

УДК 539.3

У.Е. ОГОРОДНИК; В.И. ГНИТЬКО, канд. техн. наук  
Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного, г. Харьков, Украина**МЕТОДЫ ГРАНИЧНЫХ И КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ  
ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ОБОЛОЧЕК С ЖИДКОСТЬЮ**

*В данной статье представлен численный метод для анализа колебаний оболочек с жидкостью, основанный на совместном использовании метода конечных и граничных элементов. Были получены численные результаты для цилиндрических и конических оболочек с жидкостью, как при условии отсутствия действия вынуждающей силы (свободные колебания), так и при заданных внешних динамических воздействиях (вынужденные колебания). Для цилиндрических оболочек было проведено исследование влияния уровня заполнения жидкостью. А для конических оболочек было проведено несколько расчетов с различными углами наклона конуса и исследовано их влияние на перемещение оболочки.*

**Ключевые слова:** свободные колебания, вынужденные колебания, взаимодействие жидкости с оболочкой, метод граничных и конечных элементов

**Введение.** В различных областях инженерной практики, таких как авиастроение, химическая промышленность, энергетическое машиностроение, широко используются элементы конструкций в виде оболочек или тел вращения, которые функционируют в условиях повышенных технологических нагрузок и заполнены нефтью, легко воспламеняющимися или ядовитыми веществами. Детальный обзор различных математических моделей взаимодействия оболочек с жидкостью представлен в [1]. Динамический анализ оболочечных конструкций часто выполняется при помощи конечно-элементных программ. Но трехмерный нелинейный анализ с учетом взаимодействия жидкости является сложной и чрезвычайно трудоёмкой задачей. В [2–4] авторы предлагают подход, основанный на использовании метода граничных элементов для решения задач свободных колебаний оболочек вращения с жидкостью. Результаты исследований подытожены в [5]. В данной работе рассматривается связанная задача о свободных и вынужденных колебаниях оболочек с жидкостью. Для ее решения мы используем комбинацию методов конечных и граничных элементов. Данный метод решения состоит из нескольких этапов, каждый из которых представляет собой самостоятельную задачу. На первом этапе определяются частоты и формы колебаний оболочки в вакууме. Вектор перемещений, представляющий собой решение связанной гидродинамической задачи, ищется в виде линейной комбинации собственных форм колебаний оболочки в вакууме. На оболочку, кроме вынуждающей силы, действуют силы давления со стороны жидкости. Это давление также ищем в виде линейной комбинации решений краевых задач для уравнения Лапласа каждой моды колебаний. Определение давления жидкости для каждой моды представляет собой второй этап решения. Таким образом, приходим к системе дифференциальных уравнений второго поряд-

ка для решения задачи о вынужденных колебаниях оболочки, частично заполненной жидкостью. Третий этап решения связанной задачи состоит в численном решении полученной системы дифференциальных уравнений методом Рунге–Кутты.

**Постановка задачи.** Рассматривается связанная задача динамического поведения оболочки вращения, частично заполненной жидкостью. Предполагается, что жидкость идеальная, несжимаемая, а ее течение (индуцированное движением тела) является безвихревым. Матричное уравнение движения оболочки, частично заполненной жидкостью, запишем в виде

$$LU + M\ddot{U} = P_t + Q, \quad (1)$$

где  $L$ ,  $M$  — матрицы жесткости и масс;  $U = (u_1, u_2, u_3)$  — вектор-функция перемещений;  $Q(t)$  — вектор внешней нагрузки;  $P$  — гидродинамическое давление жидкости.

В случае потенциального движения можно представить давление жидкости в следующем виде

$$\frac{P}{\rho_l} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - gz + \frac{P_0}{\rho_l} - a_s(t)x, \quad (2)$$

где  $\varphi$  — потенциал скоростей;  $z$  — координата точки жидкости, отсчитываемая в вертикальном направлении;  $\rho_l$  — плотность жидкости;  $a_s(t)$  и  $g$  — горизонтальное сейсмическое ускорение и ускорение свободного падения.

Обозначим смоченную поверхность оболочки через  $S_1$ , а свободную поверхность —  $S_0$ . Пусть декартова система координат  $0xuz$  связана с оболочкой, свободная поверхность жидкости  $S_0$  совпадает с плоскостью  $xOy$  в состоянии покоя. Считаем, что резервуар с жидкостью подвергается динамическому воздействию. На смоченной поверхности упругой оболочки требуется выполнение условия непротекания, на свободной поверхности задаются динамическое и кинематическое граничные условия.

