



МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3; 534.2

Г.Р. ГУЛГАЗАРЯН, д-р физ.-мат. наук

профессор кафедры математического анализа и теории функций

E-mail: ghulgr@yahoo.com

Армянский государственный педагогический университет им. Х. Абовяна, г. Ереван, Республика Армения

Р.Г. ГУЛГАЗАРЯН, канд. физ.-мат. наук

ведущий инженер

E-mail: ghulgr@yahoo.com

ЗАО «Ментор Графикас Дивелопмент Сервисис», г. Ереван, Республика Армения

Г.И. МИХАСЕВ, д-р физ.-мат. наук

заведующий кафедрой био- и наномеханики

E-mail: mikhasev@bsu.by

Белорусский государственный университет, г. Минск, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 16.08.2015.

О СВОБОДНЫХ ИНТЕРФЕЙСНЫХ И КРАЕВЫХ КОЛЕБАНИЯХ ТОНКИХ УПРУГИХ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК СО СВОБОДНЫМ ТОРЦОМ

Исследуются свободные краевые и интерфейсные колебания полубесконечных замкнутых и незамкнутых цилиндрических оболочек, составленных из полубесконечных и конечных ортотропных тонких упругих цилиндрических оболочек с разными упругими свойствами. Используя систему динамических уравнений, соответствующих классической теории ортотропных цилиндрических оболочек, выводятся дисперсионные уравнения и асимптотические формулы для нахождения собственных частот краевых и интерфейсных колебаний составной цилиндрической оболочки. Установлены асимптотические связи между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и аналогичных задач для полубесконечной составной пластины и полубесконечной пластины-полосы соответственно. Приводится механизм, с помощью которого расчленяются возможные типы краевых и интерфейсных колебаний. На примерах цилиндрических оболочек с разными длинами конечной составляющей приведены приближенные значения безразмерной характеристики собственной частоты и характеристики затухания соответствующих форм колебаний.

Ключевые слова: интерфейсные колебания, собственные частоты, оболочка

Введение. Исследования колебательных процессов в составных оболочечных конструкциях занимают важное место в динамике деформируемого твердого тела. Это обусловлено как потребностями самой теории, так и практическими вопросами машиностроения, строительства, приборостроения, сейсморазведки и т. д. [1]. Во многих случаях объекты исследования представляют собой односторонние протяженные составные цилиндрические оболочки. Для тонких оболочек большое значение приобретает изучение собственных колебаний, локализованных у свободного края оболочки — кра-

евые колебания и локализованные у границы раздела свойств материала — интерфейсные колебания.

Начало исследования упругих поверхностных волн связано с работой Рэлея [2], в которой установлено существование упругих поверхностных волн, распространяющихся вдоль свободной границы полупространства с амплитудой, быстро убывающей с глубиной. Такие волны, возникающие у свободного края упругих тел различной геометрии, обычно называются поверхностными волнами типа Рэлея [3–5]. Вопрос существования собственных колебаний, затухающих от свободного торца

безмоментной цилиндрической оболочки вдоль направления ее образующих, изучены в [6–10]. Аналогичные задачи для тонких упругих (моментных) цилиндрических оболочек изучены в [11–17]. Начало исследования собственных интерфейсных колебаний связаны с работами [18–19], в которых исследуются аналоги волн Стоунли [20]. В работе [18] изучаются поперечные колебания, бегущие по линии контакта двух полубесконечных пластин, и сосредоточенные вблизи нее. В работе [19] численно исследованы плоские интерфейсные колебания у границы раздела двух состыкованных полуполос с различными упругими свойствами. Вопрос существования собственных интерфейсных и краевых колебаний безмоментных замкнутых и незамкнутых составных цилиндрических оболочек переменной кривизны изучен в [21–23]. В работе [11], используя специальный асимптотический метод, изучены собственные интерфейсные колебания составных круговых цилиндрических оболочек и оболочек вращения. В работе [24] исследованы свободные интерфейсные колебания бесконечных замкнутых и незамкнутых цилиндрических оболочек, составленных из двух полубесконечных ортотропных тонких упругих цилиндрических оболочек с разными упругими свойствами. Установлены асимптотические связи между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и аналогичных задач для бесконечной составной пластины и пластины-полосы при наличии шарнирного закрепления Навье на граничных образующих.

В настоящей работе изучаются собственные интерфейсные и краевые колебания тонких упругих замкнутых и незамкнутых полубесконечных цилиндрических оболочек, составленных из полубесконечных и конечных ортотропных цилиндрических оболочек с разными упругими коэффициентами. Предполагается, что у линии раздела свойств материала имеется полный контакт. В случае незамкнутой цилиндрической оболочки предполагается, что граничные образующие шарнирно закреплены.

Выводятся дисперсионные уравнения для определения собственных частот возможных типов интерфейсных и краевых колебаний для замкнутых и незамкнутых составных цилиндрических оболочек. Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и аналогичных задач для полубесконечной составной пластины и пластины-полосы при наличии шарнирного закрепления Навье на граничных образующих.

Из полученных ниже дисперсионных уравнений и асимптотических формул для них можно, меняя геометрию оболочек и механические свойства материала, управлять спектром, смещая начало спектра или точки сгущения из нежелательной области резонанса [25].

Постановка задачи и основные уравнения. Рассматриваются свободные интерфейсные и краевые коле-

бания замкнутой (незамкнутой) полубесконечной цилиндрической оболочки, составленной из конечной и полубесконечной ортотропных тонких упругих цилиндрических оболочек с разными упругими коэффициентами. Введем на срединной поверхности оболочки криволинейные координаты (α, β) , где $\alpha(-\infty < \alpha \leq l^{(1)})$ и $\beta(0 \leq \beta \leq s)$ являются соответственно ориентированной переменной длиной образующей и длиной дуги направляющей окружности, s — полная длина направляющей окружности (рисунки *a* и *b*). Здесь $\alpha = 0$ соответствует границе раздела свойств материала. Все величины, относящиеся к правой оболочке ($0 \leq \alpha \leq l^{(1)}$), отмечаются верхним индексом (1), к левой оболочке ($-\infty < \alpha \leq 0$) — индексом (2).

В качестве исходных уравнений, описывающих колебания левых и правых цилиндрических оболочек, используются уравнения, которые соответствуют классической теории ортотропных цилиндрических оболочек и записываются в выбранных криволинейных координатах α, β [26].

$$\begin{aligned}
 & -B_{11}^{(r)} \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial \alpha^2} - B_{66}^{(r)} \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial \beta^2} - (B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)}) \frac{\partial^2 u_2^{(r)}}{\partial \alpha \partial \beta} + \\
 & + \frac{B_{12}^{(r)}}{R} \frac{\partial u_3^{(r)}}{\partial \alpha} = \rho^{(r)} \omega^2 u_1^{(r)}; - (B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)}) \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial \alpha \partial \beta} - \\
 & - B_{66}^{(r)} \frac{\partial^2 u_2^{(r)}}{\partial \alpha^2} - B_{22}^{(r)} \frac{\partial^2 u_2^{(r)}}{\partial \beta^2} + \frac{B_{22}^{(r)}}{R} \frac{\partial u_3^{(r)}}{\partial \beta} - \\
 & - \frac{\mu^4}{R^2} \left(4B_{66}^{(r)} \frac{\partial^2 u_2^{(r)}}{\partial \alpha^2} + B_{66}^{(r)} \frac{\partial^2 u_2^{(r)}}{\partial \beta^2} \right) - \\
 & - \frac{\mu^4}{R} \left(B_{22}^{(r)} \frac{\partial^3 u_3^{(r)}}{\partial \beta^3} + (B_{12}^{(r)} + 4B_{66}^{(r)}) \frac{\partial^3 u_3^{(r)}}{\partial \beta \partial \alpha^2} \right) = \rho^{(r)} \omega^2 u_2^{(r)}; \tag{1.1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \mu^4 \left(B_{11}^{(r)} \frac{\partial^4 u_3^{(r)}}{\partial \alpha^4} + 2(B_{12}^{(r)} + 2B_{66}^{(r)}) \frac{\partial^4 u_3^{(r)}}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + B_{22}^{(r)} \frac{\partial^4 u_3^{(r)}}{\partial \beta^4} \right) + \\
 & + \frac{\mu^4}{R} \left(B_{22}^{(r)} \frac{\partial^3 u_2^{(r)}}{\partial \beta^3} + (B_{12}^{(r)} + 4B_{66}^{(r)}) \frac{\partial^3 u_2^{(r)}}{\partial \beta \partial \alpha^2} \right) - \\
 & - \frac{B_{12}^{(r)}}{R} \frac{\partial u_1^{(r)}}{\partial \alpha} - \frac{B_{22}^{(r)}}{R} \frac{\partial u_2^{(r)}}{\partial \beta} + \frac{B_{22}^{(r)}}{R^2} u_3^{(r)} = \rho^{(r)} \omega^2 u_3^{(r)},
 \end{aligned}$$

