{x=l}\right),$$

$$C_4 = \frac{a_7}{a_4}\left(D_1\big|_{x=0} - D_1\big|_{x=l}\right) - $$

$$-\frac{1}{a_4}\left(L_2^{-1}(q)\big|_{x=0} + 3\sum_{k=1}^{3} K_k\alpha_k \int_{h_k} T_k z dz\right),$$

$$C_5 = D_2\big|_{x=0} - D_2\big|_{x=l} - \frac{a_7 l}{2a_4}\left(D_1\big|_{x=0} - D_1\big|_{x=l}\right) -$$

$$-\frac{l}{2a_4}\left(L_2^{-1}(q)\big|_{x=0} + 3\sum_{k=1}^{3} K_k\alpha_k \int_{h_k} T_k z dz\right), \qquad (17)$$

$$C_7 = D_1\big|_{x=0} - D_1\big|_{x=l},$$

$$D_1 = \frac{a_7}{l\alpha_2} L_3^{-1}(q) -$$

$$-\frac{a_7 l}{2\alpha_2}\left(L_2^{-1}(q) + 3\sum_{k=1}^{3} K_k\alpha_k \int_{h_k} T_k z dz\right) - \frac{a_4}{l\alpha_2} L_2^{-1}(p),$$

$$D_2 = \frac{a_1}{l\alpha_2}\left(\int \psi\, dx + L_4^{-1}(q)\right) -$$

$$-\frac{a_1 l}{6\alpha_2}\left(L_2^{-1}(q) + 3\sum_{k=1}^{3} K_k\alpha_k \int_{h_k} T_k z dz\right) - \frac{a_7}{l\alpha_2} L_3^{-1}(p).$$

Константы C_2, C_3, C_6, C_8 сохраняют свой предыдущий вид (15).

В случае действия постоянных нагрузок $q = \text{const}$, $p = \text{const}$ и при консольном закреплении стержня из (11), (15) получаем:

$$\psi = C_2 \operatorname{sh}(\beta x) + C_3 \operatorname{ch}(\beta x) - \frac{1}{\beta^2}\left(\gamma_2 p + \gamma_1 q(x - l)\right),$$

$$u = \gamma_3 \psi + \frac{1}{\alpha_2}\left[-\tfrac{1}{2} a_4 p x^2 + \tfrac{1}{6} a_7 q x^3 - \tfrac{1}{2} a_7 q l x^2\right] + C_7 x, \qquad (18)$$

$$w = \frac{1}{\alpha_2}\left[\alpha_1 \int \psi dx - \tfrac{1}{6} a_7 p x^3 + \tfrac{1}{6} a_1 q x^3\left(\tfrac{1}{4} x - l\right)\right] + \tfrac{1}{2} C_4 x^2 + C_6,$$

где

$$\int \psi\, dx = \frac{1}{\beta}\left(C_2 \operatorname{ch}(\beta x) + C_3 \operatorname{sh}(\beta x)\right) -$$

$$-\frac{x}{\beta^2}\left(\gamma_2 p + \gamma_1 q\left(\tfrac{1}{2} x - l\right)\right),$$

$$C_2 = \frac{1}{\beta^2 \operatorname{sh}(\beta l)}\left[\gamma_2 p\left(1 - \operatorname{ch}(\beta l)\right) + \gamma_1 q l \cdot \operatorname{ch}(\beta l)\right],$$

$$C_3 = \frac{1}{\beta^2}\left[\gamma_2 p - \gamma_1 q l\right],$$

$$C_4 = \frac{1}{\alpha_2}\left[a_7\left(pl + 3\sum_{k=1}^{3} K_k\alpha_k \int_{h_k} T_k dz\right) + \right.$$

$$\left. + a_1\left(\frac{q l^2}{2} - 3\sum_{k=1}^{3} K_k\alpha_k \int_{h_k} T_k z dz\right)\right],$$

$$C_6 = -\frac{\alpha_1}{\beta\alpha_2} C_2,$$

$$C_7 = \frac{1}{\alpha_2}\left[a_4\left(pl + 3\sum_{k=1}^{3} K_k\alpha_k \int_{h_k} T_k dz\right) + \right.$$

$$\left. + a_7\left(\frac{q l^2}{2} - 3\sum_{k=1}^{3} K_k\alpha_k \int_{h_k} T_k z dz\right)\right].$$

Таким образом, выражения (11)—(18) дают аналитическое решение задачи о деформировании термоупругого трехслойного стержня при различных видах граничных условий.