Таким образом, получаем следующую краевую задачу

$$LU + M\dot{U} + \rho_1\dot{\phi} + gz + a_s(t)x = Q;$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad P \in S_1;$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \zeta, \quad P \in S_0;$$

$$\phi + g\zeta + a_s(t) = 0, \quad P \in S_0$$

для определения неизвестных функций  $U$  и  $\phi$ .

**Метод решения.** Будем искать собственные формы колебаний оболочки в жидкости в следующем виде

$$U(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^m u_k(x, y, z) c_k(t), \quad (3)$$

где функции  $u_k(x, y, z)$  — собственные формы колебаний оболочки в вакууме;  $c_k(t)$  — неизвестные коэффициенты.

Потенциал скоростей  $\phi$  представим в виде суммы двух потенциалов  $\phi = \phi_1 + \phi_2$ . Для определения  $\phi_1$  сформулируем следующую краевую задачу:

$$\nabla^2 \phi_1 = 0; \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad P \in S_1; \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial t} = 0, \quad P \in S_0, \quad (4)$$

где  $w(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^m w_k(x, y, z) c_k(t)$ , функции  $w_k(x, y, z)$

— нормальные компоненты собственных форм колебаний пустой оболочки. Отметим, что из соотношения (2) и второго из уравнений (4) следует, что

$$\phi_1(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^m \phi_{1k}(x, y, z) \dot{c}_k(t). \quad (5)$$

Для определения функций  $\phi_{1k}$  имеем следующие краевые задачи:

$$\nabla^2 \phi_{1k} = 0; \quad \frac{\partial \phi_{1k}}{\partial n} = w_k, \quad P \in S_1; \quad \phi_{1k} = 0, \quad P \in S_0. \quad (6)$$

Потенциал  $\phi_2$  ищем в виде

$$\phi_2(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^n \phi_{2k}(x, y, z) \dot{d}_k(t);$$

где функции  $\phi_{2k}$  — собственные формы колебаний жидкости в жестком сосуде. Определим эти собственные формы. Предварительно рассмотрим задачу

$$\nabla^2 \phi = 0; \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, \quad P \in S_1; \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = \zeta, \quad P \in S_0; \quad (7)$$

$$\dot{\phi} + g\zeta = 0, \quad P \in S_0.$$

Последнее из уравнений (7) является динамическим условием на свободной поверхности. Дифференцируя это уравнение по  $t$ , приходим к уравнению для потенциала скоростей жидкости в жестком сосуде

$$\ddot{\phi} + g \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, \quad P \in S_0. \quad (8)$$

Решение этой задачи ищем в форме  $\phi(x, y, z, t) = e^{i\kappa t} \psi(x, y, z)$ . Потенциал  $\psi$ , описывающий свободные гармонические колебания жидкости, является решением следующей краевой задачи:

$$\nabla^2 \psi = 0; \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \quad P \in S_1; \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{\kappa^2}{g} \psi, \quad P \in S_0. \quad (9)$$

Ее решение определяет ряд собственных чисел  $\kappa_k$  и соответствующих им собственных функций  $\phi_{2k}$ . Таким образом, получены представления для потенциалов  $\phi_1$  и  $\phi_2$

$$\phi_1(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^m \phi_{1k}(x, y, z) \dot{c}_k(t);$$

$$\phi_2(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^n \dot{d}_k(t) \phi_{2k}(x, y, z).$$

Поскольку  $\phi = \phi_1 + \phi_2$ , удовлетворяются уравнение Лапласа и граничное условие непротекания. На свободной поверхности должны выполняться условия

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \zeta, \quad P \in S_0;$$

$$\dot{\phi} + g\zeta + a_s(t)x = 0, \quad P \in S_0.$$

Для функции  $\zeta$  из приведенных соотношений получаем

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial \phi_{1k}(x, y, z)}{\partial n} c_k(t) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \phi_{2k}(x, y, z)}{\partial n} \dot{d}_k(t) = \zeta. \quad (10)$$

