

УДК 539.3, 539.4

С.Л. ГАВРИЛЕНКО; С.В. ШИЛЬКО, канд. техн. наук
Институт механики металлополимерных систем им. В.А. Белого НАН Беларуси, г. Гомель**АНАЛИЗ ПРОЧНОСТИ СФЕРИЧЕСКИХ ГРАНУЛ МЕТОДАМИ
МЕХАНИКИ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ**

На основе решений задач о сжатии диска единичной толщины диаметрально противоположными усилиями и упругой сферы жесткими плитами с привлечением критерия Губера–Мизеса оценивается прочность гранул, имеющих форму, близкую к сферической. Разрушающее напряжение, соответствующее потере сплошности гранулы, выявляется по первому значительному падению усилия на диаграмме сжатия. Расчетные оценки для гранул капсулированных удобрений свидетельствуют о том, что повторное дражирование семян способствует значительному (около 30 %) повышению прочности.

Ключевые слова: сферические гранулы, дражирование, прочность, линейно-упругая модель, критерий Губера–Мизеса, задача Герца

Введение. Гранулированные материалы представляют собой разновидность дисперсных материалов, к которым относятся частицы и конгломераты частиц минерального сырья (песок, гравий, уголь, калийные и другие соли), полимерный гранулят термопластов для их переработки в изделия, семенной материал, пищевые продукты и т. д. Повсеместное и крупнотоннажное использование гранулятов обусловлено простой дозировки, смешения, транспортировки и переработки. Вместе с тем, при выполнении перечисленных технологических операций в результате контактного взаимодействия недостаточно прочных гранул между собой и рабочими поверхностями оборудования и инструмента происходит разрушение отдельных частиц, что меняет гранулометрический состав, снижает качество продукта, приводит к образованию пыли и другим негативным последствиям.

В частности, в растениеводстве получает распространение капсулированные удобрения и посевной материал в виде дражированных, т. е. заключенных в оболочку из комплексного минерального удобрения, семян растений. Многократные соударения в контейнерах сельскохозяйственных машин приводят к повреждению гранул и снижению качества посевного материала.

Целью настоящей работы является оценка и анализ прочности гранул в виде дражированных семян на основе механических испытаний и расчета напряженно-деформированного состояния отдельной гранулы. В частности, представляет интерес исследование влияния способа дражирования на прочность гранулы.

Критерий прочности. Для определения величины критического напряжения, приводящего к разрушению гранул, воспользуемся критерием прочности Губера–Мизеса, основой которого является предположение о равенстве удельной энергии изменения формы эквивалентного и исследуемого напряженных состояний [1]

$$\sigma_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \left((T_{11} - T_{22})^2 + (T_{22} - T_{33})^2 + (T_{11} - T_{33})^2 + 6(T_{12}^2 + T_{13}^2 + T_{23}^2) \right)^{0.5},$$

где T_{ij} — тензор напряжения по Коши.

В дальнейших расчетах подразумевалось, что гранулы имеют сферическую форму. Исследовались гранулы, отличающиеся способом дражирования семян (одно- и двухслойные). Деформационные свойства слоев считали идентичными. Так как толщина слоев комплексного минерального удобрения значительно превышает размер семян, свойства последних считали такими же, что и материала оболочек.

Упрощенная методика определения прочности сферической гранулы. Для ориентировочной оценки прочности гранул рассмотрим вначале подход, не предусматривающий формулировку контактной задачи. Считая, что гранула имеет сферическую форму, выделим из сферы диск радиуса R единичной толщины, нагруженный равными диаметрально противоположными сосредоточенными силами (рисунок 1), и определим его напряженное состояние в предположении упругого деформирования материала.