Числовые результаты получены для трехслойного стержня, слои которого выполнены из материалов Д16Т-фторопласт-Д16Т. Термомеханические характеристики этих материалов приведены в таблицах 1, 2. Параметры слоев: $h_1 = h_2 = 0{,}03$; $c = 0{,}09$; интенсивность распределенной нагрузки $q = -0{,}15$ МПа; $p = 0$. Температуру принимаем одинаковой во всех слоях стержня.

На рисунках 2, 3 показано изменение вдоль оси консольно закрепленного стержня прогиба w, относительного сдвига ψ: *1* — изотермический изгиб (T_1 = 293 K); *2* — термосиловое нагружение (T_2 = 343 K); *3* — термосиловое нагружение (T_2 = 393 K). Нагревание стержня на 50 K приводит к увеличению прогиба и сдвига на 68–71 % по сравнению с изотермическим деформированием. При нагревании на 100 K подобное увеличение достигнет 132–138 %.

Распределение по поперечному сечению $x = 0$ линейной деформации ε_{xx} и нормальных напряжений σ_{xx} показан на рисунках 4, 5. Нумерация кривых прежняя. Деформации на склейках слоев непрерывны, при нагревании стержня графики смещаются практически параллельно в положительную область. Напряжения достигают максиму-

Таблица 1 — Термомеханические характеристики сплава Д16Т

Параметр	Значение	Параметр	Значение
G(0), МПа	0,3075 · 10^5	α_0, 1/K	24,3 · 10^{-6}
K(0), МПа	0,9214 · 10^5	$\boldsymbol{T_0}$, K	293
$\boldsymbol{G_0}$, МПа	0,267 · 10^5	$\boldsymbol{T_m}$, K	933
$\boldsymbol{K_0}$, МПа	0,8 · 10^5		

Таблица 2 — Термомеханические характеристики политетрафторэтилена

Параметр	Значение	Параметр	Значение
G_0, МПа	90	γ	1,27
K_0, МПа	4700	T_m, K	600
B	24,44	α_0, 1/K	1,78 · 10^{-5}