С учетом (10) на граничной поверхности получим

$$\sum_{k=1}^n \ddot{d}_k(t) \phi_{2k}(x, y, z) + g \sum_{k=1}^m c_k(t) \frac{\partial \phi_{1k}(x, y, z)}{\partial n} +$$

$$+ g \sum_{k=1}^n \dot{d}_k(t) \frac{\partial \phi_{2k}(x, y, z)}{\partial n} + a_s(t)x = 0.$$

Используя соотношения, которым удовлетворяют функции  $\phi_{2k}$ , приходим к дифференциальным уравнениям

$$\sum_{k=1}^n [\ddot{d}_k(t) + \kappa_k^2 d_k(t)] \phi_{2k}(x, y, z) +$$

$$+ g \sum_{k=1}^m c_k(t) \frac{\partial \phi_{1k}(x, y, z)}{\partial n} + a_s(t)x = 0. \quad (11)$$

Умножим уравнение (11) скалярно на функцию  $\phi_{2l}$  и учтем ортогональность системы собственных форм колебаний жидкости в жестком сосуде. Далее подставим  $\phi_{1k}$  и  $\phi_{2k}$  в уравнение движения, получим следующее дифференциальное уравнение

$$L \left( \sum_{k=1}^m c_k u_k \right) + M \left( \sum_{k=1}^n \ddot{d}_k u_k \right) =$$

$$= -\rho_l \left( \sum_{k=1}^m \dot{c}_k \phi_{1k} + \sum_{i=1}^n \dot{d}_i \phi_{2i} + gz + a_s(t)x \right) + Q. \quad (12)$$

Пусть  $\omega_k, u_k$  — собственные частоты и формы свободных колебаний оболочки в вакууме. Имеют место следующие соотношения:

$$Lu_k = \omega_k^2 Mu_k, (Mu_k, u_j) = \delta_{kj}. \quad (13)$$

Умножив скалярно уравнение (12) на  $u_j$  и принимая во внимание условия нормировки (13), получим следующую систему  $n + m$  дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} & \ddot{c}_j(t) + \omega_j^2 c_j(t) + \rho_j \times \\ & \times \left( \sum_{k=1}^m \ddot{c}_k(\varphi_{1k}, u_j) + \sum_{l=1}^n \dot{d}_l(\varphi_{2l}, u_j) + g(z, u_j) + a_s(t)(\rho, u_j) \right) = \\ & = (Q, u_j), \quad j = 1, m; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{d}_l(t) + \kappa_l^2 d_l(t) + \frac{g}{(\varphi_{2l}, \varphi_{2l})} \sum_{k=1}^m \dot{c}_k(t) \left( \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial n}, \varphi_{2l} \right) = 0, \\ & l = 1, n. \end{aligned}$$

Далее мы будем использовать цилиндрическую систему координат и представлять неизвестные функции в виде рядов Фурье, разложенных по окружной координате

$$w = w(r, z) \cos \alpha \theta; \quad \varphi = \varphi(r, z) \cos \alpha \theta.$$

Задачи определения потенциалов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  сведены к решению систем сингулярных интегральных уравнений, описанных в [6, 7].

**Сравнение численных результатов.** Рассмотрим цилиндрическую и коническую оболочки с плоским дном, частично заполненные жидкостью. Для обоих резервуаров: толщина  $h = 0,01$  м, модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ , плотность материала  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>, плотность жидкости  $\rho_1 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>. Оболочки были подвержены действию распределенной по внешней поверхности импульсной нагрузки  $q(r, z, t) = q_0 \cos \alpha \varphi(r, z) \exp(-t/\tau)$ , где  $q_0 = 0,1$  МПа,  $\tau = 14,2 \cdot 10^{-6}$  с. Время действия импульса  $t_n = 5 \cdot 10^{-3}$  с.

Рассмотрим цилиндрический резервуар. Его геометрия показана на рисунке 1, где радиус  $R = 1$  м, длина  $L = 2$  м, уровень заполняющей жидкости  $H = 0,8$  м. Граничные условия:  $u_r = u_z = u_\theta = 0$  при  $z = 0$  и  $r = R$ .

Для иллюстрации расчетов радиальное перемещение вычислено в трех точках, которые показаны на рисунке 1. На рисунках 3–5 представлены радиальные перемещения, вычисленные предложенным методом (сплошная линия) и с помощью конечно-элементного комплекса (штриховая линия).

