



# ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

УДК 539:374.002.62

Ю.В. ВАСИЛЕВИЧ, д-р физ.-мат. наук  
Белорусский национальный технический университет, г. Минск

В.М. САХОНЕНКО, канд. физ.-мат. наук  
Московский государственный открытый университет, Россия

С.В. САХОНЕНКО, канд. физ.-мат. наук  
Белорусский национальный технический университет, г. Минск

К.А. ГОРЕЛЫЙ, канд. техн. наук; Е.В. МАЛЮТИН  
ОАО «Авангард», Россия

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВОЙСТВ ТКАНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ УКЛАДКЕ ИХ НА ВЫПУКЛЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

*Предложен способ укладки образцов тканей гладкого переплетения и мультиаксиальных тканей на выпуклые поверхности. Рассмотрен пример укладки квадратного образца ткани Т-13 на сферическую поверхность. Найдены размеры заготовки ткани, которая полностью покрывает шаровой сегмент.*

**Ключевые слова:** ткань, нить, деформация, семейство нитей, модель деформирования, сферическая поверхность

**Введение.** В современном производстве для композиционно-волокнутого материала (КМ) применяются наполнители, получаемые на основе: 1) пряжей или нитей, изготовленных из волокон в количестве более 1000 шт., а также ровниц; 2) тканей и 3) матов. В первом случае КМ получается путем послонной укладки семейств однонаправленных нитей. В результате получается слоистая структура направленных под углом  $\pm\phi$  семейств однонаправленных нитей, у которых отсутствует взаимное переплетение. Во втором случае рассматриваются ортотропные структуры из КМ, которые представляют собой многослойные среды на основе тканей.

**Постановка задачи.** Рассмотрим ткани гладкого переплетения, у которых переплетение нитей образовано без жесткой связи, и мультиаксиальные ткани. Такие тканые материалы создаются из нитей и первоначально обладают высокой гибкостью. Существуют две причины этой гибкости: 1) гибкость нитей, состоящих из тонких параллельных волокон, движению которых препятствует только трение между ними при деформировании; 2) структура ткани создается путем переплетения нитей или методом прошивки без жесткой связи в местах пе-

реплетения. Это означает, что перемещения отдельных нитей или волокон, вызванные усилиями, приложенными к ткани, имеют свойства, аналогичные свойствам тела с подвижной структурой [1].

**Метод решения.** Описывая геометрическую модель препрегов, будем рассматривать деформации, не выходящие за рамки слоев в поперечном направлении. На этом основании деформационные свойства одного слоя ткани можно отождествлять с аналогичными свойствами многослойного препрега. Обратим внимание на те свойства, которые понадобятся в дальнейшем.

1. Существует предельное значение длины нити, которую можно вытащить из ткани, не подвергая ее разрыву. Для тканей гладкого переплетения, например, у стеклоткани Т-13, эта величина составляет более одного метра.

2. Конструкция тканей гладкого переплетения предусматривает изгиб нитей в узлах их переплетения. Такое обстоятельство влияет на деформационные свойства нитей в составе ткани при растяжении. Первоначально они распрямляются. В дальнейшем нити ведут себя как обычно: они упруго растягиваются. Первая стадия заканчивается быстро при небольшой по величине нагрузке. Однако эта состав-

ляющая деформации по величине может превзойти даже упругую составляющую [2], поэтому пренебрегать этим нельзя. Назовем эту деформацию неупругой составляющей деформации ткани при растяжении и обозначим через  $\gamma_{11}$  и  $\gamma_{22}$  относительные неупругие составляющие деформации ткани в направлении первого и второго семейств нитей соответственно. Для мультиаксиальных тканей такая составляющая деформации равна нулю.

