

УДК 539.3

В.М. МИРСАЛИМОВ, д-р физ.-мат. наук; В.А. АСКАРОВ  
Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку

## ОБРАТНАЯ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ИЗГИБА ПЛАСТИН ДЛЯ КОМПОЗИТА, АРМИРОВАННОГО ОДНОНАПРАВЛЕННЫМИ ВОЛОКНАМИ

На основе принципа равнопрочности решена задача по определению оптимальной формы поперечного сечения упругих включений (волокон), обеспечивающих снижение концентрации напряжений в изгибаемой пластине. Найденная форма поперечного сечения волокон обеспечивает повышение несущей способности составной пластины.

**Ключевые слова:** упругая составная пластина, связующее, включения, изгиб, минимизация напряжений

**Введение.** Как показывает практика, составные (многокомпонентные) среды более надежны и долговечны, чем однородные [1, 2]. Кроме того, известно, что прочность конструкции зависит также от ее формы.

Процесс разрушения композитных материалов определяется взаимодействием включений с матрицей (связующим). Рассмотрим составную упругую пластину, состоящую из упругой среды (матрицы) и распределенных в ней включений из другого упругого материала. Подкрепляющие элементы (волокна), сравнительно небольшие по массе, существенно влияют на прочность составной пластины [1]. Ресурс работы составной (многокомпонентной) конструкции зависит от распределения напряжений в зонах взаимодействия ее элементов, поэтому большое значение приобретает оптимальное проектирование таких конструкций, т. е. определение их оптимальных характеристик.

Работоспособность составной пластины (композита) можно повышать с помощью конструкторско-технологических приемов, в частности путем изменения геометрии соединения ее элементов. Армированные волокна проектируют в основном круглого поперечного сечения.

Как показывает опыт, от идеальной конструкторской геометрии реальные поверхности сечений подкрепляющих волокон отличаются наличием неровностей, являющихся неизбежным следствием процесса их изготовления. Несмотря на малые размеры неровностей, они могут оказывать существенное влияние на несущую способность составной конструкции. Поэтому исследование как самой геометрии реальных поверхностей волокон, так и влияния параметров неровностей поверхности соединения связующего с волокнами на несущую способность крайне актуальны.

**Постановка задачи.** Пусть неограниченная пластина (композит) подвергается изгибу средними моментами (изгиб на бесконечности):  $M_x = M_x^\infty$ ,  $M_y = M_y^\infty$ ,  $H_{xy} = 0$ . Рассмотрим составную упругую пластину, состоящую из матрицы (область  $D$ ) и рас-

пределенных в ней одинаковых включений с поперечным сечением близким к круговому (рисунок). Обозначим границу раздела различных упругих сред через  $L'_{m,n}$  ( $m, n = 0, \pm 1, \dots$ ). Полагаем, что границу  $L'_{m,n}$  соединения волокна с матрицей можно представить в виде

$$r = \rho(\theta) = \lambda + \varepsilon H(\theta), \quad (1)$$

а центры двоякопериодической системы волокон расположены в точках

$$P_{mn} = m\omega_1 + n\omega_2; \quad \omega_1 = 2; \quad \omega_2 = 2\ell \exp(i\alpha); \\ \ell > 0; \quad \text{Im}\omega_2 > 0,$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр, равный  $R_{\max}/\lambda$ ;  $R_{\max}$  — наибольшая высота неровности профиля контура  $L'_{0,0}$  от окружности радиуса  $r = \lambda$ . Считается, что всюду на границе соединения  $L'_{m,n}$  имеет место жесткое сцепление различных сред. Начало системы координат совмещаем с геометрическим центром круга  $L_{0,0}$  ( $r = \lambda$ ) в плоскости композита. Для оптимизации несущей способности составного тела предлагается метод, заключающийся в выборе класса неровностей поверхности поперечного сечения волокон, обеспечивающих повышение несущей способности композита.

