УДК 532.516

П.Н. КОНОН, канд. физ.-мат. наук; А.В. ЖУК
Белорусский государственный университет, г. Минск

# НАПРЯЖЕНИЯ НА ВНЕШНЕЙ И ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ

*Рассмотрены движения слоя вязкой жидкости на внутренней и внешней поверхности вращающейся цилиндрической оболочки в поле сил инерции, поверхностного натяжения и тяжести. Получены уравнения эволюции свободной границы слоя. На основе решения нестационарной гидродинамической задачи найдено давление на поверхности вращающейся цилиндрической оболочки.*

***Ключевые слова:*** *вязкая жидкость, уравнения эволюции, вращающаяся цилиндрическая оболочка, свободная поверхность слоя*

**Введение.** В энергетической, химической, металлургической, строительной, пищевой отраслях народнохозяйственного комплекса находят широкое применение процессы, использующие движение слоя жидкости на внешней и внутренней поверхности вращающегося цилиндра. Например, производство теплоизоляционной ваты и металлических волокон центробежно-валковым методом состоит в разрушении слоя формирующегося на поверхности быстро вращающегося цилиндра при попадании на нее расплава минерала [4]. Процессы производства жидкого бетона в строительстве состоят в разрушении слоя, формирующегося на внутренней поверхности достаточно медленно вращающегося цилиндра, а при нанесении слоя клея на бумагу, в производстве изделий из стекла, покраске изнутри предметов цилиндрической формы необходимо более быстрое вращение, чтобы добиться полнейшего отсутствия неровностей. При этом форма слоя существенным образом зависит от соотношения внешнего давления и напряжения на поверхности цилиндрической оболочки.

**Постановка задачи.** Рассматривается плоское течение слоя вязкой жидкости на внешней (внешняя задача) и внутренней (внутренняя задача) поверхностях вращающейся с постоянной угловой скоростью цилиндрической оболочки с учетом сил инерции поверхностного натяжения и тяжести и определяются усилия на поверхности цилиндра. Известны работы Х. Моффата [2] и В.В. Пухначева [3], в которых были получены уравнения эволюции плоской тонкой пленки жидкости при достаточно медленном вращении цилиндра без учета инерционных сил. В работах [5, 6, 8] рассмотрены равновесные относительно вращающегося цилиндра слои жидкости и впервые показано, что ветвление стационарных решений, а вместе с тем и вид свободной поверхности, зависит от перепада давления в слое на поверхности оболочки и внешнего давления.

Плоское течение вязкой жидкости в слое удобно рассматривать в относительной полярной системе координат $O$, $\eta$, $\varphi$, жестко связанной с вращающимся цилиндром. Движение описывается уравнениями Навье–Стокса, неразрывности и неизвестной свободной поверхности. Они дополняются граничными условиями прилипания к твердой поверхности цилиндра $\eta = 1$, отсутствием вязкого взаимодействия с окружающей средой и непрерывностью нормальных напряжений на свободной поверхности $\eta = h(\varphi, \tau)$, условием периодичности течения по угловой координате, а также начальными условиями [1, 7]. Начально-краевая задача содержит три безразмерных параметра — числа Рейнольдса, Фруда и Вебера: $\mathrm{Re} = R_0^2\omega_0/\nu$, $\mathrm{Fr} = R\omega_0^2/g$, $\mathrm{We} = \rho R_0^3\omega_0^2/\sigma$, где $R_0$ — радиус цилиндра; $\omega_0$ — угловая скорость его вращения; $\rho$ — плотность жидкости; $\nu$ — коэффициент кинематической вязкости; $g$ — ускорение силы тяжести; $\sigma$ — коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

В случае достаточно быстрого вращения цилиндра значения $\mathrm{Re} = \varepsilon^{-1} >> 1$, $\mathrm{Fr} >> 1$, $\mathrm{We} >> 1$. При этом относительное изменение течения жидкости в трансверсальном направлении существенно меньше, чем в радиальном, а радиальная составляющая скорости много меньше трансверсальной, т. е. $\mathrm{Re}^{-1} \sim \varepsilon$, $\mathrm{Fr}^{-1} \sim \varepsilon$, $\mathrm{We}^{-1} \sim \varepsilon$, $\omega_\varphi \sim \varepsilon$, $\omega_\tau \sim \varepsilon$, $\omega_\eta \sim 1$, $\nu \sim \varepsilon$, $\omega \sim 1$, $h \sim 1$. Это позволяет получить следующую систему с граничными и начальными условиями