3. Если под действием внешних сил происходит сдвиг нитей одного семейства относительно другого, то такая деформация сопровождается сжатием нитей в поперечном к ним направлении. Само сжатие осуществляется следующим образом. Вначале деформация сжатия происходит за счет более плотного расположения элементарных нитей в рассматриваемом сечении нити. Уменьшаются параметры сечения. Одновременно нити параллельно сдвигаются. Препятствием к таким изменениям являются только силы трения. Дальнейшее перемещение нитей осуществляется только за счет упругой деформации. Таким образом, на первом этапе сжатия имеем неупругие деформации сжатия в плоскости ткани. При этом относительные неупругие составляющие деформации сжатия  $\gamma_{12}$  и  $\gamma_{21}$  первого и второго семейств нитей — это чисто геометрические величины, характеризующие степень уплотнения нитей при их сжатии в поперечных к ним направлениях в плоскости ткани [3].

Рассмотренное сжатие нитей может образовываться и другим путем — в результате поворота одного семейства нитей относительно второго. Такое сжатие тоже имеет неупругую составляющую и упругую часть. При деформации ткани оба эти вида сжатия могут присутствовать одновременно, причем они не заменяют друг друга [4].

Пусть имеем заготовку ткани, которую необходимо уложить на некоторую выпуклую поверхность без складок так, чтобы она соприкасалась с поверхностью. Принципиально это можно сделать следующим образом. Если ткань обладает свойствами 1–3, то, прикладывая к концам нитей растягивающие усилия, мы заставим их лежать на заданной поверхности. В результате заготовка полностью ляжет на поверхность, не образуя складок. Такое положение нитей на поверхности неоднозначно, так как они могут быть передвинуты на другое место. Варьируя нагрузку, при определенных условиях можно изменять форму заготовки. Такой способ укладки заготовки имеет множество вариантов. Для выбора нужного необходимо установить дополнительные ограничения. Например, можно определить форму заготовки, которую она должна иметь после укладки ее на поверхности, что эквивалентно заданию перемещения концов нитей, или граничных условий в перемещениях. Натяжение нитей должно осуществляться в соответствии с выбранным направлением и быть таким, чтобы обеспечить заданное перемещение концов

нитей. Однако следует заметить, что не для всяких граничных условий это возможно. Такие деформации заготовки сопровождаются возникновением растягивающих усилий во всех точках нитей, сжимающих усилий в нитях в поперечном направлении к ним или отсутствием сжимающих усилий, если поперечные деформации имеют противоположные направления, приводящие к разреживанию ткани. В последнем случае нити на поверхности удерживаются в равновесии силами трения.

Деформация заготовки сопровождается смещением одного семейства нитей по отношению к другому. Поэтому, если ткань состоит из двух взаимно-перпендикулярных между собой семейств нитей, то тогда нити  $x = const$  и  $y = const$  после деформации пересекутся в точках, имеющих координаты  $(x, y_1)$  и  $(x_1, y)$  в исходном состоянии. Это означает некоторую независимость перемещений нитей одного семейства относительно второго. В таком случае, вычисления перемещений следует проводить в отдельности для нитей каждого семейства.

Рассмотрим деформацию нитей первого семейства. В качестве объектов изучения деформаций возьмем линии, совпадающие с нитями семейств, а также линии, перпендикулярные во всех точках к нитям семейств. При деформации первые линии находятся в растянутом состоянии, а вторые — в сжатом в поперечном направлении.

Будем проводить дальнейшие рассуждения для поверхности в форме сферы. Однако это никак не отразится на общности результатов исследования. Все проведенные рассуждения могут быть трансформированы при укладке ткани на другие выпуклые поверхности.

Рассмотрим сферическую поверхность, на которой необходимо разместить квадратную заготовку ткани. Начало декартовой системы координат  $Oxuz$  совместим с центром сферы (рисунок 1).

При этом взаимно-перпендикулярные стороны заготовки направим вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$ . Возьмем в этом положении заготовки некоторую точку  $M$ , принадлежащую нитям первого семейства (например, основы). Считая систему  $Oxuz$  неподвижной, введем в плоскости  $Oxy$  текущую систему координат  $Ox_1y_1$ . При этом координату  $x_1$  свяжем с линиями сжатия в поперечном сечении к плоскости заготовки нитей первого семейства. Тогда на рисунке 1 нить первого семейства длиной  $du$  займет на сфере положение  $M'P'$ , а линия сжатия  $MQ$  длиной  $dx_1$  займет на сфере положение  $M'Q'$ . Так как нити по предположению абсолютно гибкие, то касательные к кривым  $M'P'$  и  $M'Q'$  в точке  $M'$  должны составлять между собой прямой угол.