Таким образом, требуется определить такую геометрию поверхности соединения волокна и свя-

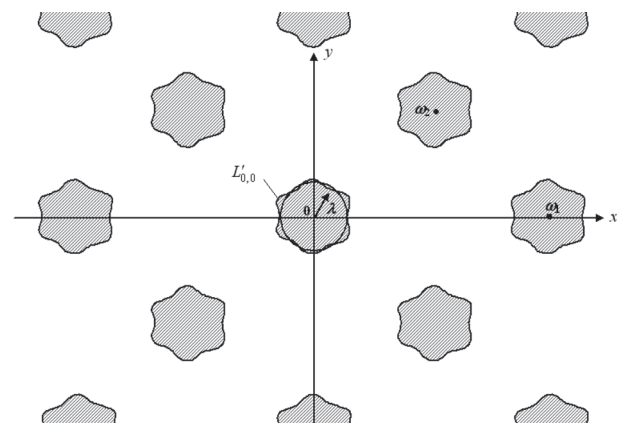


Рисунок — Расчетная схема задачи

зующего, чтобы созданное ею упругое напряженное поле снижало бы концентрацию напряжений в композите. Очевидно, что чем ниже уровень напряженности в составной конструкции, тем выше ресурс ее работы. Решению подобных задач механики посвящены работы [3–8]. Следует отметить, что до сих пор неизвестны решения задач теории изгиба пластин по построению системы концентраторов (включений) таким образом, чтобы созданное ими упругое напряженное поле снижало концентрацию напряжений в композите.

Представим границу неизвестного контура  $L'_{m,n}$  в виде (1), где функция  $H(\theta)$  подлежит определению в процессе решения задачи оптимизации. Не уменьшая общности поставленной задачи оптимизации, принимаем, что искомая функция  $H(\theta)$  симметрична относительно координатных осей и может быть представлена в виде отрезка ряда Фурье, т. е. функция  $H(\theta)$  удовлетворяет известным условиям Дирихле на отрезке  $[0, 2\pi]$ . Для нахождения геометрии соединения введем в задачу в качестве условия определения геометрии соединения (функции  $H(\theta)$ ) условие равнопрочности на контуре соединения связующего и волокон.

Требуется определить функцию  $H(\theta)$  так, чтобы созданное в процессе нагружения составной пластины напряженно-деформированное поле обеспечивало выполнение условия равнопрочности на контуре раздела различных сред. Это дополнительное условие позволяет определить искомую функцию  $H(\theta)$  геометрии соединения материалов.

На основании симметрии граничных условий и геометрии области  $D$ , занятой упругой средой, напряжения в связующем являются двоякопериодическими функциями с основными периодами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Так как решение для связующего обладает свойством двоякопериодичности, достаточно рассмотреть условия сопряжения связующего и волокон лишь вдоль контура  $L'_{0,0}$ .

**Метод решения.** Введем обозначения:  $w_0$  — прогиб (включения) области  $S'_{0,0}$ , ограниченной контуром  $L'_{0,0}$ , а  $w$  — прогиб пластины вне областей  $S'_{m,n}$  ( $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) соприкосновения волокон поперечного сечения близкого к круговому. Представим эти прогибы через бигармонические функции.

Комплексные потенциалы, относящиеся к волокну, обозначим через  $\Phi_0(z)$  и  $\Psi_0(z)$ , а относящиеся к связующему — через  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$ . Искомые функции (напряжения, моменты, прогиб) ищем в виде разложений по малому параметру, в которых пренебрегаем для упрощения членами, содержащими  $\epsilon$  в степени выше первой. Каждое из приближений удовлетворяет системе дифференциальных уравнений теории изгиба пластин. Значения компонент тензора напряжений (моментов) при  $r = \rho(\theta)$ , найдем, разлагая в ряд выражения для моментов в окрестности  $r = \lambda$ .

Используя процедуру метода возмущений, на основании граничных условий рассматриваемой задачи получим граничные условия задачи на контуре  $L_{0,0}(\tau = \lambda \exp(i\theta))$  для комплексных потенциалов: — для нулевого приближения