где $u_1^{(r)}, u_2^{(r)}, u_3^{(r)}$ ($r = 1, 2$) — проекции вектора перемещений соответственно в направлениях α, β и норма-

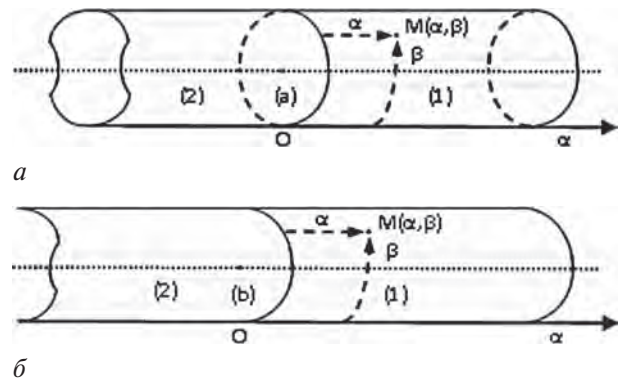


Рисунок — Полная длина направляющей окружности

ли к срединной поверхности оболочки; R — радиус направляющей окружности срединной поверхности; $\mu^4 = h^2 / 12$ (h — толщина оболочки); ω — угловая частота собственных колебаний; $\rho^{(r)}(r = 1, 2)$ — плотности материалов; $B_{ij}^{(r)}(r = 1, 2)$ — коэффициенты упругости составляющих оболочек.

Рассматриваются следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} T_1^{(1)} \Big|_{\alpha=0} &= T_1^{(2)} \Big|_{\alpha=0}; S_{12}^{(1)} + \frac{H^{(1)}}{R} \Big|_{\alpha=0} = S_{12}^{(2)} + \frac{H^{(2)}}{R} \Big|_{\alpha=0}; \\ M_1^{(1)} \Big|_{\alpha=0} &= M_1^{(2)} \Big|_{\alpha=0}; N_1^{(1)} + \frac{\partial H^{(1)}}{\partial \beta} \Big|_{\alpha=0} = N_1^{(2)} + \frac{\partial H^{(2)}}{\partial \beta} \Big|_{\alpha=0}; \\ u_1^{(1)} \Big|_{\alpha=0} &= u_1^{(2)} \Big|_{\alpha=0}; u_2^{(1)} \Big|_{\alpha=0} = u_2^{(2)} \Big|_{\alpha=0}; u_3^{(1)} \Big|_{\alpha=0} = u_3^{(2)} \Big|_{\alpha=0}; \\ &\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}; \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} T_1^{(1)} \Big|_{\alpha=l^{(1)}} &= 0, S_{12}^{(1)} + \frac{H^{(1)}}{R} \Big|_{\alpha=l^{(1)}} = 0; \\ M_1^{(1)} \Big|_{\alpha=l^{(1)}} &= 0, N_1^{(1)} + \frac{\partial H^{(1)}}{\partial \beta} \Big|_{\alpha=l^{(1)}} = 0; \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$u_i^{(r)}(\alpha, \beta) = u_i^{(r)}(\alpha, \beta + s), i = 1, 2, 3; \quad (1.4)$$

$$T_2^{(r)} \Big|_{\beta=0,s} = u_1^{(r)} \Big|_{\beta=0,s} = u_3^{(r)} \Big|_{\beta=0,s} = M_2^{(r)} \Big|_{\beta=0,s} = 0, \quad (1.5)$$

где

$$\begin{aligned} T_1^{(r)} &= h B_{11}^{(r)} \left[\frac{\partial u_1^{(r)}}{\partial \alpha} + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \left(\frac{\partial u_2^{(r)}}{\partial \beta} - \frac{u_3^{(r)}}{R} \right) \right]; \\ M_1^{(r)} &= \frac{h^3}{12} B_{11}^{(r)} \left[\frac{\partial^2 u_3^{(r)}}{\partial \alpha^2} + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \left(\frac{\partial^2 u_3^{(r)}}{\partial \beta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_2^{(r)}}{\partial \beta} \right) \right]; \\ T_2^{(r)} &= h B_{22}^{(r)} \left[\frac{B_{12}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} \frac{\partial u_1^{(r)}}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_2^{(r)}}{\partial \beta} - \frac{u_3^{(r)}}{R} \right]; \\ M_2^{(r)} &= \frac{h^3}{12} B_{22}^{(r)} \left[\frac{B_{12}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} \frac{\partial^2 u_3^{(r)}}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u_3^{(r)}}{\partial \beta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_2^{(r)}}{\partial \beta} \right]; \\ S_{12}^{(r)} + \frac{H^{(r)}}{R} &= h B_{66}^{(r)} \left[\frac{\partial u_1^{(r)}}{\partial \beta} + \frac{\partial u_2^{(r)}}{\partial \alpha} + \frac{h^2}{3R} \left(\frac{\partial^2 u_3^{(r)}}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_2^{(r)}}{\partial \alpha} \right) \right]; \\ N_1^{(r)} + \frac{\partial H^{(r)}}{\partial \beta} &= \frac{h^3}{12} B_{11}^{(r)} \times \\ &\times \left[\frac{\partial^3 u_3^{(r)}}{\partial \alpha^3} + \frac{B_{12}^{(r)} + 4B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \left(\frac{\partial^3 u_3^{(r)}}{\partial \alpha \partial \beta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_2^{(r)}}{\partial \alpha \partial \beta} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Граничные условия (1.2)–(1.4) соответствуют замкнутой цилиндрической оболочке: соотношения (1.2) выражают условия полного контакта при $\alpha = 0$, условия (1.3) — условиями свободного края при $\alpha = l^{(1)}$, а (1.4) — условия периодичности колебания, где s — полная длина направляющей окружности срединной по-

верхности (см. рисунок *a*). Граничные условия (1.2)–(1.3), (1.5) соответствуют цилиндрической оболочке открытого профиля: соотношения (1.5) являются условиями шарнирного закрепления по образующим $\beta = 0$ и $\beta = s$, где s — длина дуги окружности срединной поверхности между шарнирно закрепленными образующими (см. рисунок *b*).