Точка  $M'$  имеет сферические координаты равные  $(\theta, \varphi)$ . Спроектируем ее на плоскость  $Oxy$  так, чтобы  $M'N = M''N$ . Здесь  $M'N$  — касательная к меридиану  $M'K$ . Аналогичные проекции  $P''$  и  $Q''$  получим и для точек  $P'$  и  $Q'$ . Таким образом, будем считать, что точки  $M'', P''$  и  $Q''$  получены в резуль-

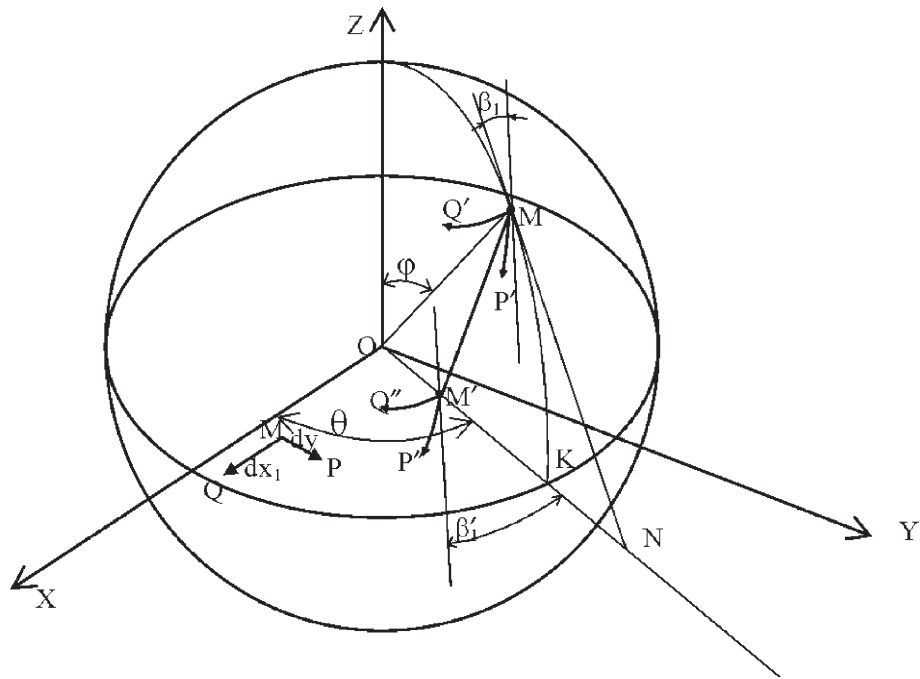


Рисунок 1 — Схема расположения точек заготовки ткани на поверхности сферы

тате промежуточного деформирования тканой заготовки на плоскости  $Ox_1y$ .

Между точками  $M'$  и  $M''$  можно установить взаимно-однозначное соответствие. Действительно, если на плоскости  $Ox_1y$   $(r, \theta)$  — полярные координаты точки  $M''$ , то справедливо равенство

$$R^2 + (M''N)^2 = (r + M''N)^2, \quad 0 \leq r \leq R. \quad (1)$$

Из (1) следует, что

$$M''N = \frac{R^2 - r^2}{2r}, \quad \varphi = \arccos \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2}, \quad (2)$$

где  $R$  — радиус сферической оболочки.

Таким образом, точке  $M''$  с координатами  $(r, \theta)$  на плоскости  $Ox_1y$  соответствует единственная точка  $M'$  на сфере, имеющая сферические координаты  $(\theta, \varphi)$ .