$$\begin{aligned} \Phi^{(0)}(\tau) + \overline{\Phi^{(0)}(\tau)} - \frac{\tau^2}{\lambda^2} \left[ \frac{\lambda^2}{\tau} \Phi^{(0)'}(\tau) + \Psi^{(0)}(\tau) \right] = \\ = \Phi_0^{(0)}(\tau) + \overline{\Phi_0^{(0)}(\tau)} - \\ - \frac{\tau^2}{\lambda^2} \left[ \frac{\lambda^2}{\tau} \Phi_0^{(0)'}(\tau) + \Psi_0^{(0)}(\tau) \right] \text{ на } L_{0,0}; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \kappa \overline{\Phi^{(0)}(\tau)} + \Phi^{(0)}(\tau) - \frac{\tau^2}{\lambda^2} \left[ \frac{\lambda^2}{\tau} \Phi^{(0)'}(\tau) + \Psi^{(0)}(\tau) \right] = \\ = \frac{D_0(1-\nu_0)}{D(1-\nu)} \left\{ \kappa_0 \overline{\Phi_0^{(0)}(\tau)} + \Phi_0^{(0)}(\tau) - \right. \\ \left. - \frac{\tau^2}{\lambda^2} \left[ \frac{\lambda^2}{\tau} \Phi_0^{(0)'}(\tau) + \Psi_0^{(0)}(\tau) \right] \right\}, \end{aligned}$$

— для первого приближения

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)}(\tau) + \overline{\Phi^{(1)}(\tau)} - \frac{\tau^2}{\lambda^2} \left[ \frac{\lambda^2}{\tau} \Phi^{(1)'}(\tau) + \Psi^{(1)}(\tau) \right] = \\ = \Phi_0^{(1)}(\tau) + \overline{\Phi_0^{(1)}(\tau)} - \frac{\tau^2}{\lambda^2} \left[ \frac{\lambda^2}{\tau} \Phi_0^{(1)'}(\tau) + \Psi_0^{(1)}(\tau) \right] + \\ + f_1 + if_2 \text{ на } L_{0,0}; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \kappa \overline{\Phi^{(1)}(\tau)} + \Phi^{(1)}(\tau) - \frac{\tau^2}{\lambda^2} \left[ \frac{\lambda^2}{\tau} \Phi^{(1)'}(\tau) + \Psi^{(1)}(\tau) \right] = \\ = \frac{D_0(1-\nu_0)}{D(1-\nu)} \left\{ \kappa_0 \overline{\Phi_0^{(1)}(\tau)} + \Phi_0^{(1)}(\tau) - \right. \\ \left. - \frac{\tau^2}{\lambda^2} \left[ \frac{\lambda^2}{\tau} \Phi_0^{(1)'}(\tau) + \Psi_0^{(1)}(\tau) \right] \right\} + g_1 + ig_2, \end{aligned}$$

где  $\tau = \lambda e^{i\theta} + m\omega_1 + n\omega_2$  ( $m, n = 0, \pm 1, \pm 2$ );  $\nu$  и  $\nu_0$  — коэффициенты Пуассона связующего и волокна, соответственно;  $\kappa = -(3 + \nu) / (1 - \nu)$ ;  $\kappa_0 = -(3 + \nu_0) / (1 - \nu_0)$ ; функция  $f_1 + if_2$  выражается через функцию  $H(\theta)$  и компоненты перемещений на контуре  $L_{0,0}$  нулевого приближения; аналогично функция  $g_1 + ig_2$  зависит от функции  $H(\theta)$  и компонент напряжений при  $\tau = \lambda e^{i\theta}$  нулевого приближения;  $D$  и  $D_0$  — цилиндрическая жесткость связующего и волокна. Из-за громоздкости функций  $f_1, f_2, g_1, g_2$  приведем для наглядности зависимость одной из вышеперечисленных функций

$$f_1 = H \left( \frac{\partial^2(w^{(0)} - w_0^{(0)})}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial(w^{(0)} - w_0^{(0)})}{\partial y} \frac{dH}{d\theta},$$

где  $w^{(0)}$  и  $w_0^{(0)}$  — прогиб связующего и волокна в нулевом приближении, соответственно.

Комплексные потенциалы  $\Phi^{(0)}(z)$  и  $\Psi^{(0)}(z)$  регулярны в области  $S_{0,0}$ , ограниченной контуром  $L_{0,0}$ , и, следовательно, могут быть представлены в виде [9]

$$\Phi_0^{(0)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}^{(0)} z^{2k}; \Psi_0^{(0)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k}^{(0)} z^{2k}. \quad (4)$$

Комплексные потенциалы  $\Phi^{(0)}(z)$  и  $\Psi^{(0)}(z)$  в рассматриваемом случае (изгиб на бесконечности) ищем [3] в виде

$$\Phi^{(0)}(z) = \alpha_0^0 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2}^0 \frac{\lambda^{2k+2} \gamma^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} - \frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4D(1+\nu)}; \quad (5)$$

$$\Psi^{(0)}(z) = \frac{1}{2} \frac{M_y^\infty - M_x^\infty}{D(1-\nu)} + \beta_0^0 +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2}^0 \frac{\lambda^{2k+2} \gamma^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2}^0 \frac{\lambda^{2k+2} Q^{(2k+1)}(z)}{(2k+1)!},$$

где  $\gamma(z)$  — эллиптическая функция Вейерштрасса,  $Q(z)$  — специальная мероморфная функция [10].