Вывод дисперсионных уравнений. В первом, втором и третьем уравнениях системы (1.1) угловую частоту ω формально заменим на $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ соответственно. Вводятся обозначения: $k = 2\pi n_0 / s, n_0 \in N$ для замкнутой цилиндрической оболочки и $k = \pi / s$ для цилиндрической оболочки открытого профиля. Пусть $R^{-1} = k r_0 / 2$, где r_0 — безразмерный параметр. Решение системы (1.1) ищется в виде:

$$\begin{aligned} &(u_1^{(r)}, u_2^{(r)}, u_3^{(r)}) = \\ &= (u_m^{(r)} \sin km\beta, v_m^{(r)} \cos km\beta, \sin km\beta) \exp((-1)^r \chi^{(r)} k \alpha), \quad (2.1) \\ &m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

где m — волновое число; $u_m^{(r)}, v_m^{(r)}$ — неопределенные коэффициенты; $\chi^{(r)}$ — неопределенный коэффициент затухания. При этом условия (1.4) и (1.5) выполняются автоматически и поставленные задачи решаются аналогичным образом, если придавать параметру k разные значения. Подставляя выражения (2.1) в систему (1.1), получим:

$$\begin{aligned} (c_m^{(r)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_m^{(r)} d_m^{(r)}) u_m^{(r)} &= \frac{(-1)^r \chi^{(r)} r_0}{2} \times \\ &\times \left[a_m^{(r)} - a^2 m^2 \frac{B_{22}^{(r)} (B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)})}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} l_m^{(r)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 \frac{B_{12}^{(r)} B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} d_m^{(r)} \right]; \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$(c_m^{(r)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_m^{(r)} d_m^{(r)}) v_m^{(r)} = \frac{r_0^2 m}{2} \{ b_m^{(r)} - a^2 g_m^{(r)} l_m^{(r)} \}; \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} R_{mm}^{(r)} c_m^{(r)} + \frac{r_0^2}{4} \left\{ c_m^{(r)} + m^2 b_m^{(r)} - \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} (\chi^{(r)})^2 a_m^{(r)} + \right. \\ \left. + a^2 (R_{mm}^{(r)} g_m^{(r)} d_m^{(r)} - 2m^2 l_m^{(r)} b_m^{(r)}) \right\} + \\ + \frac{r_0^2}{4} a^2 d_m^{(r)} \left(b_m^{(r)} + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\chi^{(r)})^2 \right) + a^4 m^2 g_m^{(r)} (l_m^{(r)})^2 \Big\} = 0; \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} a_m^{(r)} &= \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\chi^{(r)})^2 + \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} m^2 + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_2^{(r)})^2; \\ b_m^{(r)} &= B_{11}^{(r)} (\chi^{(r)})^2 - \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} m^2 + \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_1^{(r)})^2; a^2 = \mu^4 k^2; \\ c_m^{(r)} &= (\chi^{(r)})^4 - B_{22}^{(r)} (\chi^{(r)})^2 m^2 + \left(\frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_1^{(r)})^2 + (\eta_2^{(r)})^2 \right) \times \\ &\times (\chi^{(r)})^2 + \left(m^2 - (\eta_1^{(r)})^2 \right) \left(\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} m^2 - \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_2^{(r)})^2 \right); \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} d_m^{(r)} &= \frac{4B_{66}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} (\chi^{(r)})^2 - m^2; g_m^{(r)} = \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{66}^{(r)}} (\chi^{(r)})^2 - \\ &- \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \left(m^2 - (\eta_1^{(r)})^2 \right); l_m^{(r)} = \frac{B_{12}^{(r)} + 4B_{66}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} (\chi^{(r)})^2 - m^2; \end{aligned}$$

$$R_{mm}^{(r)} = a^2 \left(\frac{B_{11}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} (\chi_j^{(r)})^4 - \frac{2(B_{12}^{(r)} + 2B_{66}^{(r)})}{B_{22}^{(r)}} (\chi_j^{(r)})^2 + m^4 \right) - \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} (\eta_3^{(r)})^2; \quad (\eta_i^{(r)})^2 = \frac{\lambda_i^{(r)}}{B_{66}^{(r)} k^2}, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$B_1^{(r)} = \frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}};$$

$$B_2^{(r)} = \frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - 2B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}}.$$

Пусть $\chi_j^{(r)}$ ($j=1,2,3,4$) — попарно различные нули уравнения (2.4) с положительными действительными частями, тогда $\chi_j^{(r)} = -\chi_{j+4}^{(r)}$, $j=1, 2, 3, 4$ — также попарно различные нули этого уравнения. Пусть $(u_{1j}^{(r)}, u_{2j}^{(r)}, u_{3j}^{(r)})$ — нетривиальные решения вида (2.1) системы (1.1) при $\chi_j^{(r)} = \chi_j^{(r)}$ ($j=1,2,\dots,8$) соответственно. Представляя решения задач (1.1)–(1.4) и (1.1)–(1.3), (1.5) в виде:

$$u_i^{(r)} = \sum_{j=1}^8 w_j^{(r)} u_{ij}^{(r)}, \quad i = 1, 2, 3, \quad r = 1, 2, \quad (2.6)$$

и учитывая граничные условия (1.2)–(1.3), получим систему уравнений:

$$\sum_{j=1}^8 \frac{M_{ij}^{(1)} w_j^{(1)}}{c_{mj}^{(1)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_{mj}^{(1)} d_{mj}^{(1)}} - \sum_{j=1}^4 \frac{c M_{ij}^{(2)} w_j^{(2)}}{c_{mj}^{(2)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_{mj}^{(2)} d_{mj}^{(2)}} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4;$$

$$\sum_{j=1}^8 \frac{M_{ij}^{(1)} w_j^{(1)}}{c_{mj}^{(1)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_{mj}^{(1)} d_{mj}^{(1)}} - \sum_{j=1}^4 \frac{M_{ij}^{(2)} w_j^{(2)}}{c_{mj}^{(2)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_{mj}^{(2)} d_{mj}^{(2)}} = 0, \quad i = 5, 6, 7, 8; \quad (2.7)$$

$$\sum_{j=1}^8 \frac{M_{ij}^{(1)} \exp(z_j) w_j^{(1)}}{c_{mj}^{(1)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_{mj}^{(1)} d_{mj}^{(1)}} = 0, \quad i = 9, 10, 11, 12,$$

здесь

$$M_{1j}^{(r)} = (\chi_j^{(r)})^2 a_{mj}^{(r)} - \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} m^2 b_{mj}^{(r)} - \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} c_{mj}^{(r)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 \frac{B_{12}^{(r)} B_{22}^{(r)}}{(B_{11}^{(r)})^2} d_{mj}^{(r)} \left(m^2 - (\eta_1^{(r)})^2 \right) - a^2 m^2 \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} I_{mj}^{(r)} \left((\chi_j^{(r)})^2 + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} m^2 - \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_1^{(r)})^2 \right);$$

$$M_{2j}^{(r)} = (-1)^r \chi_j^{(r)} m \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \left\{ a_{mj}^{(r)} + b_{mj}^{(r)} + a^2 \left[4c_{mj}^{(r)} - I_{mj}^{(r)} \left(\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{66}^{(r)}} (\chi_j^{(r)})^2 + \frac{B_{12}^{(r)} B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} m^2 + \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_1^{(r)})^2 \right) \right] + \frac{r_0^2}{4} a^2 \left(4b_{mj}^{(r)} + \frac{B_{12}^{(r)} B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} d_{mj}^{(r)} - 4a^2 \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} (\chi_j^{(r)})^2 g_{mj}^{(r)} \right) \right\};$$

$$M_{3j}^{(r)} = \left((\chi_j^{(r)})^2 - \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} m^2 \right) c_{mj}^{(r)} + \frac{r_0^2}{4} \left[a^2 (\chi_j^{(r)})^2 g_{mj}^{(r)} \left(\frac{4B_{66}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} (\chi_j^{(r)})^2 - \frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2}{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)}} m^2 \right) - \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} m^2 b_{mj}^{(r)} \right];$$

$$M_{4j}^{(r)} = (-1)^r \chi_j^{(r)} \left\{ \left((\chi_j^{(r)})^2 - \frac{B_{12}^{(r)} + 4B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} m^2 \right) c_{mj}^{(r)} + \frac{r_0^2}{4} \left[a^2 (\chi_j^{(r)})^2 g_{mj}^{(r)} d_{mj}^{(r)} - \frac{B_{12}^{(r)} + 4B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} m^2 b_{mj}^{(r)} + a^2 m^2 \frac{B_{12}^{(r)} (B_{12}^{(r)} + 4B_{66}^{(r)})}{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)}} g_{mj}^{(r)} (\chi_j^{(r)})^2 \right] \right\}, \quad c = \frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}};$$

$$M_{5j}^{(r)} = b_{mj}^{(r)} - a^2 g_{mj}^{(r)} I_{mj}^{(r)}; \quad M_{6j}^{(r)} = (-1)^r \chi_j^{(r)} \left\{ a_{mj}^{(r)} - a^2 m^2 \frac{B_{22}^{(r)} (B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)})}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} I_{mj}^{(r)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 \frac{B_{12}^{(r)} B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} d_{mj}^{(r)} \right\};$$

$$M_{7j}^{(r)} = c_{mj}^{(r)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_{mj}^{(r)} d_{mj}^{(r)}; \quad M_{8j}^{(r)} = (-1)^r \chi_j^{(r)} \left\{ c_{mj}^{(r)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_{mj}^{(r)} d_{mj}^{(r)} \right\}; \quad M_{9j}^{(1)} = M_{1j}^{(1)}; \quad M_{10j}^{(1)} = M_{2j}^{(1)}; \quad M_{11j}^{(1)} = M_{3j}^{(1)}; \quad M_{12j}^{(1)} = M_{4j}^{(1)}; \quad z_j = -\chi_j^{(1)} k l^{(1)}.$$

