

УДК 539.3/534.1

Н.А. ДОКУКОВА, канд. физ.-мат. наук; Е.Н. КАФТАЙКИНА
Белорусский государственный университет, г. Минск

РАСЧЕТ ДИНАМИЧЕСКОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ШПАНГОУТА

Рассмотрено напряженно-деформированное состояние кольцевого силового элемента — шпангоута, использующегося во многих технических устройствах. Для описания динамической задачи теории упругости были приняты гипотезы плоского сечения и ненадавливания слоев. Получена математическая модель перемещений изгибающегося в плоскости и закручивающегося в поперечных сечениях кольца. Представлены аналитические решения и графические зависимости.

Ключевые слова: колебания, однородная среда, упругие тела, напряженно-деформируемое состояние, нагрузочный режим, амплитудно-частотная характеристика, формы колебаний, задачи динамической теории упругости

Введение. Рассматриваются задачи динамики сложного напряженно-деформируемого состояния закрученных стержневых и кольцевых элементов, широко используемых в технике. Таковыми являются устройства со спиральными и витыми пружинами различной конфигурации в своих конструкциях.

Задачи расчета напряженно-деформированного состояния круговых колец решаются приближенно в рамках курсов «Сопротивления материалов», «Строительная механика», «Прочность конструкций аэрокосмических систем».

В авиастроении упругое круговое кольцо имеет большое практическое значение и является типичной расчетной схемой довольно распространенного элемента силовой конструкции ракет — шпангоута. Методическим аспектом обладает задача изгиба кругового кольца: сравнительно простые уравнения равновесия элемента кольца и зависимости, связывающие перемещения и деформации, весьма полезны для облегчения понимания вывода уравнений теории оболочек вращения. Полученные уравнения могут быть использованы для расчета как изолированных шпангоутов, так и шпангоутов, подкрепляющих тонкую обшивку.

Постановка задачи. Вывод математической модели изгиба и кручения шпангоута — нагруженного кольцевого элемента. Рассмотрим круговое кольцо радиуса R , сжатого и закрученного в поперечных сечениях неравномерными силами и моментами (рисунок 1). При достаточно большом внешнем нагрузочном режиме круговая форма кольца может стать неустойчивой. В общем случае нагружения кольцо испытывает изгиб в своей плоскости, кручение и изгиб в перпендикулярных плоскостях. Исследуем пространственные формы равновесия кольца.

Положение поперечного сечения кольца в процессе движения характеризуется смещением x_3 его центра тяжести из плоскости кольца и углом поворота сечения x_4 (см. рисунок 1 а) [1, 2]. В каждом из поперечных сечений возни-

кают изгибающие и крутящие моменты (см. рисунок 1 б) и поперечная сила, перпендикулярная плоскости кольца [3].

Установим зависимость моментов от перемещений, пользуясь линейными упругими зависимостями в структуре материала выбранного элементарного объема dv кольца, и силовыми факторами,