Для изучения деформационного поведения нитей рассмотрим, как деформируется элемент нитей первого семейства  $dx_1 \times dy$ , имеющий угловую точку с координатами  $(x_1, y)$ . Этот элемент может растягиваться в направлении размера  $dy$  и сжиматься в направлении размера  $dx_1$ . Такое поведение элемента нитей происходит при укладке его на сферическую поверхность. Будем считать, что растягивающая нагрузка такова, что относительные деформации в любой нити семейства и любой точке нити равны  $\gamma_{11}$ . Упругими деформациями нитей пренебрегаем. Тогда

$$(1 + \gamma_{11})dy = ds'_{11}, \quad (3)$$

где  $ds'_{11}$  — длина дуги  $M'P'$ . Для дуги  $M'Q'$ , представляющей собой часть линии сжатия, отрезок  $dx_1$  связан зависимостью

$$(1 - \gamma_1)dx_1 = ds'_{12}, \quad (4)$$

причем  $\gamma_1 \leq \gamma_{12}$ . (здесь  $\gamma_1$  — фактическое значение относительного сжатия нитей в рассматриваемой

точке  $M'$ );  $ds'_{12}$  — длина дуги  $M'Q'$ . Упругими деформациями сжатия пренебрегаем.

Пусть  $\vec{r}_1 = \vec{OM}''$  (см. рисунок 1). Установим зависимости для дуг  $ds'_{11}$  и  $ds'_{12}$ . Для этого заметим, что  $Rd\varphi$  — проекция дуги  $ds'_{11}$  на меридиан, а  $dr_1$  — проекция дуги  $ds'_{12}$  на направление вектора  $\vec{r}_1$ . На перпендикулярное направление к меридиану и к вектору  $\vec{r}_1$  проекции этих дуг равны  $-R\sin\varphi d\theta$  и  $-r_1 d\theta$  ( $d\theta < 0$ ). В таком случае имеем

$$\begin{aligned} ds'_{11} \cos \beta_1 &= Rd\varphi, & -ds'_{11} \sin \beta_1 &= R\sin\varphi d\theta, \\ ds'_{12} \cos \beta'_1 &= dr_1, & -ds'_{12} \sin \beta'_1 &= r_1 d\theta, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\beta_1$  и  $\beta'_1$  — углы, которые составляют касательные к дугам в точках  $M'$  и  $M''$  с меридианом и с направлением радиуса  $\vec{r}_1$  соответственно.

Из соотношений (5) найдем

$$-ctg\beta_1 d\theta = \frac{d\varphi}{\sin\varphi}, \quad -ctg\beta'_1 d\theta = \frac{dr_1}{r_1}. \quad (6)$$

Если воспользуемся выражением (2) для  $\varphi$ , то установим, что

$$d\varphi = \frac{2Rdr_1}{R^2 + r_1^2}, \quad \sin\varphi = \frac{2r_1R}{R^2 + r_1^2}, \quad \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \frac{dr_1}{r_1}. \quad (7)$$

Таким образом, из равенства правых частей выражений (6) следует, что  $\beta'_1 = \beta_1$ .

Аналогичные зависимости для дуг  $ds'_{12}$  и  $ds''_{12}$  имеют выражения

$$\begin{aligned} ds'_{12} \cos \gamma_1 &= Rd\varphi', & -ds'_{12} \sin \gamma_1 &= R\sin\varphi d\theta', \\ ds''_{12} \cos \gamma'_1 &= dr'_1, & -ds''_{12} \sin \gamma'_1 &= r_1 d\theta', \end{aligned} \quad (8)$$

где дифференциалы  $d\theta'$  и  $dr'_1$  отличаются от дифференциалов  $d\theta$  и  $dr_1$  в силу независимости дифференциалов  $d\theta$  и  $d\theta'$ .

Поступая аналогичным образом, как и выше, установим, что  $\gamma'_1 = \gamma_1$ . Кроме того, линии растяжения и линии сжатия на поверхности сферы взаимно перпендикулярны. В таком случае должно быть  $\gamma_1 = \beta_1 - 0,5\pi$ .