Нижний индекс j означает, что соответствующая функция взята при $\chi_j^{(r)} = \chi_j^{(r)}$. Чтобы система (2.7) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель равнялся нулю:

$$\Delta = \text{Det} \| T_{ij} \|_{i,j=1}^3 = 0; \quad (2.9)$$

$$T_{11} = \| M_{ij}^{(1)} \|_{i,j=1}^4; \quad T_{12} = \| M_{ij}^{(1)} \|_{i=1,j=5}^{4,8};$$

$$T_{13} = -c \| M_{ij}^{(2)} \|_{i,j=1}^4; \quad T_{21} = \| M_{ij}^{(1)} \|_{i=5,j=1}^{8,4}; \quad T_{22} = \| M_{ij}^{(1)} \|_{i,j=5}^8;$$

$$T_{23} = - \| M_{ij}^{(2)} \|_{i=5,j=1}^{8,4}; \quad T_{31} = \| M_{ij}^{(1)} \exp(z_j) \|_{i=9,j=1}^{12,4};$$

$$T_{32} = \| M_{ij}^{(1)} \exp(z_j) \|_{i=9,j=5}^{12,8}; \quad T_{33} = 0.$$

Численный анализ показывает, что левая часть равенства (2.9) становится малой, когда любые два корня уравнения (2.4) становятся близкими друг к другу. Это сильно усложняет расчеты и может привести к появлению ложных решений. Оказывается, что множитель в левой части равенства (2.9), стремящийся к нулю при сближении корней, можно выделить. Для этого вводятся обозначения:

$$\chi_j^{(r)} = \frac{\chi_j^{(r)}}{m}, \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad \eta_{mi}^{(r)} = \frac{\eta_i^{(r)}}{m}, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$\varepsilon_m = \frac{r_0}{2m}; \quad \delta_m = 1 + 4a^2 m^2 \varepsilon_m^2; \quad (2.11)$$

$$\sigma_1^{(r)} = \sigma_1^{(r)}(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}, x_4^{(r)}) = x_1^{(r)} + x_2^{(r)} + x_3^{(r)} + x_4^{(r)};$$

$$\begin{aligned} \sigma_2^{(r)} &= \sigma_1^{(r)}(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}, x_4^{(r)}) = x_1^{(r)}x_2^{(r)} + x_1^{(r)}x_3^{(r)} + \\ &+ x_1^{(r)}x_4^{(r)} + x_2^{(r)}x_3^{(r)} + x_2^{(r)}x_4^{(r)} + x_3^{(r)}x_4^{(r)}; \\ \sigma_3^{(r)} &= \sigma_1^{(r)}(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}, x_4^{(r)}) = x_1^{(r)}x_2^{(r)}x_3^{(r)} + \\ &+ x_1^{(r)}x_2^{(r)}x_4^{(r)} + x_1^{(r)}x_3^{(r)}x_4^{(r)} + x_2^{(r)}x_3^{(r)}x_4^{(r)}; \quad (2.12) \\ \sigma_4^{(r)} &= \sigma_4^{(r)}(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}, x_4^{(r)}) = x_1^{(r)}x_2^{(r)}x_3^{(r)}x_4^{(r)}; \\ \bar{\sigma}_n^{(r)} &= \sigma_n^{(r)}(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}, 0); \\ \bar{\bar{\sigma}}_n^{(r)} &= \sigma_n^{(r)}(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, 0, 0), \quad n = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

При этом $\bar{\sigma}_4^{(r)} = \bar{\bar{\sigma}}_4^{(r)} = \bar{\bar{\sigma}}_3^{(r)} = 0$.

Пусть $f_n^{(r)}$ ($n = 1, 2, \dots, 6$) — симметрический многочлен n -й степени от переменных $x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}, x_4^{(r)}$. Известно, что он выражается через элементарные симметрические многочлены единственным образом. Обозначая

$$\begin{aligned} f_n^{(r)} &= f_n^{(r)}(\sigma_1^{(r)}, \sigma_2^{(r)}, \sigma_3^{(r)}, \sigma_4^{(r)}); \\ \bar{f}_n^{(r)} &= f_n^{(r)}(\bar{\sigma}_1^{(r)}, \bar{\sigma}_2^{(r)}, \bar{\sigma}_3^{(r)}, 0); \quad (2.13) \\ \bar{\bar{f}}_n^{(r)} &= f_n^{(r)}(\bar{\bar{\sigma}}_1^{(r)}, \bar{\bar{\sigma}}_2^{(r)}, 0, 0), \quad n = 1, 2, \dots, 6; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1^{(r)} &= \sigma_1^{(r)}, \quad f_2^{(r)} = (\sigma_1^{(r)})^2 - \sigma_2^{(r)}; \quad f_3^{(r)} = (\sigma_1^{(r)})^3 - \\ &- 2\sigma_1^{(r)}\sigma_2^{(r)} + \sigma_3^{(r)}; \quad f_4^{(r)} = (\sigma_1^{(r)})^4 - 3(\sigma_1^{(r)})^2\sigma_2^{(r)} + \\ &+ (\sigma_2^{(r)})^2 + 2\sigma_1^{(r)}\sigma_3^{(r)} - \sigma_4^{(r)}; \quad \bar{f}_5^{(r)} = (\bar{\sigma}_1^{(r)})^5 - \\ &- 4(\bar{\sigma}_1^{(r)})^3\bar{\sigma}_2^{(r)} + 3\bar{\sigma}_1^{(r)}(\bar{\sigma}_2^{(r)})^2 + 3(\bar{\sigma}_1^{(r)})^2\bar{\sigma}_3^{(r)} - 2\bar{\sigma}_2^{(r)}\bar{\sigma}_3^{(r)}; \\ \bar{\bar{f}}_6^{(r)} &= (\bar{\bar{\sigma}}_1^{(r)})^6 - 5(\bar{\bar{\sigma}}_1^{(r)})^4\bar{\bar{\sigma}}_2^{(r)} + 6(\bar{\bar{\sigma}}_1^{(r)})^2(\bar{\bar{\sigma}}_2^{(r)})^2 - (\bar{\bar{\sigma}}_2^{(r)})^3, \end{aligned}$$

и выполняя элементарные действия над столбцами определителя (2.9), получим:

$$\begin{aligned} \Delta &= m^{56} \exp(-z_1^{(1)} - z_2^{(1)} - z_3^{(1)} - \\ &- z_4^{(1)}) (K^{(1)})^2 K^{(2)} \text{Det} \|t_{ij}\|_{i,j=1}^3 = 0; \quad (2.14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K^{(r)} &= (x_1^{(r)} - x_2^{(r)})(x_1^{(r)} - x_3^{(r)})(x_1^{(r)} - x_4^{(r)}) \times \\ &\times (x_2^{(r)} - x_3^{(r)})(x_2^{(r)} - x_4^{(r)})(x_3^{(r)} - x_4^{(r)}), \quad r = 1, 2; \quad (2.15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{11} &= \|m_{ij}^{(1)}\|_{i,j=1}^4; \quad t_{12} = \|m_{ij}^{(1)}\|_{i=1,j=5}^{4,8}; \quad t_{13} = c \|m_{ij}^{(2)}\|_{ij=1}^4; \\ t_{21} &= \|m_{ij}^{(1)}\|_{i=5,j=1}^{8,4}; \quad t_{22} = \|m_{ij}^{(1)}\|_{i,j=5}^8; \quad t_{23} = \|m_{ij}^{(2)}\|_{i=5,j=1}^{8,4}; \quad (2.16) \\ t_{31} &= \|m_{ij}^{(1)}\|_{i=9,j=1}^{12,4}; \quad t_{32} = \|m_{ij}^{(1)}\|_{i=9,j=5}^{12,8}; \quad t_{33} = 0, \end{aligned}$$

а выражения для $m_j^{(r)}, r = 1, 2$ приведены в Приложении А.