$$p_\eta = (1 + \omega)^2\eta, \tag{1}$$

$$\eta^2(\omega_\tau + \nu\omega_\eta + \omega\omega_\varphi) + 2\eta\nu(\omega + 1) =$$

$$(\eta\nu)\eta + (\eta\omega)_\varphi = 0, \tag{3}$$

$$\eta = h(\varphi, \tau),\ h_\tau + \omega h_\varphi = \nu, \tag{4}$$

$$\eta = h(\varphi,\tau),\ \ (-1)^n\frac{1}{We}\left(\frac{1}{h} - \frac{h_{\varphi\varphi}}{h^2} + \frac{2h_\varphi^2}{h^3}\right) = p - p_a,\ \omega_\eta = 0, \tag{5}$$

$$\eta = 1,\ \nu = 0,\ \omega = 0, \tag{6}$$

$$\begin{gathered} h(\varphi,\tau) = h(\varphi + 2\pi,\tau),\ \ \omega(\varphi,\tau) = \omega(\varphi + 2\pi,\tau), \\ \nu(\varphi,\tau) = \nu(\varphi + 2\pi,\tau),\ \ p(\varphi,\tau) = p(\varphi + 2\pi,\tau); \end{gathered} \tag{7}$$

$$\tau = 0,\ h = h_0(\varphi),\ \nu = \nu_0(\eta, \varphi),\ \omega = \omega_0(\eta, \varphi), \tag{8}$$

здесь и далее нижний индекс обозначает частную производную по указанной переменной. В формулах (1)–(7) и ниже $\omega = w/y - 1$ — относительная угловая скорость слоя; $w$, $\nu$ — соответственно окружная скорость и радиальная компоненты скорости; $p$ — давление в жидкости. Значение $n = 1$ в формуле (5) соответствует слою на внутренней, а $n = 2$ — на внешней поверхности цилиндра. Кроме того для внутренней задачи толщина слоя $h(\varphi, \tau) < 1$, а для внешней $-h(\varphi, \tau) > 1$.

**Вывод уравнений эволюции поверхности.** Уравнения (1)—(4) вместе с граничными и начальными условиями(5)–(8) образуют замкнутую систему для определения $\nu(\eta, \varphi, \tau)$, $\omega(\eta, \varphi, \tau)$, $p(\eta, \varphi, \tau)$, $h(\varphi, \tau)$. Ее особое отличие от уравнений пограничного слоя состоит в том, что давление в жидкости $p$ переменно поперек слоя, неизвестно и должно определяться в процессе решения.

В [7] рассмотрена внешняя плоская задача о движении и распаде слоя на внешней поверхности вращающегося цилиндра при значительном влиянии инерционных сил. Получена и решена система уравнений эволюции. Проведено исследование развития и распада слоя в зависимости от времени. По виду поверхности слоя можно найти давление в слое и на поверхности цилиндра. Анализ напряженного состояния в слое позволяет заключить, что на поверхности цилиндрической оболочки действуют только нормальные напряжения, численно равные давлению в жидкости при $\eta = 1$.

В данной работе исследуем давление слоя на внутреннюю поверхность вращающейся цилиндрической оболочки. С этой целью решим гидродинамическую задачу, исследуем движение слоя и эволюцию его поверхности.

Для решения задачи (1)–(8) воспользуемся прямым методом. Проинтегрируем уравнения (1)–(3) по толщине слоя от $\eta = 1$ до $\eta = \eta(\varphi, \tau) < 1$. Получим соотношения

$$p(\eta,\varphi,\tau) = p(1,\varphi,\tau) + \int_1^\eta \eta(1+\omega)^2 d\eta; \tag{9}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_h^1 \eta^2\omega\, d\eta + \frac{\partial}{\partial\varphi}\int_h^1 \eta^2\omega^2 d\eta + 2\int_h^1 \eta \nu\, d\eta + \int_h^1 \eta\nu\omega\, d\eta = \\ = -\frac{\partial}{\partial\varphi}\int_h^1 p\, d\eta - p|_{\eta=h}\frac{\partial h}{\partial\varphi} + \frac{h^2-1}{2\mathrm{Fr}}\cos(\varphi+\tau) + \\ + \mathrm{Re}^{-1}\left[\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\Big|_{\eta=1} - h\omega|_{\eta=h} - \int_h^1 \omega\, d\eta\right];\end{gathered} \tag{10}$$

$$\eta\nu = \int_\eta^1 \frac{\partial}{\partial\varphi}(\eta\omega)\, d\eta. \tag{11}$$