Примем за независимые переменные параметры  $\theta$  и  $x_1$ . Тогда  $r_1, \beta_1, s'_{11}, s'_{12}, s''_{11}, s''_{12}$  будут выражаться как функции этих независимых переменных. В таком случае система (5) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s'_{11}}{\partial \theta} \cos \beta_1 &= \frac{2R^2}{R^2 + r_1^2} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial \theta}, \\ -\frac{\partial s'_{11}}{\partial \theta} \sin \beta_1 &= \frac{2R^2}{R^2 + r_1^2} \cdot r_1, \\ \frac{\partial s''_{11}}{\partial \theta} \cos \beta_1 &= \frac{\partial r_1}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (9)$$

Система (9) состоит из трех уравнений, так как четвертое уравнение из (5) является линейной комбинацией остальных.

Аналогично, система (8) эквивалентна следующим зависимостям

$$\begin{aligned} \frac{\partial s'_{12}}{\partial \theta} \sin \beta_1 &= \frac{2R^2}{R^2 + r_1^2} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial \theta}, \\ -\frac{\partial s'_{12}}{\partial \theta} \cos \beta_1 &= \frac{2R^2}{R^2 + r_1^2} \cdot r_1, \\ \frac{\partial s''_{12}}{\partial \theta} \sin \beta_1 &= \frac{\partial r_1}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (10)$$

Если в зависимостях (9) и (10) сделаем замену параметров  $r_1, \beta_1, s'_{11}, s'_{12}, s''_{11}, s''_{12}$  на параметры  $r_2, \beta_2, s'_{21}, s'_{22}, s''_{21}, s''_{22}$ , то получим систему уравнений для определения условий укладки нитей второго семейства на поверхность сферы. Следует отметить, что уравнения, относящиеся к нитям первого семейства, и уравнения для нитей второго семейства не связаны между собой. Существует только геометрическая связь, которая устанавливает ограничение на значение угла между нитями семейств при их укладке на выпуклую поверхность. Как отмечалось: поворот нитей сопровождается их сжатием. Поэтому неупругая часть сжатия заканчивается при угле равном  $\alpha_0$ . Дальнейшее уменьшение этого угла невозможно, так как упругая деформация сжатия и свободная укладка образцов ткани на выпуклой поверхности несовместимы. Поэтому критерием укладки образцов является выполнение условия  $|\alpha| > \alpha_0$ , где  $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ ;  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — углы, которые составляют касательные к соответствующим нитям в рассматриваемой точке.

Для решения поставленной задачи зададимся граничными условиями. Первоначально потребуем, чтобы заготовка ткани располагалась в координатной системе  $Ox_1y$  так, чтобы семейства нитей были параллельны осям координат. Во-вторых, каждая из семейств нитей при укладке их на поверхность сферы деформируется одинаково. В-третьих, длина каждой нити, расположенной в любой четверти ко-

ординатной системы после деформации становилась равной  $0,5(1 + \gamma_{11})a$ , где  $a$  — длина стороны квадратного образца ткани. В-четвертых, направление концов нитей  $a_1$  должно иметь величину равную

$$\alpha_1 = m \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) + \theta, \quad (11)$$

где  $m = \frac{2\alpha_0}{\pi}$ . Такое нагружение образца ткани позволяет ожидать, что минимальное значение угла  $|\alpha| \geq \alpha_0$ . В результате, с учетом симметрии, достаточно рассмотреть деформацию нитей, расположенных в исходном состоянии в первой четверти координатной системы  $Ox_1y$ .

С учетом (11) угол  $\beta_1$ , на границе образца ткани будет равен

$$\beta_{10} = \alpha_1|_{\theta=\theta_0} - \theta_0 = m \left( \frac{\pi}{2} - \theta_0 \right), \quad (12)$$

где  $\beta_{10}$  и  $\theta_0$  — значения углов  $\beta_1$  и  $\theta$  на границе образца.