Из условия симметрии относительно координатных осей находим, что

$$\text{Im} \alpha_{2k}^0 = 0; \text{Im} \beta_{2k}^0 = 0, (k = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Из условий равенства нулю главного вектора и главного момента сил, действующих на дугу, соединяющую две конгруэнтные точки в области  $D$ , занятой материалом связующего, следует

$$\alpha_0^0 = (K_0 \alpha_2^0 + K_1 \beta_2^0) \lambda^2; \beta_0^0 = (K_2 \alpha_2^0 + K_3 \beta_2^0) \lambda^2.$$

Выражения для величин  $K_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) приведены в работе [10].

Можно убедиться, что представления (5) определяют класс симметричных задач с двоякопериодическим распределением напряжений.

Используя методы решения, изложенные в [10] и удовлетворяя (2), получим три бесконечные системы линейных алгебраических уравнений относительно  $\alpha_{2k}^0$ ,  $\beta_{2k}^0$  и  $A_{2k}^0$  (см. в [10] системы (3.16)–(3.19) второй главы). Здесь величины  $a_{2k}^{(0)}$  и  $b_{2k}^{(0)}$  находятся по формулам

$$a_{2k}^{(0)} = \frac{A_{2k}^0}{\lambda^{2k}}; a_0^{(0)} = \frac{A_0^0}{2};$$

$$b_{2k}^{(0)} = -(2k+1) \frac{A_{2k+2}^0}{\lambda^{2k}} - \frac{A_{2k+2}^0}{\lambda^{2k}}, (k = 1, 2, \dots).$$

Эти системы имеют громоздкий вид. Однако в большинстве практически важных случаев их можно урезать до двух трех уравнений и получить весьма точные результаты [10] для рабочих диапазонов изменения радиуса  $\lambda$ .

После нахождения решения в нулевом приближении можно перейти к решению задачи в первом приближении. На основании решения в нулевом приближении находятся функции  $f_1 + if_2$  и  $g_1 + ig_2$ . Комплексные потенциалы  $\Phi_0^{(1)}(z)$ ,  $\Psi_0^{(1)}(z)$  и  $\Phi^{(1)}(z)$ ,  $\Psi^{(1)}(z)$  ищутся в виде аналогичном (4), (5) с очевидными изменениями. Дальнейший ход решения граничной задачи (3) такой же, как в нулевом приближении. В результате получим формулы и системы линейных уравнений относительно  $a_{2k}^{(1)}$ ,  $b_{2k}^{(1)}$ ,  $\alpha_{2k}^{(1)}$ ,  $\beta_{2k}^{(1)}$

и  $A_{2k}^{(1)}$ . Полученные формулы и системы уравнений позволяют выразить  $a_{2k}^{(1)}$ ,  $b_{2k}^{(1)}$ ,  $\alpha_{2k}^{(1)}$ ,  $\beta_{2k}^{(1)}$  через коэффициенты  $d_{2k}$  разложения функции  $H(\theta)$  в первом приближении. При заданной функции  $H(\theta)$ , полученные алгебраические соотношения являются замкнутыми и позволяют найти напряженно-деформированное состояние композита для каждого профиля поперечного сечения волокна.

Рассмотрим задачу оптимального проектирования. Пусть требуется определить границу (функцию  $H(\theta)$ ) соединения связующего и волокна.