С помощью замены переменной область течения $h(\varphi, \tau) \le \eta \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ преобразуем в круг:

$$\zeta = \frac{1-\eta}{\delta(\varphi,\tau)},\quad 0 \le \zeta \le 1;\quad \delta(\varphi,\tau) = 1 - h(\varphi,\tau), \tag{12}$$

причем $\zeta = 0$ соответствует поверхности цилиндра $\eta = 1$, а $\zeta = 1$ — свободной поверхности слоя $\eta = h(\varphi, \tau)$. При этом интегральное соотношение (10) преобразуется к виду

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_1^0 (1-\delta\zeta)^2(-\delta\omega)\, d\zeta + \frac{\partial}{\partial\varphi}\int_1^0 (1-\delta\zeta)^2(-\delta\omega^2)\, d\zeta + \\ + 2\int_1^0 (1-\delta\zeta)(-\delta\nu)\, d\zeta + \int_1^0 (1-\delta\zeta)(-\delta\nu\omega)\, d\zeta + \\ + \left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\int_1^0 (-\delta p)\, d\zeta - p|_{\zeta=1}\cdot\frac{\partial\delta}{\partial\varphi}\right) = \frac{\cos(\varphi+\tau)}{2\mathrm{Fr}}\delta(\delta-2) + \\ + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left[-\frac{1}{\delta}\frac{\partial\omega}{\partial\zeta}\Big|_{\zeta=0} - (1-\delta)\omega|_{\zeta=1} + \int_1^0 \delta\omega\, d\zeta\right].\end{gathered} \tag{13}$$

Используем один шаг прямого метода [1]. Предположим, что зависимость относительной угловой скорости $\omega$ от переменной $\zeta$ имеет квадратичный вид, удовлетворяющий граничным условиям (5), (6):

$$\omega(\zeta,\varphi,\tau) = -T(\varphi,\tau)\zeta\left(1-\frac{1}{2}\zeta\right), \tag{14}$$

где $T(\varphi, \tau)$ — периодическая по $\varphi$ функция, подлежащая определению.

Подстановка (14) в соотношение (11) позволяет получить формулу для радиальной компоненты скорости $\nu(\zeta, \varphi, \tau)$

$$\eta\nu \equiv (1-\delta\zeta)\nu = \sum_{n=2}^4 A_n(T,\delta,T_\varphi,\delta_\varphi)\zeta^n, \tag{15}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(T\delta_\varphi - \delta T_\varphi);$$

$$A_3 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\delta(2\delta+1)T_\varphi - (1+\delta)T\delta_\varphi\right);$$

$$A_4 = \frac{1}{4}\left(\delta T\delta_\varphi - \frac{1}{2}\delta^2 T_\varphi\right).$$

Из соотношения (9) можно вывести формулу для распределения давления в слое

$$p(\zeta,\varphi,\tau) = p(1,\varphi,\tau) + \sum_{n=1}^6 b_n(\delta,T)(\zeta^n - 1), \tag{16}$$

$$b_1 = -\delta;\quad b_2 = \frac{\delta^2}{2} + T\delta;\quad b_3 = -\frac{1}{3}(T\delta(1+2\delta) + T^2\delta);$$

$$b_4 = \frac{1}{4}(T^2\delta(1+\delta) + \delta^2 T);\quad b_5 = -\frac{1}{20}T^2\delta(1+4\delta);$$

$$b_6 = \frac{1}{24}T^2\delta^2.$$

С учетом (14), (15) получим первое уравнение эволюции свободной поверхности

$$\delta_\tau = H(\delta)T_\varphi + R(\delta,T)\delta_\varphi, \tag{17}$$

$$H(\delta) = \frac{\delta(5\delta-8)}{24(\delta-1)};\quad R(\delta,T) = \frac{T(5\delta-4)}{12(\delta-1)}.$$

Второе уравнение эволюции получим из интегрального соотношения (13), которое с помощью (14)–(16) преобразуется к виду

$$T_\tau = U\delta_\varphi + VT_\varphi + \frac{1}{\mathrm{We}}\frac{60}{(1-\delta)^4 E_0(\delta)}\times$$
$$\times\left(6\delta_\varphi{}^3 + 6(1-\delta)\delta_\varphi\delta_{\varphi\varphi} + (1-\delta)^2(\delta_\varphi + \delta_{\varphi\varphi\varphi})\right)+ \qquad (18)$$
$$+\frac{1}{\mathrm{Fr}}\frac{30(\delta-2)\cos(\varphi+\tau)}{E_0(\delta)} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{10T}{\delta^2 E_0(\delta)}(6+3\delta-\delta^2),$$