Следует предположить, что значение угла  $\beta_1$  может иметь представление (12) не только в концевых точках нитей. Пусть для остальных точек такая зависимость представима в виде:

$$\beta_1 = m \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right). \quad (13)$$

В таком случае из (9) найдем

$$\frac{\partial \ln r_1}{\partial \theta} = -ctg \beta_1 = -ctgm \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right).$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$r_1 = f(x_1) (\sin \beta_1)^{\frac{1}{m}}. \quad (14)$$

Для отыскания неизвестной функции  $f(x_1)$  обратимся ко второму уравнению из системы (9). В результате, с учетом (13), получим

$$\begin{aligned} s_0 &= \int_0^{s_0} ds'_{11} = 0,5(1 + \gamma_{11})a = \\ &= \frac{2R^2}{m} \int_0^{\beta_{10}} \frac{f(x_1) (\sin \beta_1)^{\frac{1}{m}-1} d\beta_1}{R^2 + f^2(x_1) (\sin \beta_1)^{\frac{2}{m}}}, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $s_0$  — значение  $s'_{11}$  в граничных точках  $\theta_0$ ;  $\frac{\pi}{4} \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}$ .

Можно найти и другие параметры, используя для этого уравнения (9) и (10). На этом основании (13) является решением поставленной задачи с заданными граничными условиями при условии, что оно единственно. Для доказательства этого факта предположим, что имеется два решения  $\beta_1$  и  $\beta'_1$ , такие, что они отличаются друг от друга во всех точках, кроме граничных, в которых

$$\beta_1 = \beta'_1 = \beta_{10}. \quad (16)$$

Оба эти решения должны удовлетворять второму уравнению из (9). На этом основании имеем

$$s_0 = -2R^2 \int_{0,5\pi}^{\theta_0} \frac{r_1 d\theta}{\sin \beta_1 (R^2 + r_1^2)^{\frac{1}{2}}};$$

$$s_0 = -2R^2 \int_{0,5\pi}^{\theta_0} \frac{r_1' d\theta}{\sin \beta_1 (R^2 + (r_1')^2)},$$

где  $r_1'$  — значение радиуса  $r_1$ , вычисленного с использованием второго решения  $\beta_1'$ ; пределы интегрирования совпадают, поскольку на границе выполняются (16).

Произведя вычитание правых и левых частей предыдущих равенств, найдем

$$\int_{0,5\pi}^{\theta_0} \left[ \frac{r_1}{\sin \beta_1 (R^2 + r_1^2)} - \frac{r_1'}{\sin \beta_1' (R^2 + (r_1')^2)} \right] d\theta = 0. \quad (17)$$

Воспользуемся свойством определенного интеграла (теорема о среднем) для непрерывной функции  $f(x)$ , которое иллюстрируется в виде следующей зависимости [5]

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(c), \quad a < c < b.$$

В случае равенства нулю интеграла следует равенство нулю функции  $f(x)$  в точке  $c$ . На этом основании равенство нулю подинтегральной функции интеграла (17) приводит к следующей зависимости

$$r_1 [R^2 + (r_1')^2] \sin \beta_1' = r_1' (R^2 + r_1^2) \sin \beta_1. \quad (18)$$

Равенство (18) выполняется в точке  $\theta_0'$  для любых  $\theta_0$ , причем

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta_0 < \theta_0' \leq \frac{\pi}{2}.$$

В таком случае в силу непрерывности подинтегральной функции интеграла (17) равенство (18) справедливо для всех  $\theta_0'$  из промежутка

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta_0' \leq \frac{\pi}{2}.$$

Возведя в квадрат обе части равенства (18) и применяя к полученному равенству обратную теорему о среднем, получим

$$\int_0^{\beta_{10}} \left( r_1^2 [R^2 + (r_1')^2] \sin^2 \beta_1' - (r_1')^2 (R^2 + r_1^2) \sin^2 \beta_1 \right) d\theta_0' = 0. \quad (19)$$

Обратимся теперь ко второму уравнению системы (10). Поступая аналогичным образом, как и при выводе (18) найдем

$$r_1 [R^2 + (r_1')^2] \cos \beta_1' = r_1' (R^2 + r_1^2) \cos \beta_1. \quad (20)$$

При выводе равенства (20) также предполагалось, что пределы интегрирования в интегралах совпадают, поскольку на границе образца, где  $x_1 = 0,5a$ , выполняется равенство (16).