Видим, что максимальные радиальные перемещения достигаются в точке 2 (в дальнейшем — контрольная точка). На рисунке 6 показано изменение во времени радиального перемещения в контрольной точке для разных уровней заполнения жидкостью.

Рассмотрим коническую оболочку (рисунок 2). Параметры резервуара следующие:  $R = 1$  м — радиус дна,  $H = 1$  м — высота резервуара,  $H_w = 0,5$  м —

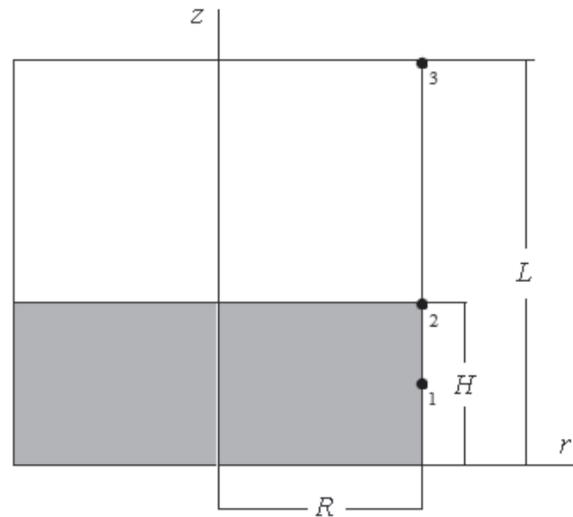


Рисунок 1 — Схема цилиндрического резервуара

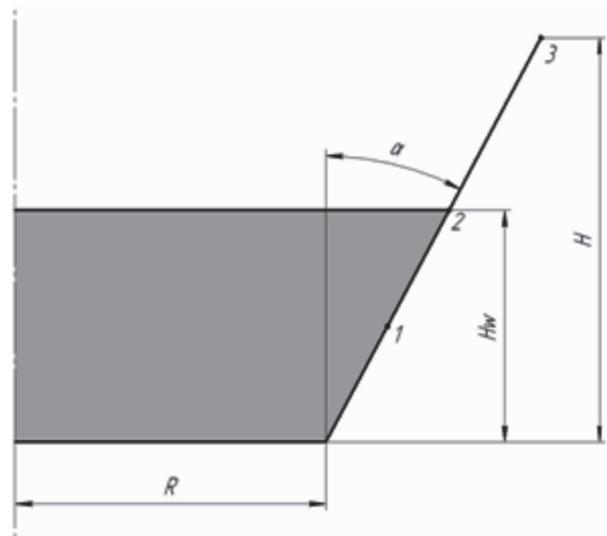


Рисунок 2 — Схема конического резервуара

высота залитой жидкости,  $\alpha$  — угол наклона конуса ( $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ ).

На рисунках 7–9 показаны зависимости радиальных перемещений ( $u_r$ ) от времени ( $t$ ) в точках 1, 2 и 3. На всех рисунках сплошные линии соответствуют расчету по предложенной методике, а пунктирные получены с использованием конечно-элементного программного комплекса.

Вследствие выбранных геометрических параметров длина образующей конуса возрастала одновременно с углом конусности. Поэтому из-за увеличения площади боковой поверхности конуса возрастало воздействие от распределенной импульсной нагрузки. Вследствие этого для  $\alpha = 60^\circ$  перемещения оказались максимальными.

**Выводы.** Разработан метод решения связанной динамической задачи о колебаниях оболочек вращения с жидкостью при сейсмическом и импульсном нагружении. Решение этой задачи основано на ранее разработанных методах расчета частот и форм колебаний «пустой» оболочки и свободных гидро-