С помощью формул [9, 10]

$$M_\theta + M_\rho = -4D(1+\nu) \text{Re} \Phi(z);$$

$$M_\theta - M_\rho + 2iH_{\rho\theta} = 2D(1-\nu) [\bar{z} \Phi'(z) + \Psi(z)] e^{2i\theta},$$

используя полученное решение

$$\Phi(z) = \Phi^{(0)}(z) + \varepsilon \Phi^{(1)}(z); \Psi(z) = \Psi^{(0)}(z) + \varepsilon \Psi^{(1)}(z),$$

найдем изгибающий момент  $M_\theta$  на контуре  $\tau = \rho(\theta)$  связующего с точностью до величин первого порядка относительно малого параметра

$$M_{\theta|r=\rho(\theta)} = M_{\theta|r=\lambda}^{(0)} + \varepsilon \left[ \frac{\partial M_\theta^{(0)}}{\partial r} H(\theta) + M_\theta^{(1)} \right]_{r=\lambda}; \quad (6)$$

$$M_{\theta|r=\lambda}^{(0)} = \frac{1}{2} (M_x^\infty + M_y^\infty) + \frac{1}{2} (M_y^\infty - M_x^\infty) \cos 2\theta -$$

$$- 2D(1+\nu) \left( \alpha_0^0 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2}^0 \cos(2k+2)\theta + \right.$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2}^0 \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{2k+2j+2} r_{j,k} \cos 2j\theta \left. + D(1-\nu) (\beta_0^0 \cos 2\theta - \right.$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} (2k+2) \alpha_{2k+2}^0 \cos(2k+2)\theta +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{2k+2}^0 \lambda^{2k+2j+2} 2j r_{j,k} \cos 2j\theta + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2}^0 \cos 2k\theta +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \beta_{2k+2}^0 \lambda^{2k+2j+2} r_{j,k} \cos(2j+2)\theta -$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (2k+2) \alpha_{2k+2}^0 \lambda^{2k+2j+2} S_{j,k} \cos(2j+2)\theta \right);$$

$$M_{\theta|r=\lambda}^{(1)} = -2D(1+\nu) \left( \alpha_0^{(1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2}^{(1)} \cos(2k+2)\theta + \right.$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2}^{(1)} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{2k+2j+2} r_{j,k} \cos 2j\theta \left. + \right.$$

$$+ D(1-\nu) \left( \beta_0^{(1)} \cos 2\theta - \sum_{k=0}^{\infty} (2k+2) \alpha_{2k+2}^{(1)} \cos(2k+2)\theta + \right.$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2}^{(1)} \cos 2k\theta + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \beta_{2k+2}^{(1)} \lambda^{2k+2j+2} r_{j,k} \cos(2j+2)\theta -$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (2k+2) \alpha_{2k+2}^{(1)} \lambda^{2k+2j+2} S_{j,k} \cos(2j+2)\theta \right).$$

В формуле (6) коэффициенты  $\alpha_{2k}^{(1)}$  и  $\beta_{2k}^{(1)}$  зависят от величин  $d_{2k}$  ряда Фурье искомой функции  $H(\theta)$ .

Для построения недостающих уравнений, позволяющих определить  $d_{2k}$ , необходимо, чтобы обеспечивалась минимизация напряжений на контуре  $L'_{0,0}$ . Оптимальное проектирование осуществляем путем минимизации критерия

$$\sum_{k=1}^M [M_{\theta}(\theta_i) - M_*]^2 \rightarrow \min,$$

где  $M_*$  — оптимальное значение изгибающего момента на границе раздела сред, которое надо определить.

Разбиваем отрезок  $[0, 2\pi]$  на  $N$  равных частей. В узлах разбиения  $\theta_i$  вычисляем значения функции  $M_{\theta}(\theta_i)$ . Функция  $M_{\theta}(\theta_i)$  линейно зависит от управляющих переменных  $d_{2k}$  и  $M_*$ . Согласно методу наименьших квадратов наилучшими коэффициентами  $d_{2k}$  и  $M_*$

будут те, для которых функция  $U = \sum_{i=1}^N [M_{\theta}(\theta_i) - M_*]^2$

будет принимать минимальные значения. Используя необходимое условие экстремума функции нескольких переменных, получаем бесконечную линейную систему уравнений для определения  $d_{2k}$  и  $M_*$

$$\frac{\partial U}{\partial M_*} = 0; \frac{\partial U}{\partial d_{2k}} = 0, (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (7)$$

Система уравнений упрощается, так как функция  $M_{\theta}(\theta, d_{2k})$  линейна относительно параметров  $d_{2k}$ .