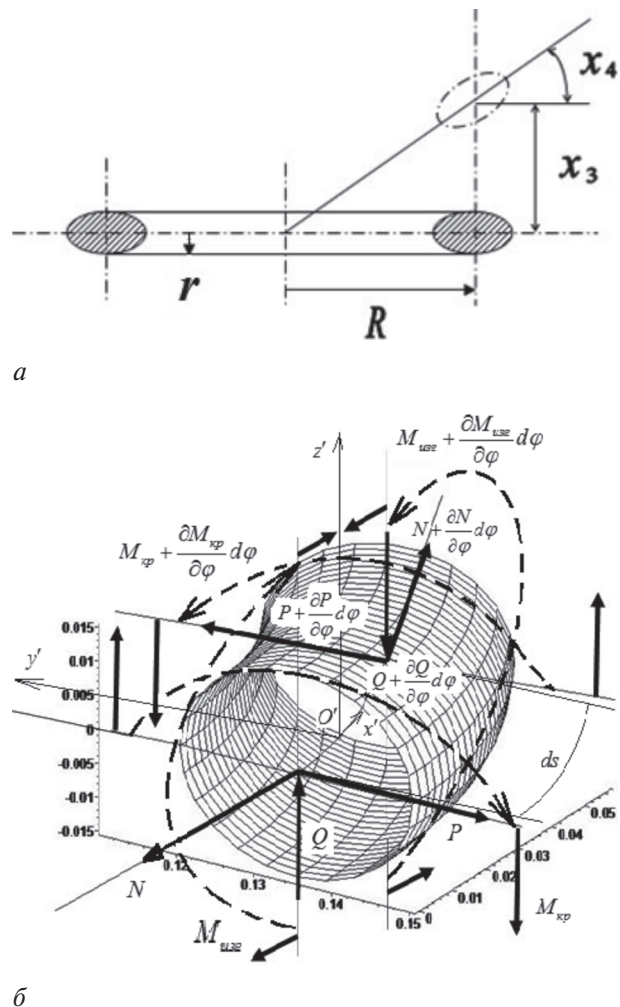


Рисунок 1 — Схема деформирования кольца

связанными со смещением x_3 и с поворотом поперечных сечений на угол x_4 .

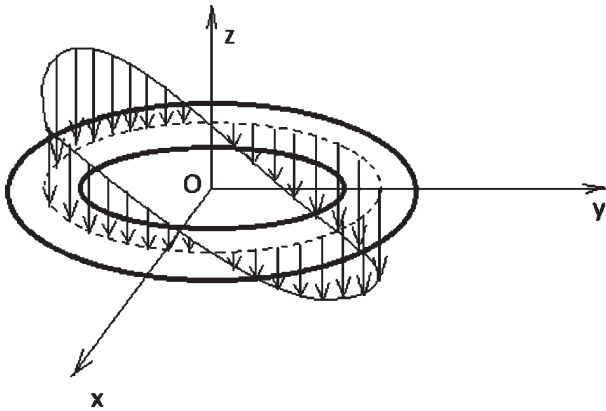
Применяя известные зависимости крутящих и изгибающих моментов, перерезывающих сил для кольцевого элемента с однородной структурой материала, формулы Френе, получим уравнения равновесия в проекциях на оси естественного трехгранника в классических обозначениях:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^4 x_3}{\partial \varphi^4} - \frac{GJ_k}{EJ_1 R} \frac{\partial^2 x_3}{\partial \varphi^2} + \frac{m_0 R^2}{EJ_1} \frac{\partial^2 x_3}{\partial t^2} + \left(1 + \frac{GJ_k}{EJ_1}\right) \frac{\partial^2 x_4}{\partial \varphi^2} = F_1 \cos(k\varphi) \cos(pt); \quad (1)$$

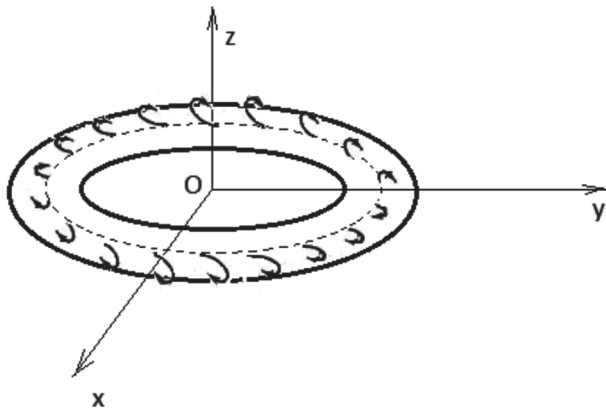
$$\left(1 + \frac{GJ_k}{EJ_1}\right) \frac{\partial^2 x_3}{R \partial \varphi^2} - \frac{GJ_k}{EJ_1} \frac{\partial^2 x_4}{\partial \varphi^2} + x_4 + \frac{m_0 R^3}{EJ_1} \frac{\partial^2 x_3}{\partial t^2} = F_2 \cos(k\varphi) \cos(pt), \quad (2)$$

где $m_0 = \rho F$ — масса единицы длины; J_1 — статический момент инерции; J_k — статический момент инерции кручения; E — модуль Юнга; R — радиус кольца; r — радиус витка кольца; нагрузки $F_1(\varphi, t)$ и $F_2(\varphi, t)$ представлены на рисунке 2.