где

$$U(\delta,T) = T^2U_2(\delta) + TU_1(\delta) + U_0(\delta);$$
$$V(\delta,T) = TV_1(\delta) + V_0(\delta);$$

$$U_2(\delta) = \frac{1}{\delta E_0(\delta)}\left(\frac{1}{42}(-336+553\delta-38\delta^2)+\right.$$
$$\left.+\frac{5\delta-4}{12(\delta-1)}(20-50\delta+27\delta^2)\right);$$

$$U_1(\delta) = \frac{40-50\delta}{E_0(\delta)};\quad U_0(\delta) = \frac{60(\delta-1)}{E_0(\delta)};$$

$$V_1(\delta) = \frac{1}{E_0(\delta)}\left(\frac{1}{21}(-336+161\delta+34\delta^2)+\right.$$
$$\left.+\frac{5\delta-8}{24(\delta-1)}(20-50\delta+27\delta^2)\right);$$

$$V_0(\delta) = \frac{\delta(40-25\delta)}{E_0(\delta)};\quad E_0(\delta) = -20+25\delta-9\delta^2.$$

Уравнения (2.34), (2.35) дополняются условиями периодичности по угловой координате, а также периодическими начальными условиями

$$\delta(\varphi,\tau) = \delta(\varphi+2\pi,\tau);\ \delta_\varphi(\varphi,\tau) = \delta_\varphi(\varphi+2\pi,\tau);$$

$$\delta_{\varphi\varphi}(\phi,\tau) = \delta_{\varphi\varphi}(\phi+2\pi,\tau);\ \delta_{\varphi\varphi\varphi}(\phi,\tau) = \delta_{\varphi\varphi\varphi}(\phi+2\pi,\tau);$$

$$T(\varphi,\tau) = T(\varphi+2\pi,\tau);\ \delta(\varphi,0) = \delta_0(\varphi);$$
$$T(\varphi,0) = T_0(\varphi). \qquad (19)$$

Система нелинейных уравнений (17), (18) в частных производных с граничными и начальными условиями (18), (19) является замкнутой и служит для определения эволюции свободной поверхности слоя $\delta(\varphi, \tau)$.

**Численный метод.** Численный метод решения начально-краевой задачи (17)–(19) основан на методе прямых, когда область течения разбивается $N$ лучами. Затем производные по $\varphi$ на опорных лучах представляются конечно-разностными соотношениями [7], что позволяет свести уравнения эволюции к системе $2N$ обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dT_n}{d\tau} = f_1\left[\tau,\delta_n,(\delta_\varphi)_n,(\delta_{\varphi\varphi})_n,(\delta_{\varphi\varphi\varphi})_n,T_n,(T_\varphi)_n\right];$$
$$\frac{d\delta_n}{d\tau} = f_2\left[\tau,\delta_n,(\delta_\varphi)_n,T_n,(T_\varphi)_n\right], \qquad (20)$$

где функции $f_1$ и $f_2$ представляют правые части (18) и (17) после дискретизации по $\varphi$. Условия (19) требуют выполнения равенств

$$\delta_n(\tau) = \delta_{N+n}(\tau);\ \ T_n(\tau) = T_{N+n}(\tau); \qquad (21)$$

$$\delta_n(0) = \delta_n^0;\ \ T_n(0) = T_n^0. \qquad (22)$$

Интегрирование системы $2N$ обыкновенных дифференциальных уравнений (20) с дополнительными условиями (21), (22) производится методом Рунге–Кутта с постоянным шагом по формулам четвертого порядка точности. Значение $N$ варьировалось и составляло 180, 360, 720, а шаг интегрирования по времени $\Delta\tau$ изменялся от $\pi/200$ до $\pi/2\,000$. При определении функций $f_1$ и $f_2$ использовались значения производных по $\varphi$ в предшествующий момент времени $\tau - \Delta\tau$. Точность вычислений контролировалась условием сохранения массы жидкости в слое

$$M = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-h^2(\varphi,\tau))d\varphi = const.$$

Вычисления прерывались по условию, что абсолютный максимум толщины слоя достигает трех его максимальных значений в начальный момент. Соответствующее значение времени считается моментом распада слоя $\tau_p$. По найденной поверхности слоя определялось давление в жидкости и на поверхности цилиндрической оболочки по формуле (16) с учетом (5).