Из (2.14) следует, что уравнение (2.9) эквивалентно уравнению

$$\nabla = \text{Det} \|t_{ij}\|_{i,j=1}^3 = 0. \quad (2.17)$$

Учитывая возможные соотношения между $\eta_{1m}^{(r)}, \eta_{2m}^{(r)}, \eta_{3m}^{(r)}$ заключаем, что уравнение (2.17) опреде-

ляет частоты соответствующих типов краевых и интерфейсных колебаний.

При $\eta_{1m}^{(r)} = \eta_{2m}^{(r)} = \eta_{3m}^{(r)} = \eta_m^{(r)}$ уравнение (2.4) является характеристическим уравнением системы (1.1). Уравнение (2.17) при $k = 2\pi n_0 / s, n_0 \in N$ является дисперсионным уравнением задачи (1.1)–(1.4), а при $k = \pi / s$ — дисперсионным уравнением задачи (1.1)–(1.3), (1.5).

Асимптотика дисперсионного уравнения (2.17) при $R^{-1} \rightarrow 0$. При использовании формул из пункта 2 будем полагать, что $\eta_1^{(r)} = \eta_2^{(r)} = \eta_3^{(r)} = \eta^{(r)}$ ($r = 1, 2$). Тогда при $R^{-1} \rightarrow 0$ ($r_0 \rightarrow 0$) уравнение (2.4) преобразуется в совокупность уравнений:

$$\begin{aligned} c_m^{(r)} &= (\chi^{(r)})^4 - B_2^{(r)}(\chi^{(r)})^2 m^2 + \frac{B_{11}^{(r)} + B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta^{(r)})^2 (\chi^{(r)})^2 - \\ &- (m^2 - (\eta^{(r)})^2) \left(\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} m^2 - \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta^{(r)})^2 \right) = 0; \quad (3.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{mm}^{(r)} &= a^2 \left(\frac{B_{11}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} (\chi^{(r)})^4 - \frac{2(B_{12}^{(r)} + 2B_{66}^{(r)})}{B_{22}^{(r)}} (\chi^{(r)})^2 + m^4 \right) - \\ &- \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} (\eta^{(r)})^2 = 0, \quad r = 1, 2, \quad (3.2) \end{aligned}$$

которые являются характеристическими уравнениями для уравнений планарных и изгибных колебаний пластины соответственно [27]. Корни $\chi^{(r)} / m$ уравнений (3.1) и (3.2) с положительными действительными частями обозначим через $y_1^{(r)}, y_2^{(r)}$ и $y_3^{(r)}, y_4^{(r)}$ соответственно.

Аналогичным образом, как в [12], доказываются, что при условии

$$\varepsilon_m \ll 1, \quad y_j^{(r)} \neq y_i^{(r)}, \quad i \neq j \quad (3.3)$$

корни $(x^{(r)})^2 = (\chi^{(r)})^2 / m^2$ уравнения (2.4) можно представить в виде:

$$(x_j^{(r)})^2 = (y_j^{(r)})^2 + \alpha_{jm}^{(r)} \varepsilon_m^2 + \beta_{jm}^{(r)} \varepsilon_m^4 + \dots, \quad j = \overline{1, 4}. \quad (3.4)$$

При условии (3.3), учитывая соотношения (2.8) и (3.4) и тот факт, что

$$\frac{M_{3j}^{(r)}}{m^6} = \frac{M_{4j}^{(r)}}{m^7} = \frac{M_{7j}^{(r)}}{m^4} = \frac{M_{8j}^{(r)}}{m^5} = O(\varepsilon_m^2), \quad (3.5)$$

уравнение (2.17) приводится к виду:

$$\begin{aligned} \text{Det} \|t_{ij}\|_{ij=1}^3 &= \left(\frac{B_{11}^{(1)}}{B_{12}^{(1)} + B_{66}^{(1)}} \right)^2 \frac{B_{11}^{(2)}}{B_{12}^{(2)} + B_{66}^{(2)}} (N^{(1)}(\eta_m^{(1)}))^2 \times \\ &\times N^{(2)}(\eta_m^{(2)}) X; \\ \left\{ (K_3^{(1)}(\eta_m^{(1)}))^2 K_3^{(2)}(\eta_m^{(2)}) \text{Det} \|e_{ij}\|_{i,j=1}^6 \cdot \text{Det} \|b_{ij}\|_{i,j=1}^6 \right\} + \\ &+ O(\varepsilon_m^2) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}. \quad (3.6) \end{aligned}$$

Из уравнения (3.6) следует, что при $\varepsilon_m \rightarrow 0$ уравнение (2.17) распадается на уравнения:

$$\begin{aligned} \text{Det} \|e_{ij}\|_{i,j=1}^6 = 0; \quad \text{Det} \|b_{ij}\|_{i,j=1}^6 = 0; \quad K_3^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = 0; \\ K_3^{(2)}(\eta_m^{(2)}) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}; \quad (3.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_3^{(r)}(\eta_m^{(r)}) &= (1 - (\eta_m^{(r)})^2) \left(\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} - \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_m^{(r)})^2 \right) \times \\
 &\times \left(\frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} - a^2 m^2 \frac{(B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)})(B_{12}^{(r)} + 4B_{66}^{(r)})}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} \right)^2 + \\
 &+ \left(B_2^{(r)} - \frac{B_{11}^{(r)} + B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_m^{(r)})^2 \right) \times \\
 &\times \left(\frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} - a^2 m^2 \frac{(B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)})(B_{12}^{(r)} + 4B_{66}^{(r)})}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} \right) \times \quad (3.8) \\
 &\times \left(\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_m^{(r)})^2 + a^2 m^2 \frac{B_{22}^{(r)} (B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)})}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} \right) + \\
 &+ \left(\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_m^{(r)})^2 + a^2 m^2 \frac{B_{22}^{(r)} (B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)})}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} \right)^2.
 \end{aligned}$$

Из них первое и второе уравнения являются дисперсионными уравнениями планарных и изгибных колебаний аналогичной задачи для полубесконечной пластины $k = 2\pi n_0 / s$ и пластины-полосы с шарнирно закрепленными краями $k = \pi / s$ [27].

Корням третьего и четвертого уравнений соответствуют планарные колебания цилиндрической оболочки. Они появляются в результате использования уравнения соответствующей классической теории ортотропных цилиндрических оболочек.