Зададим начальные и граничные условия, не противоречащие физической сути задачи, для свободных колебаний кольца (1), (2)



а



б

Рисунок 2 — Нагрузка, приложенная к круговому кольцу $F_1(\varphi, t)$ и момент $F_2(\varphi, t)$

$$\max_{\varphi} \{x_3(\varphi, 0)\} = \theta_1; \quad \max_{\varphi} \{x_4(\varphi, 0)\} = \theta_2;$$

$$\frac{\partial x_3(\varphi, 0)}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial x_4(\varphi, 0)}{\partial t} = 0; \quad (3)$$

$$x_3(0, t) = x_3(2\pi, t); \quad x_4(0, t) = x_4(2\pi, t);$$

$$\frac{\partial x_3(0, t)}{\partial \varphi} = \frac{\partial x_3(2\pi, t)}{\partial \varphi}; \quad \max_t \left\{ \frac{\partial x_4(\frac{\pi}{2}, t)}{\partial \varphi} \right\} = 3,17924 \cdot 10^{-3};$$

$$\max_t \left\{ \frac{\partial^2 x_3(2\pi, t)}{\partial \varphi^2} \right\} = 1,2 \cdot 10^{-4}; \quad \frac{\partial^3 x_3(0, t)}{\partial \varphi^3} = \frac{\partial^3 x_3(2\pi, t)}{\partial \varphi^3}.$$

Решение динамической задачи напряженно-деформированного состояния шпангоута. Напряженно-деформируемое состояние кольца в перемещениях, находящегося в поле сил, изгибающих и скручивающих каждое поперечное сечение, и внешних активных периодических сил в виде вибрационной нагрузки, примет следующий вид в форме развитой авторами методики [3]:

$$-\frac{GJ_k}{EJ_1 R} \frac{\partial^6 x_3}{\partial \varphi^6} - 2 \frac{GJ_k}{EJ_1 R} \frac{\partial^4 x_3}{\partial \varphi^4} - \frac{GJ_k m_0 R^3}{(EJ_1)^2} \frac{\partial^4 x_3}{\partial \varphi^2 \partial t^2} - \frac{GJ_k}{EJ_1 R} \frac{\partial^2 x_3}{\partial \varphi^2} + \frac{m_0 R^3}{EJ_1} \frac{\partial^2 x_3}{\partial t^2} = W \cos(k\varphi) \cos(pt); \quad (4)$$

$$-\frac{GJ_k}{EJ_1 R} \frac{\partial^6 x_4}{\partial \varphi^6} - 2 \frac{GJ_k}{EJ_1 R} \frac{\partial^4 x_4}{\partial \varphi^4} - \frac{GJ_k m_0 R^3}{(EJ_1)^2} \frac{\partial^4 x_4}{\partial \varphi^2 \partial t^2} - \frac{GJ_k}{EJ_1 R} \frac{\partial^2 x_4}{\partial \varphi^2} + \frac{m_0 R^3}{EJ_1} \frac{\partial^2 x_4}{\partial t^2} = Q \cos(k\varphi) \cos(pt). \quad (5)$$

Изучение динамики напряженно-деформируемого состояния кольцевых и стержневых элементов, вызываемых подвижной нагрузкой актуально для исследований колебаний мостов при прохождении по ним железнодорожных составов, колебаний турбинных дисков, обусловленных давлением пара или газа, колебаний шины автомобиля, на которую воздействует случайная бегущая нагрузка со стороны дорожного покрытия. Вывод аналитических решений необходим для умений управлять нагрузочными режимами, выбирать наиболее рациональные конструкции, состоящие из механизмов и агрегатов, с нужными физическими параметрами элементов, входящими в их состав.