Аналогично (19), из (20) найдем

$$\int_0^{\beta_{10}} \left( r_1^2 [R^2 + (r_1')^2] \cos^2 \beta_1' - (r_1')^2 (R^2 + r_1^2) \cos^2 \beta_1 \right) d\theta_0' = 0. \quad (21)$$

Складывая (19) и (21), получим

$$\int_0^{\beta_{10}} \left( r_1^2 [R^2 + (r_1')^2] - (r_1')^2 (R^2 + r_1^2) \right) d\theta_0' = 0.$$

К последнему равенству применим теорему о среднем. В результате в некоторой точке  $\theta_0' = \theta_0''$ , где  $0,25\pi < \theta_0'' < \theta_0$ , имеет место следующее равенство

$$r_1^2 [R^2 + (r_1')^2] = (r_1')^2 (R^2 + r_1^2).$$

Полученное равенство эквивалентно следующей зависимости

$$(r_1 - r_1') (R^2 - r_1 r_1') = 0.$$

Последнее равенство выполняется, если  $r_1 = r_1'$  во всех точках рассматриваемой области изменения параметров  $\theta$  и  $x_1$ . В таком случае на основании (18) следует, что  $\beta_1 = \beta_1'$ . Таким образом, единственность решения (13) доказана.

Интегральное уравнение (15) предназначено для отыскания функции  $f(x_1)$ . Для его решения поступим следующим образом. Применяя теорему о среднем к интегралу (15), получим

$$s_0 = \frac{2R^2 \beta_{10}}{m \sin \beta_1'} \cdot \frac{f(x_1) (\sin \beta_1')^{\frac{1}{m}}}{R^2 + f^2(x_1) (\sin \beta_1')^{\frac{2}{m}}}, \quad (22)$$

где  $\beta_1'$  — значение угла  $\beta_1$  из промежутка  $(0, \beta_{10})$ .

Зависимость (22) представляет собой квадратное уравнение относительно выражения  $f(x_1) (\sin \beta_1')^{\frac{1}{m}}$ . Из условия о единственности решения оно должно иметь единственное представление, поэтому дискриминант уравнения (22) равен нулю. Таким образом

$$\frac{R^4 (\beta_{10})^2}{m^2 s_0^2 \sin^2 \beta_1'} - R^2 = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\sin \beta_1' = \frac{R \beta_{10}}{m s_0}.$$

В таком случае из (22) с использованием (12) найдем

$$f(x_1) = R \left[ \frac{s_0}{R(0,5\pi - \theta_0)} \right]^{\frac{1}{m}}. \quad (23)$$

Отметим, что для укладки образца ткани на поверхность сферы достаточно знать расположение концов нитей заготовки на сферической поверхности. Для этого определим величину радиуса  $r_1$  в граничных точках. С учетом того, что на границе  $\theta = \theta_0$ , подставим (23) в (14). Отсюда, на границе области радиус  $r_1$  определяется зависимостью

$$r_1 = R \left[ \frac{s_0 \sin(0,5\pi - \theta_0)}{R(0,5\pi - \theta_0)} \right]^{\frac{1}{m}}. \quad (24)$$

В результате сферические координаты граничных точек заготовки ткани имеют вид  $(\theta, \varphi_1)$ , где

$$\varphi_1 = \arccos \frac{R^2 - r_1^2}{R^2 + r_1^2}, \quad (25)$$

где  $r_1$  — величина, определяемая зависимостью (23).

Расчеты проводились для заготовки из ткани Т-13 размером  $196 \times 196 \text{ мм}^2$ . При этом предполагалось, что  $\alpha_0 = 70^\circ$ ;  $\gamma_{11} = 0,01$ ;  $\gamma_{12} = 0,11$  [4]. Укладка осуществлялась на оправку, поверхность которой представляет собой сферу диаметром 196 мм, состыкованную с конической поверхностью. Заготовка ткани, уложенная на поверхность согласно расчетной схеме, демонстрируется на фотографии (рисунок 2).