**Анализ результатов.** Система уравнений (7) совместно с системами для  $\alpha_{2k}^0, \beta_{2k}^0, A_{2k}^0, a_{2k}^{(0)}, b_{2k}^{(0)}$  и их аналогами в первом приближении позволяет определить равнопрочную форму раздела сред, напряженно-деформированное состояние композита, а также оптимальное значение изгибающего момента  $M_*$  на контуре раздела сред. Полученные системы относительно  $\alpha_{2k}^0, \beta_{2k}^0$  и  $A_{2k}^0$  весьма громоздки. Так как  $0 < \lambda < 1$ , а параметр  $\lambda$  в высоких степенях входит в данные системы, то их можно значительно упростить. При решении большинства важных практических задач каждую из этих систем можно урезать до двух-трех уравнений и получить достаточно точные результаты для рабочих диапазонов радиуса  $\lambda$ .

Для численной реализации изложенного способа совместно решали упомянутые системы. Использовали метод урезания алгебраических систем. Исследовали односторонний изгиб составной пластины постоянными моментами  $M_y^{\infty} (M_x^{\infty} = 0)$  и всесторонний изгиб моментами  $M_x^{\infty} = M_y^{\infty} = M$  для правильных нормированных решеток. Урезанные системы уравнений решали методом Гаусса с выбором главного элемента в зависимости от радиуса  $\lambda$ .

В таблице 1 приведены результаты расчетов коэффициентов  $d_{2k}$  при различных значениях радиуса отверстий для квадратной сетки отверстий ( $\omega_1 = 2, \omega_2 = 2i$ ), в таблице 2 — для треугольной

Таблица 1 — Результаты расчета коэффициентов  $d_{2k}$  для квадратной сетки отверстий

$\lambda$	$d_0$		$d_4$		$d_8$		$d_{12}$	
	ОИ	ВИ	ОИ	ВИ	ОИ	ВИ	ОИ	ВИ
0,2	0,087	0,079	0,056	0,051	0,023	0,019	0,009	0,006
0,3	0,113	0,108	0,072	0,068	0,029	0,021	0,011	0,007
0,4	0,142	0,128	0,093	0,081	0,044	0,020	0,013	0,011
0,5	0,163	0,151	0,107	0,094	0,046	0,027	0,016	0,013
0,6	0,185	0,169	0,114	0,098	0,053	0,036	0,019	0,016
0,7	0,198	0,190	0,122	0,105	0,061	0,047	0,024	0,021

Примечание: ОИ — односторонний изгиб; ВИ — всесторонний изгиб.

Таблица 2 — Результаты расчета коэффициентов  $d_{2k}$  для треугольной сетки отверстий

$\lambda$	$d_0$		$d_6$		$d_{12}$		$d_{18}$	
	ОИ	ВИ	ОИ	ВИ	ОИ	ВИ	ОИ	ВИ
0,2	0,073	0,065	0,045	0,039	0,022	0,013	0,007	0,004
0,3	0,098	0,081	0,069	0,054	0,027	0,021	0,011	0,006
0,4	0,126	0,109	0,083	0,071	0,039	0,028	0,014	0,011
0,5	0,149	0,130	0,088	0,082	0,047	0,036	0,017	0,014
0,6	0,161	0,148	0,103	0,095	0,056	0,041	0,023	0,018
0,7	0,178	0,161	0,117	0,103	0,071	0,059	0,031	0,024

сетки отверстий ( $\omega_1 = 2, \omega_2 = 2 \exp(i\pi/3)$ ). В расчетах было принято для связующего —  $\nu = 0,3$ ;  $\mu = 2,5 \cdot 10^5$  МПа; для включения —  $\nu_0 = 0,32$ ;  $\mu_0 = 3,6 \cdot 10^5$  МПа.

Аналогично задача может быть рассмотрена для иных критериев выбора формы границы раздела сред.

Следует отметить, что значение  $M_*$  можно выбирать заранее из условия обеспечения несущей способности связующего. Однако расчеты показывают, что при определении неизвестного оптимального значения  $M_*$  сумма квадратов отклонений уменьшается, т. е. результаты поиска оказываются более точными.

Оптимальное решение, т. е. найденные коэффициенты  $d_{2k}$  функции  $H(\theta)$ , способствует повышению несущей способности составной пластины.