Рассмотрим изменение геометрии кольца, связанное с его изгибом и кручением. Используем уравнения движения (4), (5) и краевые условия (3). Для x_3 и x_4 получены следующие аналитические выражения:

$$x_3(\varphi, t) = (-0,0039396128 \sin(0,46225552\varphi) - 0,015052722 \cos(0,46225552\varphi) + 0,015484108 \sin(0,68507323\varphi) + 0,016633745 \cos(0,68507323\varphi) + 0,009065373 \sin(1,1476038\varphi) - 0,0035857774 \cos(1,1476038\varphi)) \times \cos(505,24316 t) - 0,0042708314 \cos(2,0\varphi) \cos(31,415927 t); \quad (6)$$

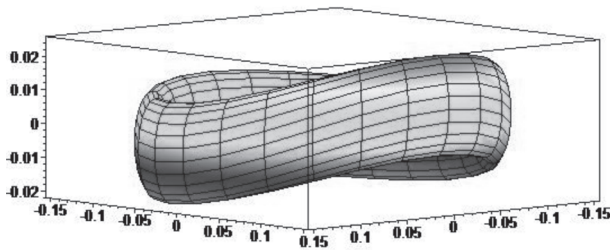
$$x_4(\varphi, t) = (-0,0056187944 \sin(0,46225552 \varphi) - 0,021468645 \cos(0,46225552 \varphi) + 0,048486130 \sin(0,68507323 \varphi) + 0,052086046 \cos(0,68507323 \varphi) + 0,079555512 \sin(1,1476038 \varphi) - 0,031467911 \cos(1,1476038 \varphi)) \times \cos(505,24316 t) - 0,11377216 \cos(2,0 \varphi) \cos(31,415927 t), \quad (7)$$

где $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Н/м²; $G = 8,0 \cdot 10^{10}$ Н/м²; $\rho = 7,86 \cdot 10^3$ кг/м³; $\mu = 0,35$ — коэффициент Пуассона; $J_1 = 2,0 \cdot 10^{-5}$ м⁴; $J_k = 7,95 \cdot 10^{-8}$ м⁴; $m_0 = 6,5$ кг/м; $R = 0,15$ м; $r = 0,015$ м; $F_1(\varphi, t) = 0,00005 \cos(2\varphi) \times \cos(10\pi t)$; $F_2(\varphi, t) = -0,0004 \cos(2\varphi) \cos(10\pi t)$;

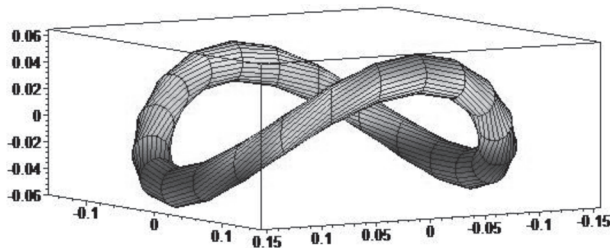
$\Phi_1 = \max_{\varphi,t} |F_1| \frac{EJ_1}{R^2} = 9333,3$ н; $\Phi_2 = \max_{\varphi,t} |F_2| \frac{EJ_1}{R^2} = 74666,7$ н — фактическая физическая нагрузка, выбрана так, чтобы смещения точек кольца были наглядно видны на графиках; $W = -0,00155212 \cos(2\varphi) \cos(31,415927 t)$; $Q = -0,041347464 \cos(2\varphi) \cos(31,415927 t)$; параметры F_1, F_2, W, Q не имеют размерности.

Изобразим вынужденные смещения кольца из положения равновесия и закручивания его поперечных сечений в момент времени 0,01 с (рисунок 3).