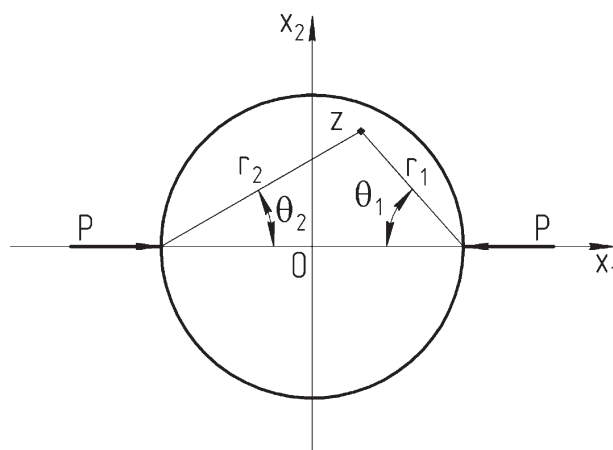


Рисунок 1 — Двумерная модель гранулы

Для вычисления компонент напряженного состояния воспользуемся известным решением задачи в напряжениях, приведенным в [4]

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -\frac{2P_{прив}}{\pi} \left(\frac{\cos^3 \theta_1}{r_1} + \frac{\cos^3 \theta_2}{r_2} - \frac{1}{2R} \right); \\ \sigma_{22} &= -\frac{2P_{прив}}{\pi} \left(\frac{\sin^2 \theta_1 \cos \theta_1}{r_1} + \frac{\sin^2 \theta_2 \cos \theta_2}{r_2} - \frac{1}{2R} \right); \\ \sigma_{12} &= \frac{2P_{прив}}{\pi} \left(\frac{\sin \theta_1 \cos^2 \theta_1}{r_1} - \frac{\sin \theta_2 \cos^2 \theta_2}{r_2} \right), \end{aligned}$$

где $P_{прив}$ — усилие на единицу толщины диска.

При нагружении сферы радиуса R усилием P , приводящим к сжатию диска на величину u , имеем

$$P_{прив} = \frac{P}{2\sqrt{R^2 - \left(R - \frac{u}{2}\right)^2}}.$$

Эквивалентное напряжение вычисляем по следующей зависимости:

$$\sigma_u^2 = \frac{3}{2} S_{ij} S_{ij},$$

где S_{ij} — девиатор тензора напряжений.

После подстановки имеем

$$\sigma_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{3}{2} (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 6\sigma_{12}^2}.$$

Учитывая локализацию максимального эквивалентного напряжения в точке приложения усилия, смещенного на глубину $u/2$, получим

$$\sigma_u = \sqrt{3} \frac{P_{прив}}{\pi} \left(\frac{2}{u} + \frac{1}{2R - \frac{u}{2}} \right).$$

Для определения максимального эквивалентного напряжения на машине INSTRON 5567 были проведены испытания одно- и двухслойных гранул, полученных дражированием семян сосны обыкновенной. Для дражирования (капсулирования семян комплексным удобрением) использовали состав на основе органических (торф) и минеральных (глина) веществ. Содержание компонентов следующее: 1) органические вещества — 58 мас. %, минеральные вещества — 6 мас. %, натриевая соль карбоксиметилцеллюлозы — 8 мас. %, стимулятор роста (эпин) — 5 мас. %, остальное — вода. Размер частиц композиционного препарата — 350 мкм. Характерные зависимости «усилие — перемещение» при статическом сжатии гранул, отличающихся способом дражирования, представлены на рисунках 2, 3.

Разрушающее напряжение выбиралось по началу потери сплошности гранулы, которое проявляется первым значительным падением усилия на диаграмме сжатия. Исходные данные и результаты расчетов представлены в таблицах 1, 2.

Методика оценки максимального эквивалентного напряжения (по Мизесу) в сферической грануле на основе решения контактной задачи Герца. Уточнен-