Рассмотренное решение касалось укладки на поверхность квадратного образца ткани. В результате его положение на поверхности такое, как показано на рисунке 2. Определим теперь размеры другого образца, который полностью покрывает шаровой сегмент при укладке его на сферическую поверхность. Очевидно, в исходном положении такой образец отличается от квадратного, у которого значение угла  $\varphi_1$  на границе переменено. Для шарового сегмента угол  $\varphi_1$  на границе постоянен. В этом случае из (25) следует постоянство радиуса  $r_1$ . В результате из соотношения (25) находим

$$r_1 = R \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2},$$

где  $\varphi_1$  — величина угла шарового сегмента для граничных точек образца. Длину  $s_0$  находим из соотношения (24). При этом

$$s_0 = \frac{R(0,5\pi - \theta_0)}{\sin(0,5\pi - \theta_0)} \left( \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \right)^m.$$

Заготовка в этом случае представляет собой образец, который имеет форму, указанную на рисунке 3.



Рисунок 2 — Положение образца ткани на поверхности сферы

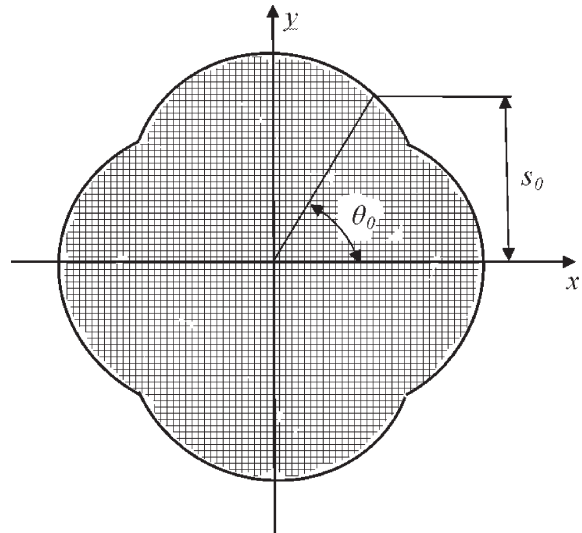


Рисунок 3 — Образец ткани

**Выводы.** 1. Большое разнообразие граничных условий приводит к такому же множеству решений при укладке образцов тканей гладкого переплетения и мультиаксиальных на выпуклые поверхности. В то же время при заданных граничных условиях существует единственное решение.

2. Предложенная методика укладки ткани на выпуклые поверхности совпадает с экспериментальными исследованиями.

#### Список литературы

1. Тканые конструкционные композиты: перевод с англ. / под ред. Т.-В. Чу и Ф. Ко. — М: Мир, 1991. — 432 с., ил.
2. Постоянные слагаемые закона Гука / В.М. Сахоненко [и др.] // Тенденции развития современной науки: сб. научных статей. — Волоколамск. — 2011. — С. 35–40.
3. Теоретические и экспериментальные исследования по определению неупругой составляющей сжатия ткани Т-13 / Ю.В. Василевич [и др.] // Механика машин, механизмов и материалов. — 2011. — № 4(17). — С. 63–65.
4. Способ определения неупругой составляющей при сжатии неутвержденного композиционно-волокнистого материала: пат. РФ, RU 2452951 C1 / В.М. Сахоненко, К.А. Горелый, Е.В. Малютин, С.В. Сахоненко, И.В. Зубак; заявитель ОАО «Авангард». — № 2011117792/15 // Бюл. № 16 / Федеральная служба по интеллектуальной собственности. — 2012. — № 6. — С. 124.
5. Демидович, Б.П. Краткий курс высшей математики: учеб. пособие для вузов / Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. — М.: Изд-во Астрель; Изд-во АСТ, 2004. — 654.

Vasilevich Y.V., Sakhonenko V.M., Sakhonenko S.V., Gorely K.A., Malyutin E.V.

#### Usage of textile material properties while laying them on a convex surface

The method of laying a smooth woven textiles and multiaxial fabrics on a convex surfaces is proposed. An example of a square tissue T-13 sample placement on a spherical surface is considered. The dimensions of a tissue work piece completely covering spherical segment are found.

**Keywords:** fabrics, strand, deformation, family of stands, deformation model, spherical surface

Поступила в редакцию 14.03.2013.