Использование полученных аналитических результатов для исследования напряженно-деформированного состояния кругового кольца. Для исследования напряженно-деформированного состояния кругового кольца, вызванного его изгибом и кручением, воспользуемся упрощающими гипотезами технической теории изгиба стержней: гипотезой плоских сечений и гипотезой ненадавливания слоев. Эти гипотезы применимы для расчета не только прямых стержней, но и стержней, у которых размеры поперечного сечения малы по сравнению с радиусом кривизны оси [2].



а



б

Рисунок 3 — Вынужденные смещения кольца из положения равновесия и закручивания его поперечных сечений в момент времени $t = 0,01$ с (а), значение F_2 увеличено в 100 раз (б)

В первом допущении, или гипотезе плоских сечений, принято считать, что все материальные элементы стержня, до деформации перпендикулярные ее срединной плоскости, после деформации остаются прямолинейными и перпендикулярными искривленной срединной плоскости, а длины их не меняются.

Во втором допущении, или гипотезе ненадавливания слоев, считается, что нормальные напряжения σ_z на площадках, параллельных срединной плоскости, пренебрежимо малы по сравнению с нормальными напряжениями на площадках, перпендикулярных срединной плоскости [2].

В силу симметрии задачи достаточно рассмотреть деформацию одного радиального сечения кольца. Перемещения материального элемента ds в вертикальном направлении — u_z , в радиальном — u_ρ , в тангенциальном — u_φ :

$$u_z = x_3(\varphi, t) + r \cos x_4(\varphi, t); \quad (8)$$

$$u_\varphi = 0; \quad (9)$$

$$u_\rho = \rho \left(1 - \sqrt{1 - \frac{(x_3(\varphi, t) + r \cos x_4(\varphi, t))^2}{\rho^2}} \right); \quad (10)$$

$$\rho \in [0,135; 0,165] \text{ (м)}.$$

Величины деформаций (11)–(12) для цилиндрической системы координат находятся подстановкой явных формул (8)–(10):

$$\varepsilon_{\rho\rho} = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\rho}{\rho}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0; \quad (11)$$

$$2\varepsilon_{\varphi z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}; \quad 2\varepsilon_{\rho z} = \frac{\partial u_\rho}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \rho} = 0; \quad (12)$$

$$2\varepsilon_{\rho\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \frac{u_\varphi}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi}.$$

На рисунках 4–7 показаны графические зависимости деформаций (11)–(12) от угла $\varphi \in [0, 2\pi]$ при $\rho = 0,14$ м и $t = 0,5$ с.

Решение динамической задачи напряженно-деформированного состояния витых цилиндрических пружин. Решена задача динамики изгиба и кручения цилиндрической пружины. Смещения пружины для различных краевых условий изображены на рисунке 8.

Выводы. На примере решения задачи об изгибно-крутильных колебаниях кольца апробирована предложенная авторами методика аналитического расчета напряженно-деформируемого состояния нагруженного в плоскости и закрученного в поперечном сечении кольца неравномерно-распределенными моментами для заданных начальных и граничных условий, в которых учитывается периодичность по окружной координате. Классические методики позволяют определять

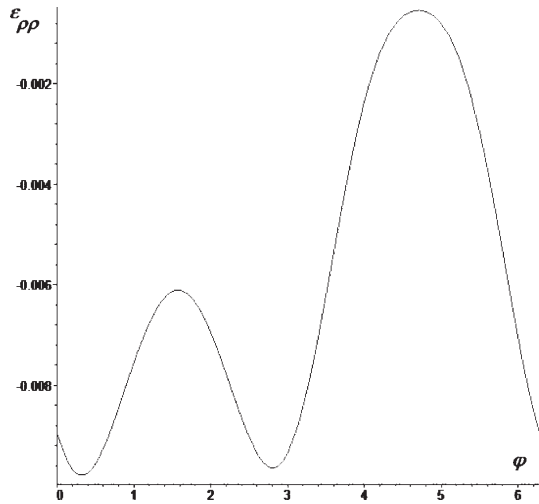


Рисунок 4 — График $\epsilon_{\rho\rho}$ в момент времени $t = 0,5$ с и $\rho = 0,14$ м