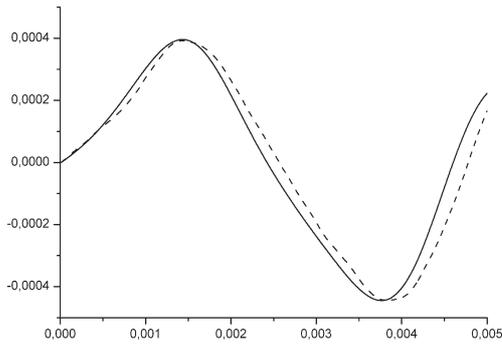


Рисунок 3 — Изменение во времени радиального перемещения в точке 1

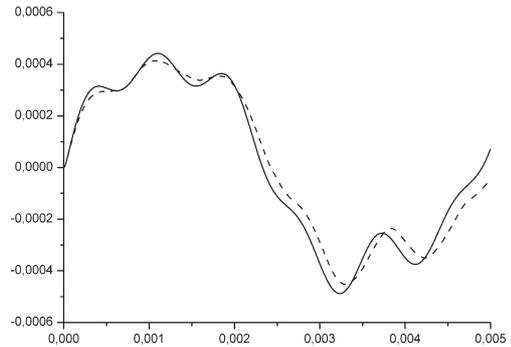


Рисунок 4 — Изменение во времени радиального перемещения в точке 2

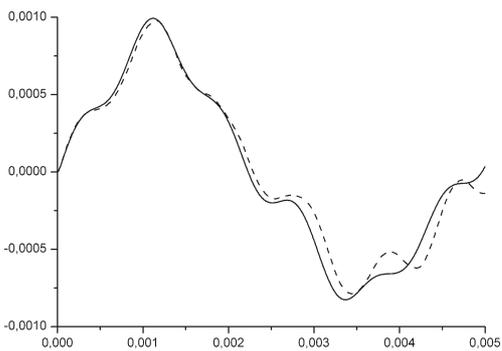


Рисунок 5 — Изменение во времени радиального перемещения в точке 3

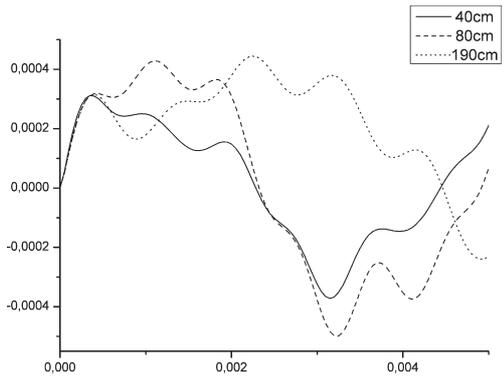


Рисунок 6 — Изменение во времени радиального перемещения в контрольной точке для разных уровней заполнения жидкостью

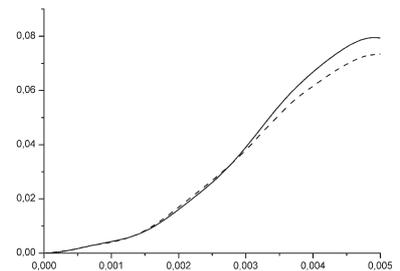
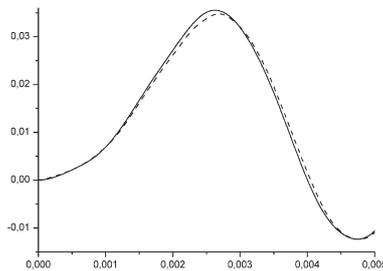
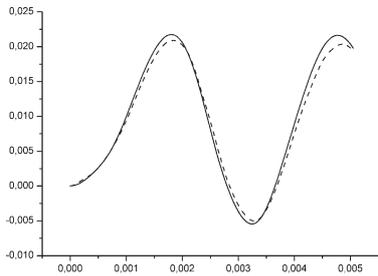


Рисунок 7 — Радиальные перемещения в точке 1: а —  $\alpha = 30^\circ$ ; б —  $\alpha = 45^\circ$ ; в —  $\alpha = 60^\circ$

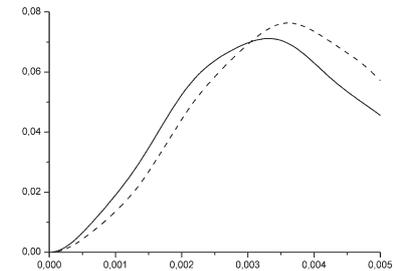
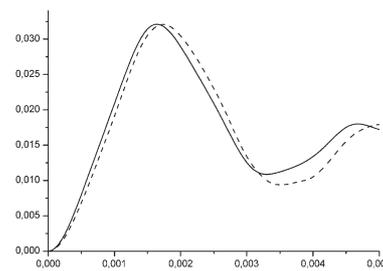
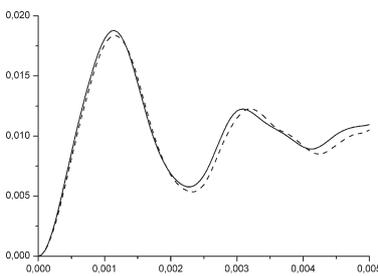