**Заключение.** Предложен критерий и метод решения задачи по снижению концентрации напряжений в изгибаемой составной пластине (композите). Построена замкнутая система алгебраических уравнений, позволяющая получить решение задачи оптимального проектирования составной пластины (композита) в зависимости от геометрических и механических характеристик связующего и подкрепляющих волокон (включений). Найденная форма соединения материалов пластины обеспечивает минимизацию напряженного со-

стояния и повышает несущую способность составной пластины (композита).

Таким образом, результаты рассмотренной работы открывают новые возможности оптимального проектирования составных пластин (композитов) за счет выбора формы соединения связующего и волокон (включений).

#### Список обозначений

$\varepsilon$  — малый параметр;

$R_{\max}$  — наибольшая высота неровности профиля поверхности соединения материалов от окружности  $r = \lambda$ ;

$M_{x^2}, M_{y^2}, M_{xy}$  — удельные изгибающие и крутящие моменты;

$\rho(\theta)$  — функция, описывающая контур соединения материалов;

$d_{2k}$  — коэффициенты разложения ряда Фурье искомой функции поверхности соединения материалов;

$\Phi(z), \Psi(z)$  и  $\Phi_0(z), \Psi_0(z)$  — комплексные потенциалы;

$z$  — комплексная переменная;

$D$  — цилиндрическая жесткость связующего;

$D_0$  — цилиндрическая жесткость включения;

$\nu$  — коэффициент Пуассона материала связующего;

$\nu_0$  — коэффициент Пуассона материала включения;

$M_*$  — оптимальное значение изгибающего момента на границе раздела сред.

#### Список литературы

1. Решетов, Д.Н. Состояние и тенденции развития деталей машин / Д.Н. Решетов // Вестн. машиностроения. — 2000. — № 10. — С. 11–15.
2. Фудзии, Т. Механика разрушения композиционных материалов / Т. Фудзии, М. Дзако. — М.: Мир, 1982. — 232 с.
3. Mirsalimov, V.M. The breaking crack build-up in perforated planes by uniform ring switching / V.M. Mirsalimov, E.A. Allahyarov // Int. J. Fracture. — 1996. — Vol. 79, No 1. — Pp. 17–21.
4. Гаджиев, Г.Х. Обратная задача механики разрушения для составного цилиндра контактной пары / Г.Х. Гаджиев, В.М. Мирсалимов // Проблема механики: сб. ст. к 90-летию со дня рождения А.Ю. Ишлинского / под ред. Д.М. Климова. — М.: Физматлит, 2003. — С. 196–207.
5. Гаджиев, Г.Х. Минимизация параметров разрушения составного цилиндра контактной пары / Г.Х. Гаджиев, В.М. Мирсалимов // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород: сб. ст. к 75-летию со дня рождения Е.И. Шемякина / под ред. Д.Д. Ивлева, Н.Ф. Морозова. — М.: Физматлит, 2006. — С. 115–134.
6. Mirsalimov, V.M. Inverse theory of elasticity problem of mounting a disk on a rotating shaft / V.M. Mirsalimov // J. of Machinery Manufacture and Reliability. — 2007. — Vol. 36, No 1. — Pp. 35–38.
7. Мирсалимов, В.М. Обратная задача механики разрушения для составного цилиндра / В.М. Мирсалимов // Изв. РАН. Механика твердого тела. — 2009. — № 1. — С. 165–173.
8. Мирсалимов, В.М. Минимизация параметров разрушения в составном теле / В.М. Мирсалимов, К.С. Мамедова // Механика машин, механизмов и материалов. — 2012. — № 2(19). — С. 65–68.
9. Мухелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мухелишвили. — М.: Наука, 1966. — 707 с.
10. Григолюк, Э.И. Перфорированные пластины и оболочки / Э.И. Григолюк, Л.А. Фильштинский. — М.: Наука, 1970. — 556 с.

Mirsalimov V.M., Askarov V.A.

#### Inverse doubly periodic problem of the theory beading of plates for the composite reinforced with unidirectional fibres

On the basis of a principle balanced life the problem by definition of the optimum form of cross section of the elastic inclusions (fibres), provided decrease in concentration of stresses in a bent plate is solved. The found form of cross-section section of fibres provides increase of bearing ability of a compound plate.

**Keywords:** elastic compound plate, joining, inclusions, beading, minimization of strains

Поступила в редакцию 19.11.2013.