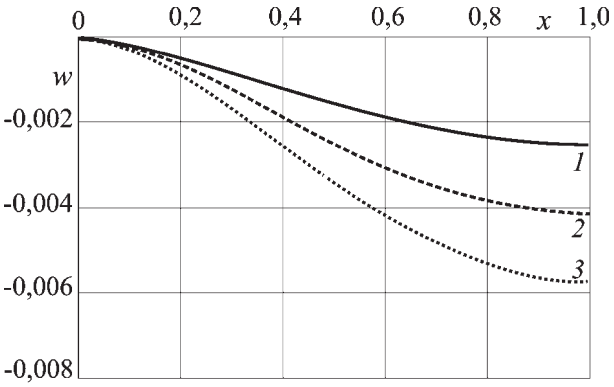

Рисунок 2 — Изменение прогиба вдоль оси стержня

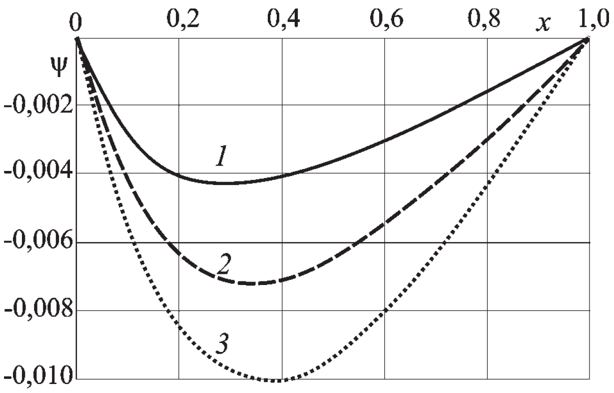

Рисунок 3 — Изменение сдвига в заполнителе вдоль оси стержня

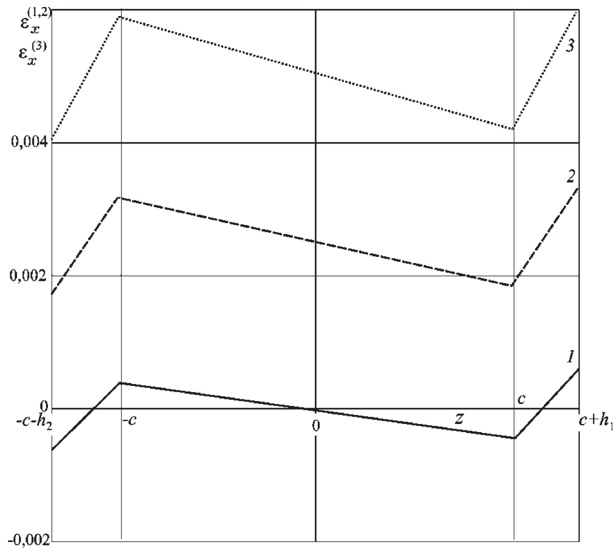

Рисунок 4 — Линейные деформации в поперечном сечении

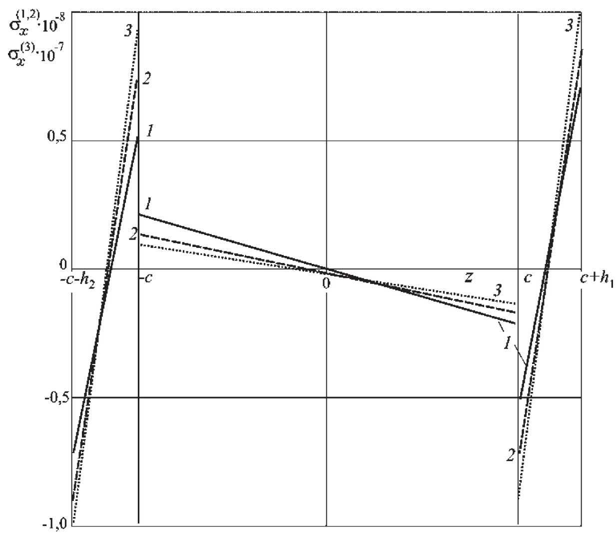

Рисунок 5 — Нормальные напряжения в поперечном сечении

ма в заделке. Воздействие температуры приводит к увеличению экстремумов напряжений во внешних слоях на 14–43 %, в заполнителе — на 20–60 %.

Выводы. Приведенная методика и решение краевой задачи позволяют проводить анализ напряженно-деформированного состояния трехслойного стержня при изгибе в температурном поле.

Список литературы

1. Ильюшин, А.А. Пластичность. Ч. 1. Упругопластические деформации / А.А. Ильюшин // М.: Гостехиздат, 1948. — 376 с.
2. Горшков, А.Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 576 с.
3. Плескачевский, Ю.М. Динамика круговых металлополимерных пластин на упругом основании. Ч. 1. Свободные колебания / Ю.М. Плескачевский, Э. И.Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. — 2008. — № 4 (5). — С. 48–51.
4. Старовойтов, Э.И. Развитие теории расчета слоистых конструкций / Э.И. Старовойтов, Е.П. Доровская // Механика машин, механизмов и материалов. — 2007. — № 1(1). — С. 48–52.
5. Leonenko, D.V. Thermoplastic strain of circular sandwich plates on en elastic base / D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // Mechanics of Solids. — 2009. — Vol. 44, No 5. — Pp. 744–755.
6. Starovoitov, E.I. Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // Mechanics of Solids. — 2011. — Vol. 46, № 2. — Pp. 291–298.
7. Cheng, Z. Theory for multilayered anisotropic plates with weakened interfaces / Cheng Z., Jemah A.K., Williams F.W. // Trans. ASME. J. Appl. Mech. — 1996. — 63, No 4. — Pp. 1019–1026.
8. Болотин, В.В. Механика многослойных конструкций / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков. — М.: Машиностроение, 1980. — 375 с.

Starovoitov E.I., Leonenko D.V.

Deformation of three-layer beam in a temperature field

The bending of three-layer elastic beam in a temperature field is considered. To describe kinematics of asymmetrical over thickness core pack the hypotheses of the broken normal are accepted. A system of equilibrium equations in terms of displacements has been derived. Analytical deciding of a problem is received and its numeric analysis is conducted.

Поступила в редакцию 20.01.2012.