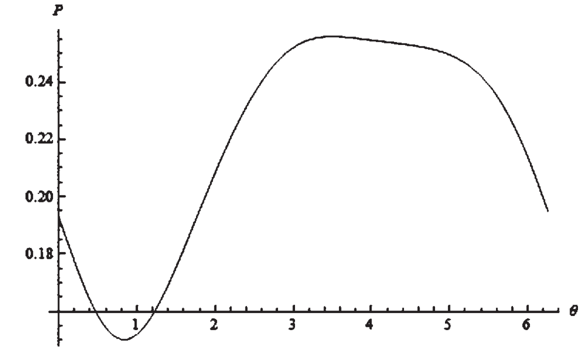
**Результаты расчетов и их анализ.** Исследуем изменение давления на поверхности цилиндрической оболочки для внутренней задачи. Численное решение проводилось при следующих данных: жидкость — водные растворы глицерина с плотностью 1260 кг/м$^3$, кинематической вязкостью $1{,}11 \cdot 10^{-3}$ м$^2$/сек, коэффициентом поверхностного натяжения 0,07 н/м при температуре 20° С. Радиусы цилиндра при расчетах принимались равными 2,5 см, 3,5 см, 5 см, 10 см, а угловые скорости его вращения — от 3 об/с и выше. При этих параметрах значения Re >> 1, Fr >> 1, We >> 1.

Предполагается, что в начальный момент $\tau = 0$ слой и цилиндр вращаются как единое целое, и слой имеет постоянную толщину: $\delta^0(\varphi) = \delta^0$, $T^0(\varphi) = 0$.

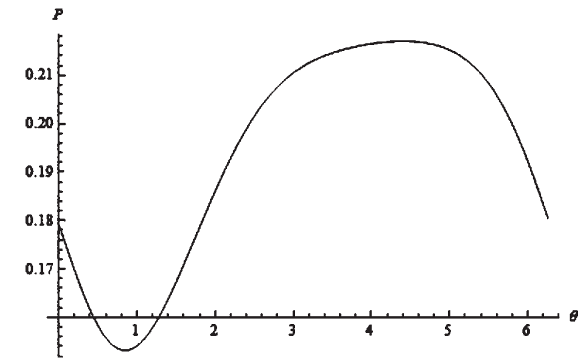
Для лучшей наглядности все результаты расчетов приведены в неподвижной системе координат $y = \eta$, $\theta = \varphi - \tau$.

На рисунке 1 представлены: вид свободной поверхности слоя, перепад давлений на поверхности цилиндрической оболочки и внешнего атмосферного $Eu = p_1 - p_a$, радиальная компонента скорости и относительная угловая скорость точек слоя при Re = 282,8; Fr = 10,0; We = 17747; $\delta_0$ = 0,3 в момент времени $\tau$ = 3,14. Давление жидкости на поверхности цилиндра определено по формуле (16) при $\zeta = 0$. Видно, что слой деформирован вследствие действия силы тяжести и утолщен при подъеме жидкости, что видно в левой части рисунка. В точках наибольшего и наименьшего утолщения слоя наблюдается максимальное по величине отклонение угловой скорости от случая жесткого вращения. В этих же точках радиальная компонента скорости близка к нулю. Наибольшее по величине нормальное давление на поверхности цилиндра наблюдается в точках минимальной толщины слоя вследствие максимального действия центробежных сил при углах $\theta$ от $\pi$ до $3\pi/2$. Минимальное давление жидкость оказывает на цилиндр в точках подъема слоя при вращении оболочки против часовой стрелки при $\theta$ от $\pi$ до $\pi/2$. Отметим, что давление принимает отрицательные значения, что обусловлено направлением нормали в слое жидкости к поверхности оболочки. Другие результаты численных расчетов показаны на рисунках 2–4.