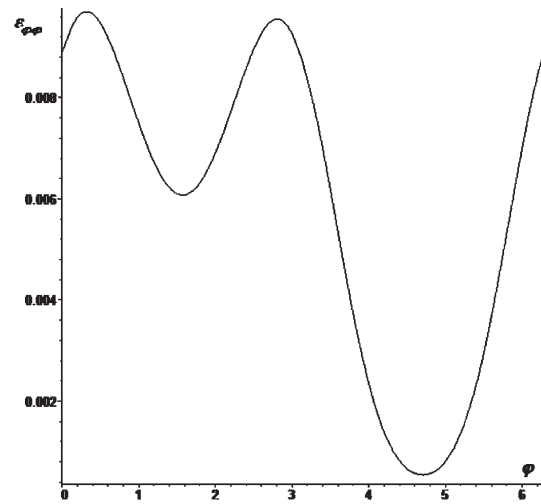


Рисунок 5 — График $\epsilon_{\phi\phi}$ в момент времени $t = 0,5$ с и $\rho = 0,14$ м

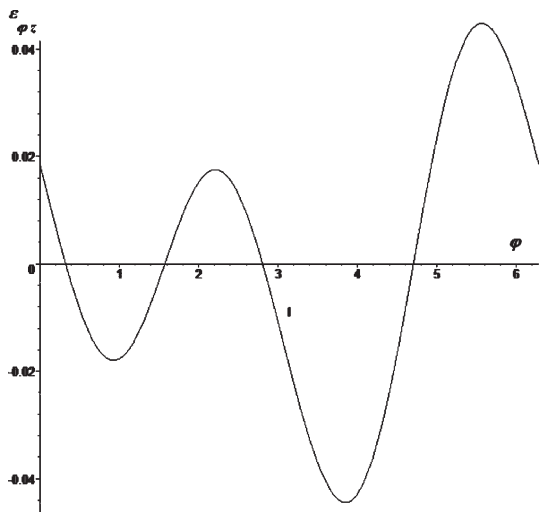


Рисунок 6 — График $\epsilon_{\phi z}$ в момент времени $t = 0,5$ с и $\rho = 0,14$ м

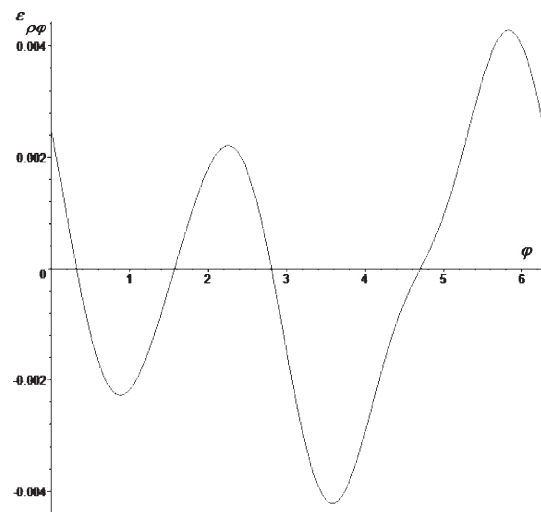
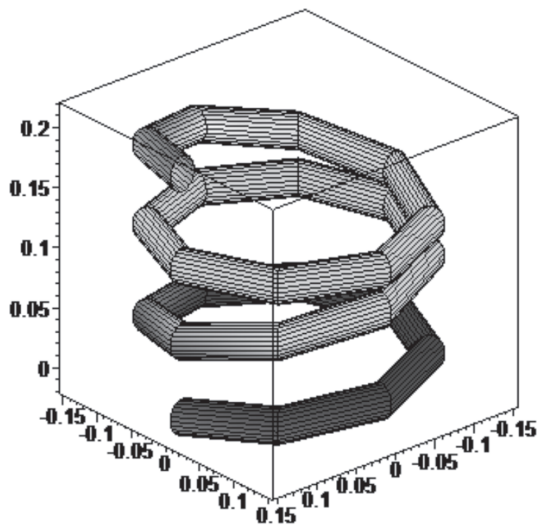