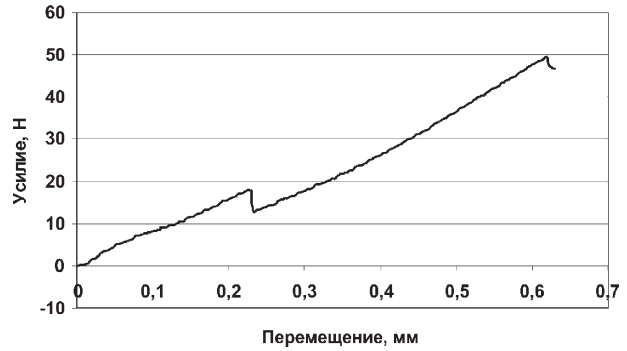


Рисунок 2 — Зависимость «усилие — перемещение» при сжатии двухслойной гранулы

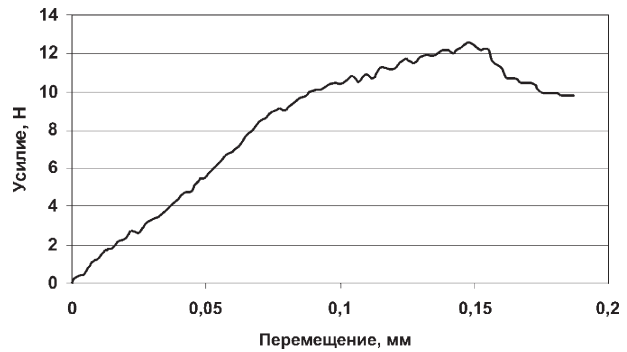


Рисунок 3 — Зависимость «усилие — перемещение» при сжатии однослойной гранулы

ное исследование напряженно-деформированного состояния гранул, очевидно, предполагает привлечение теории контактного взаимодействия твердых тел [2, 3]. Изложенные выше механические испытания приводят к рассмотрению осесимметричной контактной задачи, схема которой показана на рисунке 4.

В соответствии с решением задачи Герца о сжатии упругого шара жесткими плитами, при котором пятно контакта имеет форму окружности радиуса a , воспользуемся зависимостями, приведенными, в частности, в [4]:

1. Распределение давления внутри пятна контакта описывается выражением

$$P(x, y) = \frac{3F}{2\pi a^2} \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2}}.$$

2. Эффективный упругий модуль K определяется через модуль Юнга и коэффициент Пуассона согласно следующей зависимости:

$$K = \frac{4}{3} \left(\frac{E}{1 - \nu^2} \right).$$

3. Согласно решению задачи Герца [4–6], основные параметры контакта: осадка h , сжимающее усилие F , радиус пятна контакта a и эффективный упругий модуль K связаны следующими аналитическими зависимостями:

$$h = \frac{F}{\pi K} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(a^2 + \xi)^2 \xi^{0,5}}; \quad A = \frac{F}{\pi K} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(a^2 + \xi)^2 \xi^{0,5}},$$

Таблица 1 — Исходные данные и результаты расчетов для двухслойной гранулы

№ испытания	R, мм	u _{max} , мм	P _{max} , Н	P _{прив} , Н/мм	σ _a , МПа	Δσ _a , %
1	2,05	0,28	26,4	17,7	72,2	5,0
2	1,85	0,22	18,1	14,4	74,4	8,1
3	2,25	0,28	21,6	13,8	56,1	18,5
4	2,05	0,082	14,4	17,6	239,1	—
5	1,85	0,22	17,6	14,0	72,4	5,2
Среднее значение	2,01	0,19	19,6	15,0	68,8	9,2

Таблица 2 — Исходные данные и результаты расчетов для однослойной гранулы

№ испытания	R, мм	u _{max} , мм	P _{max} , Н	P _{прив} , Н/мм	σ _a , МПа	Δσ _a , %
1	2,00	0,16	8,8	7,9	61,9	2,5
2	2,10	0,17	13,7	11,6	76,8	27,2
3	2,05	0,20	9,6	7,6	42,9	28,9
4	2,05	0,19	12,5	10,1	60,0	0,6
5	2,25	0,13	12,6	11,7	100,7	—
Среднее значение	2,09	0,17	11,4	9,3	60,4	14,8

где A — геометрический параметр, равный $A = \frac{1}{2} \frac{1}{r}$, r — радиус сферической гранулы.

4. Осадка h связана с максимальным перемещением u, соответствующим моменту разрушения сферической гранулы, зависимостью $h = \frac{u}{2}$.