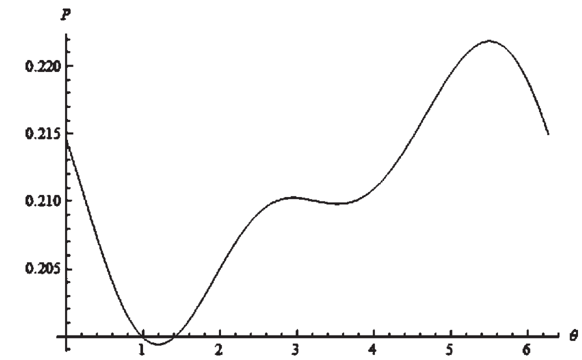
В работе [7] рассмотрена задача движения и распада слоя на внешней поверхности вращающегося цилиндра. Рассмотрим действие слоя вязкой жидкости на поверхность цилиндра.



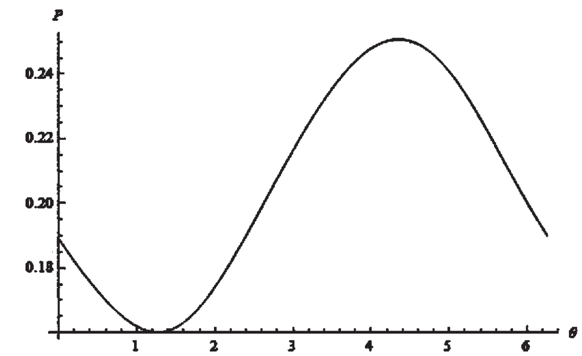

*а*




*б*

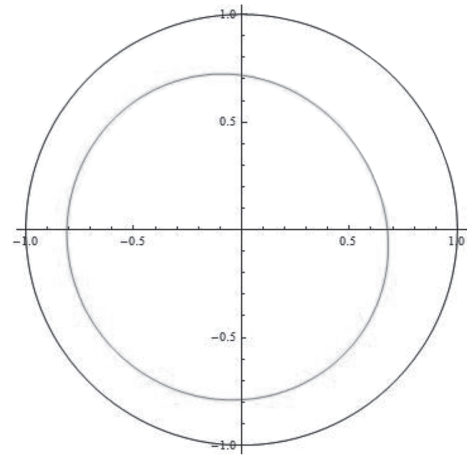



*в*

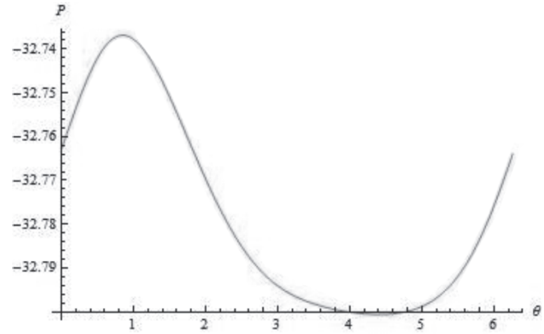



*г*

**Рисунок 1 — Характеристики течения слоя на внутренней поверхности вращающейся цилиндрической оболочки при Re = 70,7; Fr = 10,0; We = 2218,4; $\delta_0$ = 0,3 в момент времени $\tau$ = 3,14:**
*а* — вид поверхности слоя; *б* — нормальное давление; *в* —радиальная компонента скорости; *г* — отклонение окружной скорости от жесткого вращения

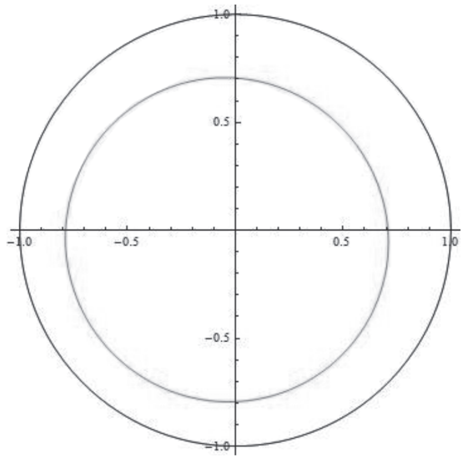



*а*

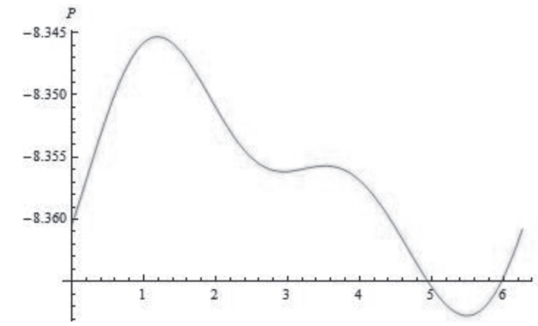



*б*

**Рисунок 2 — Вид поверхности слоя и нормальное давление при Re = 70,7; Fr = 10,0; We = 2218,4; $\delta_0$ = 0,25 в момент времени $\tau$ = 3,14**