При $\varepsilon_m \rightarrow 0$ и $ml^{(1)} \rightarrow \infty$, учитывая асимптотические формулы (1.18), (2.15) из [27] и (3.6), уравнения (2.17) можно написать в виде:

$$\begin{aligned}
 \text{Det} \|t_{ij}\|_{i,j=1}^3 &= \left(\frac{B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} \right)^2 (N^{(1)}(\eta_m^{(1)}))^2 \times \\
 &\times N^{(2)}(\eta_m^{(2)}) \left\{ \left(K_3^{(1)}(\eta_m^{(1)}) \right)^2 K_3^{(2)}(\eta_m^{(2)}) L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) \times \right. \\
 &\times G(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)}) K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) \left. \right\} + O(\varepsilon_m^2) + \quad (3.9) \\
 &+ \sum_{j=1}^4 O(\exp(z_j)) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty};
 \end{aligned}$$

$$N^{(r)}(\eta_m^{(r)}) = (y_1^{(r)} + y_3^{(r)})(y_1^{(r)} + y_4^{(r)})(y_2^{(r)} + y_3^{(r)})(y_2^{(r)} + y_4^{(r)});$$

Из (3.9) следует, что при $\varepsilon_m \rightarrow 0$ и $ml^{(1)} \rightarrow \infty$ уравнения (2.17) распадаются на уравнения:

$$\begin{aligned}
 L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = 0; \quad G(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = 0; \quad K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = 0; \\
 K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = 0; \quad K_3^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = 0; \quad K_3^{(2)}(\eta_m^{(2)}) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}. \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) &= K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) Q^{(2)}(\eta_m^{(2)}) + \\
 &+ \left(\frac{B_{66}^{(2)}}{B_{66}^{(1)}} \right)^2 K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)}) Q^{(1)}(\eta_m^{(1)}) + \frac{B_{66}^{(2)}}{B_{66}^{(1)}} \times \\
 &\times \left[2 \left(y_1^{(1)} y_2^{(1)} - \frac{B_{12}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} (1 - (\eta_m^{(1)})^2) \right) \left(y_1^{(2)} y_2^{(2)} - \frac{B_{12}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} (1 - (\eta_m^{(2)})^2) \right) + \right. \\
 &+ (y_2^{(1)} + y_1^{(1)})(y_2^{(2)} + y_1^{(2)}) ((1 - (\eta_m^{(2)})^2) y_1^{(1)} y_2^{(1)} + \\
 &\left. + (1 - (\eta_m^{(1)})^2) y_1^{(2)} y_2^{(2)}) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_2^{(r)}(\eta_m^{(r)}) &= (1 - (\eta_m^{(r)})^2) \left(\frac{B_{12}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} - (\eta_m^{(r)})^2 \right) - \\
 &- (\eta_m^{(r)})^2 y_1^{(r)} y_2^{(r)}, \quad r = 1, 2;
 \end{aligned}$$

$$Q^{(r)}(\eta_m^{(r)}) = y_1^{(r)} y_2^{(r)} + \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (1 - (\eta_m^{(r)})^2), \quad r = 1, 2; \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned}
 G(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) &= K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)}) + \left(\frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \right)^2 K_1^{(2)}(\eta_m^{(2)}) + \\
 &+ \frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \left[2 \left(y_3^{(1)} y_4^{(1)} + \frac{B_{12}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} \right) \left(y_3^{(2)} y_4^{(2)} + \frac{B_{12}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} \right) + \right. \\
 &\left. + (y_3^{(1)} + y_4^{(1)})(y_3^{(2)} + y_4^{(2)})(y_3^{(1)} y_4^{(1)} + y_3^{(2)} y_4^{(2)}) \right], \quad m = \overline{1, +\infty};
 \end{aligned}$$

$$K_1^{(r)}(\eta_m^{(r)}) = (y_3^{(r)} y_4^{(r)})^2 + 4 \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} y_3^{(r)} y_4^{(r)} - \left(\frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \right)^2, \quad r = 1, 2.$$

Из них первые два — дисперсионные уравнения планарных и изгибных интерфейсных колебаний для бесконечной пластины, составленной из двух полубесконечных ортотропных пластин, или пластин-полос из двух полубесконечных ортотропных пластин-полос с шарнирно закрепленными краями. Третье и четвертое уравнения являются дисперсионными уравнениями планарных и изгибных краевых колебаний для ортотропной полубесконечной пластины со свободным краем $\alpha = l^{(1)}$ или полубесконечной пластины-полосы со свободным торцом $\alpha = l^{(1)}$ с шарнирно закрепленными краями, изготовленной из правой пластины (см. формулы (1.19) и (2.16) из [27]).

Асимптотика дисперсионного уравнения (2.17) при $ml^{(1)} \rightarrow \infty$. При использовании предыдущих формул будем полагать, что $\chi_1^{(1)}, \chi_2^{(1)}, \chi_3^{(1)}, \chi_4^{(1)}$ (корни уравнения (2.4)) имеют положительные действительные части. Тогда уравнения (2.17) можно привести к виду:

$$\text{Det} \|t_{ij}\|_{i,j=1}^3 = \text{Det} \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix} \text{Det} t_{32} + \sum_{j=1}^4 O(\exp(z_j)). \quad (4.1)$$

Откуда следует, что при $ml^{(1)} \rightarrow \infty$ уравнение (2.17) распадается на уравнения:

$$\text{Det} \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{Det} t_{32} = 0. \quad (4.2)$$

Первое из них при $m \in N$ определяет частоты всевозможных собственных интерфейсных колебаний цилиндрических оболочек, составленных из двух полубесконечных ортотропных замкнутых цилиндрических оболочек, или составленных из двух полубесконечных ортотропных незамкнутых цилиндрических оболочек, при наличии шарнирного закрепления Навье на граничных образующих [24]. Второе уравнение из (4.2) определяет всевозможные краевые колебания полубесконечной замкнутой цилиндрической оболочки со свободным торцом, изготовленной из материала правой цилиндрической

оболочки, или полубесконечной незамкнутой цилиндрической оболочки со свободным торцом, изготовленной из материала правой цилиндрической оболочки, при наличии шарнирного закрепления Навье на граничных образующих.

Предположим, что $\eta_1^{(r)} = \eta_2^{(r)} = \eta_3^{(r)} = \eta_4^{(r)} = \eta^{(r)}$. Тогда при $R^{-1} \rightarrow 0$ ($r_0 \rightarrow 0$) имеем следующие асимптотические уравнения [28]:

$$\text{Det} \begin{vmatrix} t_{11} & t_{13} \\ t_{21} & t_{23} \end{vmatrix} = \frac{B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} N^{(1)}(\eta_m^{(1)}) N^{(2)}(\eta_m^{(2)}) \times \\ \times \{K_3^{(1)}(\eta_m^{(1)}) K_3^{(2)}(\eta_m^{(2)}) L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) G(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)})\} + \\ + O(\varepsilon_m^2) = 0, m = \overline{1, +\infty}; \quad (4.3)$$

$$\text{Det} \|t_{32}\| = \frac{B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} N^{(1)}(\eta_m^{(1)}) \{K_3^{(1)}(\eta_m^{(1)}) K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)}) K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)})\} + \\ + O(\varepsilon_m^2) = 0, m = \overline{1, +\infty}. \quad (4.4)$$

Следовательно, учитывая формулы (4.1), (4.3) и (4.4), заключаем, что дисперсионные уравнения (2.17) принимают вид (3.9).

Численные исследования. В таблице 1 приведены некоторые безразмерные характеристики собственных интерфейсных и краевых колебаний $\eta_m^{(1)}$ и характеристики затухания соответствующих форм $k\chi_0^{(1)}/m$ и $k\chi_0^{(2)}/m$ для составных полубесконечных цилиндрических оболочек открытого профиля, изготовленных из боропластика и бумаги, с механическими параметрами [26, 29]:

Боропластик: $\rho^{(1)} = 2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$; $E_1^{(1)} = 2,646 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$; $E_2^{(1)} = 1,323 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$;

$$G^{(1)} = 9,604 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2; \nu_1^{(1)} = 0,2, \nu_2^{(1)} = 0,01. \quad (5.1)$$

Бумага: $\rho^{(2)} = 0,16 \text{ кг/м}^3$; $E_1^{(2)} = 2,95281 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$; $E_2^{(2)} = 2,2106 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$

$$G^{(2)} = 9,77076 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2; \nu_1^{(2)} = \nu_2^{(2)} E_1^{(2)}/E_2^{(2)}, \nu_2^{(2)} = 0,23, \quad (5.2)$$

и геометрическими параметрами: $R = 2$; $s = 1,01072$; $k = 3,10827$; $r_0 = 0,32172$; $h = 1/50$; $b = 1$, $l^{(1)} = 15$ (b — расстояние между граничными образующими). Результаты, представленные в таблице 2, соответствуют составной полубесконечной цилиндрической оболочке открытого профиля, изготовленной из боропластика и бумаги, с механическими параметрами (5.1), (5.2) и теми же геометрическими параметрами при $l^{(1)} = 5$.