5. Поле напряжений внутри сферической гранулы определяется следующими соотношениями

[5, 6] (далее принято $b = a \left(1 - \frac{\xi_1^2}{a^2}\right)^{0,5}$):

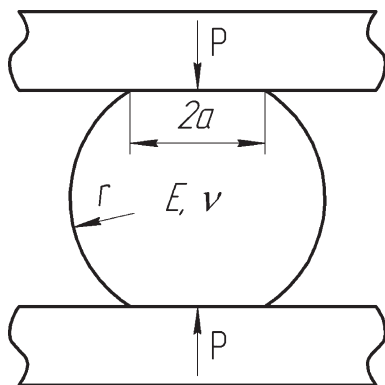


Рисунок 4 — Схема механических испытаний сферической гранулы при статическом сжатии

$$T_{11}^1(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{P(\xi_1, \xi_2)}{R_1^3} \left((1-2\nu)z - 3z \frac{(x-\xi_1)^2}{R_1^2} \right) d\xi_1 d\xi_2;$$

$$T_{11}^2(x, y, z) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{P(\xi_1, \xi_2)}{R_2^3} \left((1-2\nu)(2r-z) - 3(2r-z) \frac{(x-\xi_1)^2}{R_2^2} \right) d\xi_1 d\xi_2;$$

$$T_{11}(x, y, z) = T_{11}^1(x, y, z) + T_{11}^2(x, y, z);$$

$$T_{22}^1(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{P(\xi_1, \xi_2)}{R_1^3} \left((1-2\nu)z - 3z \frac{(y-\xi_2)^2}{R_1^2} \right) d\xi_1 d\xi_2;$$

$$T_{22}^2(x, y, z) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{P(\xi_1, \xi_2)}{R_2^3} \left((1-2\nu)(2r-z) - 3(2r-z) \frac{(y-\xi_2)^2}{R_2^2} \right) d\xi_1 d\xi_2;$$

$$T_{22}(x, y, z) = T_{22}^1(x, y, z) + T_{22}^2(x, y, z);$$

$$T_{33}^1(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{P(\xi_1, \xi_2)}{R_1^3} \left((1-2\nu)z - 3z^3 \frac{1}{R_1^2} \right) d\xi_1 d\xi_2;$$

$$T_{33}^2(x, y, z) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{P(\xi_1, \xi_2)}{R_2^3} \left((1-2\nu)(2r-z) - 3(2r-z)^3 \frac{1}{R_2^2} \right) d\xi_1 d\xi_2;$$

$$T_{33}(x, y, z) = T_{33}^1(x, y, z) + T_{33}^2(x, y, z);$$

$$T_{12}^1(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{P(\xi_1, \xi_2)}{R_1^3} \left(\frac{6(x-\xi_1)(y-\xi_2)z}{R_1^2} \right) d\xi_1 d\xi_2;$$

$$T_{12}^2(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{P(\xi_1, \xi_2)}{R_2^3} \left(\frac{6(x-\xi_1)(y-\xi_2)z}{R_2^2} \right) d\xi_1 d\xi_2;$$

$$T_{12}(x, y, z) = T_{12}^1(x, y, z) + T_{12}^2(x, y, z);$$

$$T_{13}^1(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{P(\xi_1, \xi_2)}{R_1^3} \left((1-2\nu)2(x-\xi_1) + \frac{6(x-\xi_1)z^2}{R_1^2} \right) d\xi_1 d\xi_2;$$

$$T_{13}^2(x, y, z) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{P(\xi_1, \xi_2)}{R_2^3} \left((1-2\nu)2(x-\xi_1) - \frac{6(x-\xi_1)(2r-z)^2}{R_2^2} \right) d\xi_1 d\xi_2;$$

$$T_{13}(x, y, z) = T_{13}^1(x, y, z) + T_{13}^2(x, y, z);$$

$$T_{23}^1(x, y, z) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{P(\xi_1, \xi_2)}{R_1^3} \left((1-2\nu)2(y-\xi_2) + \frac{6(y-\xi_2)z^2}{R_1^2} \right) d\xi_1 d\xi_2;$$

$$T_{23}^2(x, y, z) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{P(\xi_1, \xi_2)}{R_2^3} \left((1-2\nu)2(y-\xi_2) + \frac{6(y-\xi_2)(2r-z)^2}{R_2^2} \right) d\xi_1 d\xi_2;$$

$$T_{23}(x, y, z) = T_{23}^1(x, y, z) + T_{23}^2(x, y, z),$$

где

$$R_1 = \left((x-\xi_1)^2 + (y-\xi_2)^2 + z^2 \right)^{0,5};$$

$$R_2 = \left((x-\xi_1)^2 + (y-\xi_2)^2 + (2r-z)^2 \right)^{0,5}.$$

Максимальное эквивалентное напряжение по критерию Губера–Мизеса определяется по следующей зависимости:

$$\sigma_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \left((T_{11} - T_{22})^2 + (T_{22} - T_{33})^2 + (T_{11} - T_{33})^2 + 6(T_{12}^2 + T_{13}^2 + T_{23}^2) \right)^{0,5}$$

Исходные данные и результаты расчета с привлечением решения контактной задачи Герца представлены в таблицах 3, 4.