Рисунок 8 — Радиальные перемещения в точке 2: а —  $\alpha = 30^\circ$ ; б —  $\alpha = 45^\circ$ ; в —  $\alpha = 60^\circ$

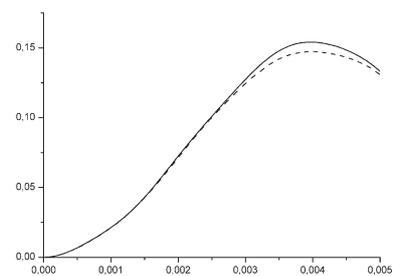
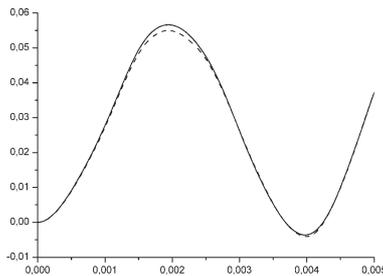
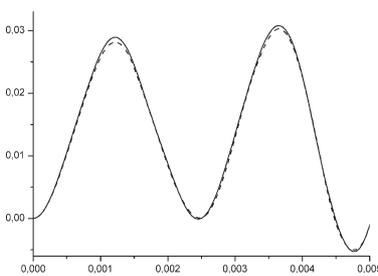


Рисунок 9 — Радиальные перемещения в точке 3: а —  $\alpha = 30^\circ$ ; б —  $\alpha = 45^\circ$ ; в —  $\alpha = 60^\circ$

упругих колебаний оболочки с жидкостью. Интегрирование по объему жидкости сведено к интегрированию вдоль меридиана оболочки и радиуса свободной поверхности жидкости, т. е. является одномерным. В этом заключается основное преимущество нашего метода, основанного на комбинации метода граничных интегральных уравнений, метода конечных элементов и разложения в ряды Фурье. Проведены численные исследования динамики цилиндрического и конического резервуаров, заполненных несжимаемой жидкостью, демонстрирующие достоверность предложенного метода.

#### Список литературы

1. Amabili, M. Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid-structure interaction / Amabili M., Paidoussis M.P. // Applied Mechanics Review. — 56(4). — 2003. — Pp. 349–381.
2. Yu G.Y. Stable boundary element method/finite element method procedure for dynamic fluid-structure interaction / G.Y. Yu, S.T. Lie, S.C. Fan // A.S.C.E. Journal of Engineering Mechanics. — 2002. — 128. — Pp. 909–915.
3. Kumar, V. Dynamic analysis of conical shells conveying fluid / V. Kumar, N. Ganesan // Journal of Sound and Vibration. — 2008. — 310(1–2). — Pp. 38–57.
4. Zhang, Y.L. Vibration of prestressed thin cylindrical shells conveying fluid / Y.L. Zhang, D.G. Gorman, J.M. Reese // Thin-Walled Structures. — 2003. — 41. — Pp. 1103–1127.
5. Recent Advances in Boundary Element Methods A Volume to Honor Professor Dimitri Beskos Manolis, George; Polyzos, Demosthenes Eds., XXXVIII. — 2009. — Pp. 470.
6. Forced vibrations of tanks partially filled with liquid under seismic loading / V. Gnitko [et al.] // Proc. of XXXIII Conference «Boundary elements and other mesh reduction methods» WIT Press, Transaction on Modelling and Simulation, 2011.
7. Free vibrations of shells of revolution filled with a fluid / E. Ventsel // Engineering analysis with boundary elements. — 2010 — № 34.

---

Ogorodnyk U.E., Gnitko V.I.

#### **Coupled bem and fem in dynamic analysis of tanks filled with a liquid**

In this paper the numerical procedure based on a coupling the finite element formulation and the boundary element method is developed for the forced vibration analysis of shells of revolution partially filled with the fluid. We obtained numerical results for dynamic problems for the cylindrical and conical shells interacting with a liquid both in the absence of the disturbing force (free vibrations) and with given external dynamic effects (forced vibrations). For cylindrical shell we investigate the influence of different filling levels. And for conical shell the research was carried out concerned with varying cone slope and its influence on displacements.

**Keywords:** *free vibrations, forced vibrations, fluid-structure interaction, FEM and BEM*

*Поступила в редакцию 15. 10.2013.*