В качестве характеристики затухания приведены значения следующих величин:

$$k\chi_0^{(1)}/m = -\min\{k \text{Re} \chi_1^{(1)}/m, k \text{Re} \chi_2^{(1)}/m, \\ k \text{Re} \chi_3^{(1)}/m, k \text{Re} \chi_4^{(1)}/m\}; \\ k\chi_0^{(2)}/m = \min\{k \text{Re} \chi_1^{(2)}/m, k \text{Re} \chi_2^{(2)}/m, \\ k \text{Re} \chi_3^{(2)}/m, k \text{Re} \chi_4^{(2)}/m\}. \quad (5.3)$$

В таблицах 1, 2 после характеристик собственных частот указан тип интерфейсных и краевых

колебаний: $b^{(1)}$, $e^{(1)}$ — преимущественно изгибные и планарные краевые колебания; inb , ine — преимущественно изгибные и планарные интерфейсные колебания; $n^{(r)}$, $r = 1, 2$ — новый тип колебаний. Там, где не обнаружены интерфейсные или краевые колебания, клетки пустуют. Если коэффициент затухания чисто мнимый, обозначается через iq .

В таблицах 1, 2 случай $\eta_1^{(r)} = \eta_2^{(r)} = \eta_3^{(r)} = \eta^{(r)}$ соответствует задаче (1.1)–(1.2), (1.4). Случай $\eta_1^{(r)} = \eta_2^{(r)} = 0, \eta_3^{(r)} = \eta^{(r)}$ соответствует задаче (1.1)–(1.2), (1.4), в которой отсутствует тангенциальный компонент силы инерции, т. е. имеем преимущественно изгибный тип интерфейсных и краевых колебаний. Аналогично случай $\eta_1^{(r)} = \eta_2^{(r)} = \eta^{(r)}, \eta_3^{(r)} = 0$ соответствует преимущественно планарному типу колебаний.

Таблицы 1, 2 показывают, что первые частоты собственных интерфейсных и краевых колебаний, где присутствует нормальная компонента силы инерции, являются частотами краевых и интерфейсных колебаний преимущественно изгибного типа. Наряду с первыми частотами интерфейсных и краевых колебаний квазипоперечного типа существуют частоты незатухающих интерфейсных и краевых колебаний квазитангенциального типа. С увеличением m эти колебания становятся краевыми колебаниями типа Рэлея и интерфейсными колебаниями типа Стоунли.

При $\varepsilon_m \rightarrow 0$ собственные краевые и интерфейсные колебания задачи (1.1)–(1.2), (1.4) расчлениются на квазипоперечные и квазитангенциальные колебания и частоты этой задачи стремятся к частотам аналогичной задачи для составной полупластины-полосы. С увеличением m краевые и интерфейсные колебания квазипоперечного типа становятся незатухающими, а безразмерные характеристики $\eta_m^{(r)}$ собственной частоты квазитангенциальных краевых и интерфейсных колебаний стремятся к корню уравнения Рэлея и корню уравнения типа Стоунли (3.10) (для материалов боропластик и бумага $\eta_m^{(1)} \approx 0,96419$, $\eta_m^{(1)} \approx 0,98367$).

В зависимости от $a^2 m^2$ появляется не более шести новых типов интерфейсных колебаний, характерных только для составных цилиндрических оболочек, обусловленных продольными и крутильными компонентами силы инерции [24].

При колебаниях преимущественно тангенциального типа ($\eta_1^{(r)} = \eta_2^{(r)} = \eta^{(r)}, \eta_3^{(r)} = 0$), кроме планарных краевых колебаний типа Рэлея и интерфейсных колебаний типа Стоунли, может появляться не более шести новых типов интерфейсных колебаний, также обусловленных продольными и крутильными компонентами силы инерции.

Отметим, что связь между $\eta_m^{(1)}$ и $\eta_m^{(2)}$ имеет вид:

$$\eta_m^{(2)} = \frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(1)}} \frac{B_{66}^{(1)}}{B_{66}^{(2)}} \eta_m^{(1)}. \quad (5.4)$$

Заключение. Используя систему уравнений динамического равновесия ортотропных цилиндрических

Таблица 1 — Характеристики составных полубесконечных цилиндрических оболочек открытого профиля

m	$\eta_1^{(o)} = \eta_2^{(o)} = \eta_3^{(o)} = \eta^{(o)}$			$\eta_1^{(o)} = \eta_2^{(o)} = 0, \eta_3^{(o)} = \eta^{(o)}$			$\eta_1^{(o)} = \eta_2^{(o)} = \eta^{(o)}, \eta_3^{(o)} = 0$		
	$-k\chi^{(1)}/m$	$k\chi^{(2)}/m$	$\eta^{(1)}/m$	$-k\chi^{(1)}/m$	$k\chi^{(2)}/m$	$\eta^{(1)}/m$	$-k\chi^{(1)}/m$	$k\chi^{(2)}/m$	$\eta^{(1)}/m$
	iq	2,8753	0,02028 $b^{(1)}$	iq	2,4963	0,02054 $b^{(1)}$	-0,1753	2,4957	0,96103 $e^{(1)}$
	iq.	2,8753	0,02031 inb	iq.	2,4963	0,02057 inb	-0,0553	2,4957	0,99629 ine
2	iq	2,8753	0,04218 $b^{(1)}$	iq	2,4963	0,04218 $b^{(1)}$	-0,1684	2,4957	0,96417 $e^{(1)}$
	iq.	2,8753	0,04229 inb	iq.	2,4963	0,04228 inb	-0,1139	2,4957	0,98398 ine
3	iq	2,8753	0,06299 $b^{(1)}$	iq	2,4963	0,06308 $b^{(1)}$	-0,1684	2,4957	0,96419 $e^{(1)}$
	iq.	2,8753	0,06305 inb	iq.	2,4963	0,06314 inb	-0,1150	2,4957	0,98368 ine
4	iq	2,8753	0,08414 $b^{(1)}$	iq	2,4963	0,08420 $b^{(1)}$	-0,1684	2,4957	0,96419 $e^{(1)}$
	iq.	2,8753	0,08418 inb	iq.	2,4963	0,08425 inb	-0,1151	2,4957	0,98367 ine
5	iq	2,8753	0,10542 $b^{(1)}$	iq	2,4963	0,10542 $b^{(1)}$	-0,1684	2,4957	0,96419 $e^{(1)}$
	iq.	2,8753	0,10557 inb	iq.	2,4963	0,10557 inb	-0,1151	2,4957	0,98367 ine
10	iq	2,8753	0,21084 $b^{(1)}$	iq	2,4963	0,21087 $b^{(1)}$	-0,1684	2,4957	0,96419 $e^{(1)}$
	iq.	2,8753	0,21085 inb	iq.	2,4963	0,21099 inb	-0,1151	2,4957	0,98367 ine
29	-0,0051	2,8753	0,61138 $b^{(1)}$	-0,0051	2,4963	0,61140 $b^{(1)}$			
	iq.	2,8753	0,61141 inb	iq.	2,4963	0,61143 inb			
	iq.	2,4957	0,96419 $e^{(1)}$				-0,1684	2,4957	0,96419 $e^{(1)}$
	iq.	2,4957	0,98372 ine				-0,1151	2,4957	0,98372 ine
32	-0,5970	2,4963	0,16521 $n^{(1)}$	—	—	—	-0,5970	2,4963	0,16530 $n^{(1)}$
	-0,0052	2,4960	0,67468 $b^{(1)}$	-0,0052	2,4963	0,67467 $b^{(1)}$	—	—	—
	iq	2,4960	0,67470 inb	iq	2,4963	0,67470 inb	—	—	—
	iq.	2,4957	0,96419 $e^{(1)}$	—	—	—	-0,1684	2,4957	0,96419 $e^{(1)}$
	iq	2,4954	0,98367 ine	—	—	—	-0,1151	2,4957	0,98367 ine
44	-0,4399	2,4960	0,69594 $n^{(1)}$	—	—	—	-0,4398	2,4962	0,69594 $n^{(1)}$
	-0,0056	2,4958	0,92768 $b^{(1)}$	-0,0056	2,4963	0,92770 $b^{(1)}$	—	—	—
	iq	2,4958	0,92770 inb	iq	2,4963	0,92798 inb	—	—	—
	iq.	2,4957	0,96419 $e^{(1)}$	—	—	—	-0,1684	2,4957	0,96419 $e^{(1)}$
	iq	2,4957	0,98367 ine	—	—	—	-0,1150	2,4957	0,98367 ine
	iq	2,4876	3,71441 $n^{(2)}$	—	—	—	iq	2,4876	3,71441 $n^{(2)}$
92	-0,2178	2,4958	0,93841 $n^{(1)}$	—	—	—	-0,2178	2,4958	0,93842 $n^{(1)}$
	-0,1684	2,4957	0,96419 $e^{(1)}$	—	—	—	-0,1684	2,4957	0,96419 $e^{(1)}$
	-0,1151	2,4957	0,98367 ine	—	—	—	-0,1150	2,4957	0,98367 ine
	iq.	2,4938	1,97908 $b^{(1)}$	iq	2,4963	1,97912 $b^{(1)}$	—	—	—
	iq.	2,4938	1,97912 inb	iq.	2,4963	1,97929 inb	—	—	—
	iq	2,4933	2,16831 $n^{(2)}$	—	—	—	iq	2,4933	2,16831 $n^{(2)}$
	iq	1,6401	28,9998 $n^{(2)}$	—	—	—	iq	1,6401	28,9998 $n^{(2)}$