Таблица 3 — Исходные данные и результаты расчета на прочность двухслойной гранулы на основе решения контактной задачи Герца

№ испытания	R, мм	u_{\max} , мм	P_{\max} , Н	σ_u , МПа	$\Delta\sigma_u$, %
1	2,05	0,28	26,4	22,9	9,5
2	1,85	0,22	18,1	22,3	6,6
3	2,25	0,28	21,6	17,1	18,2
4	2,05	0,082	14,4	38,3	—
5	1,85	0,22	17,6	21,6	3,3
Среднее значение	2,01	0,19	19,6	20,9	9,4

Таблица 4 — Исходные данные и результаты расчета на прочность однослойной гранулы на основе решения контактной задачи Герца

№ испытания	R, мм	u_{\max} , мм	P_{\max} , Н	σ_u , МПа	$\Delta\sigma_u$, %
1	2,00	0,16	8,8	13,7	9,8
2	2,10	0,17	13,7	19,1	25,7
3	2,05	0,20	9,6	11,7	23,0
4	2,05	0,19	12,5	16,1	5,9
5	2,25	0,13	12,6	20,7	—
Среднее значение	2,09	0,17	11,4	15,2	16,1

Заключение. Предложена методика расчетной оценки прочности сферических гранул по критерию Губера–Мизеса с использованием решения: 1) плоской задачи теории упругости о сжатии диаметрально противоположными силами диска единичной толщины и 2) решения контактной задачи Герца о сжатии сферы жесткими плитами. При сопоставлении с экспериментальными данными показана более высокая точность расчета на основе решения контактной задачи Герца.

Исследование прочности гранул в виде капсулированных удобрений, полученные в рамках вышеуказанных решений, показало, что повторное дражирование семян значительно увеличивает прочность гранул (например, исходя из решения контактной задачи — более чем на 30 %).

Работа выполнена при финансовом содействии БРФФИ (Проект T13KOPF-002).

Список обозначений

- T_{ij} — тензор напряжения по Коши;
- R — радиус сферы;
- $P_{\text{прив}}$ — усилие на единицу длины;
- σ_u — эквивалентное напряжение;
- u — перемещение, соответствующее моменту разрушения;
- $\Delta\sigma_u$ — относительная погрешность определения эквивалентного напряжения;
- a — радиус пятна контакта;
- K — эффективный упругий модуль;
- h — осадка;
- F — сжимающее усилие;
- A — геометрический параметр.

Список литературы

1. Филоненко-Бородич, М.М. Механические теории прочности / М.М. Филоненко-Бородич. — М.: МГУ, 1961. — 37 с.
2. Механика контактных взаимодействий. — М.: Физматлит, 2001. — 672 с.
3. Развитие теории контактных задач в СССР. — М.: Наука, 1976. — 493 с.
4. Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. — М.: Мир, 1989. — 509 с.
5. Демидов, С.П. Теория упругости / С.П. Демидов. — М.: Высш. шк., 1979. — 432 с.
6. Лурье, А.И. Теория упругости / А.И. Лурье. — М.: Наука, 1970. — 940 с.

Gavrilenko S.L., Shil'ko S.V.

Strength analysis of spherical granules using methods of mechanics of contact interaction

Based on Guber–Mizes criterion and solutions of problems for disk with unit thickness, pressing by two opposite forces, and elastic sphere under compression by two rigid plates, the strength of spherical granules are estimated. The ultimate stress, corresponding to failure beginning, is determines taking into account the first considerable reducing of force on compression diagram. The calculated estimates for granules of capsulated fertilizer show that repeating pelleting of seeds allows us to increase its strength essentially (about 30 %).

Keywords: spherical granules, pelleting, strength, line-spring model, Guber–Mizes criterion, Hertzian problem

Поступила в редакцию 10.04.2014.