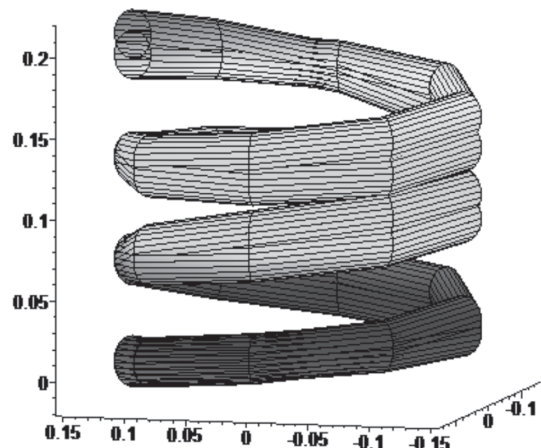
Рисунок 7 — График $\epsilon_{\rho\phi}$ в момент времени $t = 0,5$ с и $\rho = 0,14$ м

только собственные колебания и собственные частоты замкнутой области твердого тела. Представ-

ленная методика полностью интегрирует смешанную задачу и может быть распространена на ви-



а



б

Рисунок 8 — Перемещения, изгибная и крутильная деформации витков пружины (а и б). Два состояния пружины в недеформируемом и деформируемом состояниях (б)

тые цилиндрические стержневые системы с однородной структурой.

Полученные уравнения и результаты могут быть использованы для расчетов:

- в биомеханике и медицине — имплантатов жестких и гибких корригирующих колец во время проведения операций на сердечном клапане;
- в двигателестроении — контактных колец на плавном пускателе в асинхронном трехфазном двигателе внутреннего сгорания;
- несущих крепежных кольцевых элементов в бурильных установках для добычи нефти;
- в строительстве куполов — арок с упругоподатливыми опорами, роль которых выполняют кольцевые элементы;

- кольцевых термопар в электротехнике;
- колец — шпангоутов в судостроении;
- в авиастроении — ферменных фюзеляжей, лонжеронных, стрингерных фюзеляжей, герметических шпангоутов;
- в ракетостроении.

Список литературы

1. Бидерман, В.Л. Теория механических колебаний / В.Л. Бидерман. — М.: Высш. школа, 1980. — 408 с.
2. Балабух, Л.И. Строительная механика ракет: учеб. для машиностроительных спецвузов / Л.И. Балабух, Н.А. Алфуртов, В.И. Усюкин. — М.: Высш. школа, 1984. — 391 с.
3. Dokukova, N.A. Dynamics problem research of the longitudinal-radial oscillations of the ring / N.A. Dokukova, E.N. Kaftaikina // Образование и наука XXI века — 2012: материалы за 8-ю междунар. науч.- практич. конф. «Образование и наука на XXI век». — 2012. — Т. 43. — С. 6–12.

Dokukova N.F., Kaftaikina E.N.

The calculation of the dynamic stress-strain state bulkhead

We consider the stress-strain state of the circular bearing element-bulkhead, which is used in many technical devices. To describe the dynamic problem of the theory of elasticity adopted the hypothesis of a flat section and incompressible layers. A mathematical model of twisting motion in the plane and twists in the cross sections of the ring. Presents some analytical solutions and graphical dependences.

Keywords: vibrations, homogeneous medium, elastic body, load mode, frequency-response characteristic, vibrational mode, problems of dynamical theory of elasticity

Поступила в редакцию 31.10.2013.