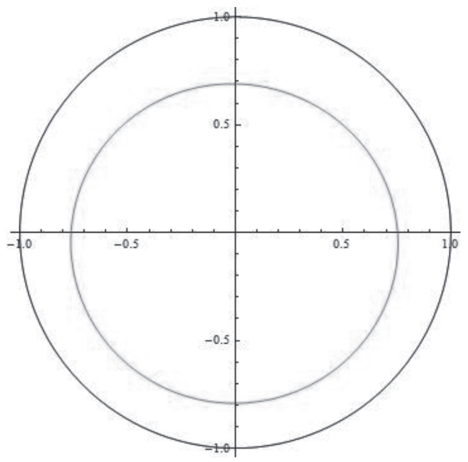


а

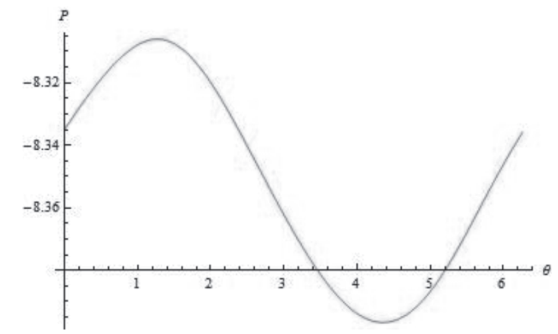



б

Рисунок 3 — Вид поверхности слоя и нормальное давление при Re = 282,8; Fr = 10,0; We = 17 747; $\delta_0 = 0{,}25$ в момент времени $\tau = 3{,}14$



а




б

Рисунок 4 — Вид поверхности слоя и нормальное давление при Re = 282,8; Fr = 10,0; We = 17 747; $\delta_0 = 0{,}25$ в момент времени $\tau = 4{,}71$

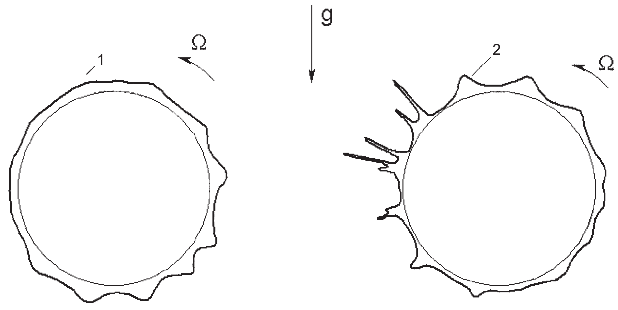



Рисунок 5 — Форма свободной поверхности слоя на вращающемся цилиндре при $\delta_0 = 0{,}1$; Re = 17,7; Fr = 2,52; We = 277,6 в моменты времени: 1 — $\tau = 9\pi$; 2 — $\tau = \tau_p = 31{,}53$

Сначала проследим за эволюцией формы свободной поверхности слоя, первоначально имеющего постоянную толщину $\delta^0 = \text{const}$. На рисунке 5 показана форма свободной поверхности слоя при $\delta^0 = 0{,}10$; Re = 17,7; Fr = 2,52; We = 277,6; линии 1 соответствует время $\tau = 9\pi$; линии 2 — момент распада слоя $\tau = \tau_p = 31{,}53$. Вначале наиболее значительно проявляется влияние силы тяжести, когда на свободной поверхности слоя появляется по одной точке с минимальным и максимальным значением толщины. Затем развиваются другие возмущения малой амплитуды, расположенные равномерно по поверхности цилиндра. С течением времени под действием инерционных сил, нелинейного взаимодействия возмущений число локальных экстремумов и максимальные значения радиуса свободной поверхности увеличиваются (линия 1). Затем нарушается равномерность их размещения, отдельные максимумы еще возрастают. При этом происходит перестройка всего течения, сильно изменяются его кинематические характеристики, в определенных местах вытягиваются струйки жидкости в виде тонких нитей, и слой теряет устойчивость (линия 2). Описанное поведение слоя подтверждается проведенными экспериментами [4].

С развитием возмущений по угловой координате сильно изменяются кинематические и динамические характеристики течения. На рисунке 6 изображены графики изменения перепада давле-

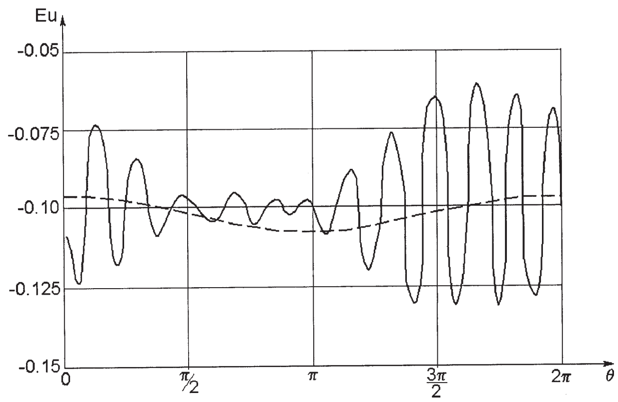



Рисунок 6 — Зависимость перепада давлений *Eu* от угла θ в точках свободной поверхности в моменты времени $\tau = 2\pi$ (штриховая линия) и $\tau = 9\pi$ (сплошная линия) ний в слое на поверхности цилиндра и окружающей среде $Eu = p_0 - p_a$ в зависимости от угла $\theta$. Сплошная линия соответствует времени $\tau = 9\pi$, когда возмущения сильно развиты. В этом случае изображенные зависимости имеют множество ярко выраженных экстремумов. Их количество соответствует числу экстремумов свободной поверхности. В точках максимума свободной поверхности перепад давлений $Eu$ наименьший, а в точках минимума — наибольший.

**Выводы.** Рассмотрена задача движения слоя вязкой жидкости на внутренней и внешней поверхности вращающейся цилиндрической оболочки. В случае достаточно быстрого вращения цилиндра выведены уравнения эволюции свободной границы слоя. Построен алгоритм численного решения задачи. На основе решения нестационарной гидродинамической задачи с неизвестной границей области течения найдено давление на поверхности вращающейся цилиндрической оболочки для внутреннего и внешнего движения слоя.

## Список литературы

1. Шкадов, В.Я. Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости / В.Я. Шкадов // Ин-т механики МГУ. Науч. тр. — М., 1973. — Вып. 25. — 192 с.
2. Moffat, H.K. Behavior of a viscous film on the outer surface of rotating cylinder / H.K. Moffat // Jornal de Mehanique. — 1977. — Vol. 16, No 8. — Pp. 651–673.
3. Пухначев, В.В. Движение жидкой пленки на поверхности вращающегося цилиндра в поле тяжести / В.В. Пухначев // ПМТФ. — 1977. — № 3. — С. 78–88.
4. Экспериментальное и теоретическое исследование слоя жидкости на вращающемся цилиндре / А.Е. Кулаго [и др.] // Сб. трудов ВНИПИ Теплопроект. — М., 1981. — С. 76–81.
5. Епихин, В.Е. О форме осесимметричного слоя жидкости на поверхности вращающегося цилиндра / В.Е. Епихин, П.Н. Конон, В.Я. Шкадов // Изв. АН СССР, МЖГ. — 1989. — № 4. — С. 23–27.
6. Епихин, В.Е. О форме жидкого слоя постоянной массы на поверхности вращающегося цилиндра / В.Е. Епихин, П.Н. Конон, В.Я. Шкадов // ИФЖ. — 1990. — Т. 59, № 1. — С. 80–84.
7. Епихин, В.Е. О возмущенном движении слоя вязкой жидкости па поверхности вращающегося цилиндра / В.Е. Епихин, П.Н. Конон, В.Я. Шкадов // ИФЖ. — 1994. — Т. 66, № 6. — С. 689–694.
8. Конон, П.Н. Исследования плоских и осесимметричных слоев жидкости, неподвижных относительно внутренней поверхности вращающегося цилиндра / П.Н. Конон, В.В. Шпортько // Вестн. БРФФИ-2011. — № 3. — С. 98–110.

---

Konon P.N., Zhuk A.V.

**Tension on the external and internal surface of the rotating cylindrical cover partially the filled liquid**

It is considered movements of a layer of viscous liquid on an internal and external surface of a rotating cylindrical cover in the field of forces of inertia, a superficial tension and weight. The equations of evolution of free border of a layer are received. On the basis of the solution of a non-stationary hydrodynamic task pressure upon surfaces of a rotating cylindrical cover is found.

***Keywords:*** *viscous liquid, equations of evolution, rotating cylindrical cover, free border of a layer*

*Поступила в редакцию 31.10.2013.*