оболочек соответствующей классической теории, получены дисперсионные уравнения для определения собственных частот возможных краевых и интерфейсных колебаний замкнутых и незамкнутых составных полубесконечных цилиндрических оболочек.

Частоты собственных краевых и интерфейсных колебаний полубесконечных цилиндрических

оболочек, составленных из конечных и полубесконечных ортотропных тонких упругих оболочек с разными упругими коэффициентами, определяются совокупностью уравнений (2.17). Существование краевых и интерфейсных колебаний зависит от радиуса окружности, длины конечной цилиндрической оболочки и коэффициентов упругости.

Таблица 2 — Результаты, соответствующие составной полубесконечной цилиндрической оболочке открытого профиля

m	$\eta^{(1)} = \eta^{(2)} = \eta^{(3)} = \eta^{(4)}$			$\eta^{(1)} = \eta^{(2)} = 0, \eta^{(3)} = \eta^{(4)}$			$\eta^{(1)} = \eta^{(2)} = \eta^{(3)}, \eta^{(4)} = 0$		
	$-k\chi^{(1)}/m$	$k\chi^{(2)}/m$	$\eta^{(1)}/m$	$-k\chi^{(1)}/m$	$k\chi^{(2)}/m$	$\eta^{(1)}/m$	$-k\chi^{(1)}/m$	$k\chi^{(2)}/m$	$\eta^{(1)}/m$
	iq	2,4963	0,02028 $b^{(1)}$	iq	2,4963	0,02054 $b^{(1)}$	—	—	—
	iq.	2,4963	0,02046 inb	iq.	2,4963	0,02072 inb	—	—	—
2	iq	2,4963	0,04227 $b^{(1)}$	iq	2,4963	0,04227 $b^{(1)}$	—	—	—
	iq.	2,4963	0,04229 inb	iq.	2,4963	0,04229 inb	—	—	—
3	iq	2,4963	0,06306 $b^{(1)}$	iq	2,4963	0,06315 $b^{(1)}$	-0,1753	2,4957	0,96103 $e^{(1)}$
	iq.	2,4963	0,06379 inb	iq.	2,4963	0,06389 inb	-0,0553	2,4957	0,99629 ine
4	iq	2,4963	0,08413 $b^{(1)}$	iq	2,4963	0,08426 $b^{(1)}$	-0,1700	2,4957	0,96348 $e^{(1)}$
	iq.	2,4963	0,08476 inb	iq.	2,4963	0,08483 inb	-0,1019	2,4957	0,98472 ine
5	iq	2,4963	0,10547 $b^{(1)}$	iq	2,4963	0,10547 $b^{(1)}$	-0,1684	2,4957	0,96405 $e^{(1)}$
	iq.	2,4963	0,10589 inb	iq.	2,4963	0,10589 inb	-0,1114	2,4957	0,98472 ine
10	iq	2,4963	0,21112 $b^{(1)}$	iq	2,4963	0,21112 $b^{(1)}$	-0,1684	2,4957	0,96419 $e^{(1)}$
	iq.	2,4963	0,21156 inb	iq.	2,4963	0,21156 inb	-0,1150	2,4957	0,98367 ine
29	iq.	2,4961	0,61148 $b^{(1)}$	iq	2,4963	0,61141 $b^{(1)}$	-0,1684	2,4957	0,96419 $e^{(1)}$
	iq.	2,4961	0,61160 inb	iq.	2,4963	0,61146 inb			
	iq.	2,4957	0,96419 $e^{(1)}$						
	iq.	2,4957	0,98372 ine						
32	-0,5970	2,4963	0,16531 $n^{(1)}$	—	—	—	-0,5970	2,4963	0,16530 $n^{(1)}$
	iq.	2,4960	0,67468 $b^{(1)}$	iq.	2,4963	0,67468 $b^{(1)}$	—	—	—
	iq	2,4960	0,67487 inb	iq	2,4963	0,67487 inb	—	—	—
	iq.	2,4960	0,96419 $e^{(1)}$	—	—	—	-0,1684	2,4957	0,96419 $e^{(1)}$
	iq	2,4960	0,98367 ine	—	—	—	-0,1151	2,4957	0,98367 ine
44	-0,4399	2,4960	0,69594 $n^{(1)}$	—	—	—	-0,4399	2,4960	0,69594 $n^{(1)}$
	-0,0040	2,4958	0,92768 $b^{(1)}$	-0,0056	2,4963	0,92770 $b^{(1)}$	—	—	—
	iq	2,4958	0,92772 inb	iq	2,4963	0,92799 inb	—	—	—
	iq.	2,4957	0,96419 $e^{(1)}$	—	—	—	-0,1684	2,4957	0,96419 $e^{(1)}$
	iq	2,4957	0,98367 ine	—	—	—	-0,1150	2,4957	0,98367 ine
	iq	2,4876	3,71441 $n^{(2)}$	—	—	—	iq	2,4876	3,71441 $n^{(2)}$
92	-0,2178	2,4958	0,93842 $n^{(1)}$	—	—	—	-0,2178	2,4958	0,93842 $n^{(1)}$
	-0,1684	2,4957	0,96419 $e^{(1)}$	—	—	—	-0,1684	2,4957	0,96419 $e^{(1)}$
	-0,1151	2,4957	0,98367 ine	—	—	—	-0,1150	2,4957	0,98367 ine
	iq.	2,4938	1,97908 $b^{(1)}$	iq	2,4963	1,97912 $b^{(1)}$	—	—	—
	iq.	2,4938	1,97912 inb	iq.	2,4963	1,97929 inb	—	—	—
	iq	2,4933	2,16831 $n^{(2)}$	—	—	—	iq	2,4933	2,16831 $n^{(2)}$
	iq	1,6401	28,9998 $n^{(2)}$	—	—	—	iq	1,6401	28,9998 $n^{(2)}$

При больших m или при малой кривизне окружности все характеристики собственных краевых и интерфейсных колебаний замкнутой и незамкнутой цилиндрической оболочки стремятся к характеристикам краевых и интерфейсных колебаний полубесконечной пластины и пластины-полосы соответственно.

Численный анализ показывает, что с уменьшением длины конечной составляющей цилиндрической

оболочки первые частоты краевых и интерфейсных колебаний преимущественно изгибного типа не уменьшаются, а процесс затухания зависит от свойств материалов и геометрических параметров.

При фиксированном m первая частота краевых колебаний преимущественно изгибного типа и планарного типа предшествует частоте интерфейсных колебаний того же типа.

Из асимптотических формул (3.9) и анализа уравнений $L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = 0$, $G(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = 0$ из (3.10) следует, что при сильной анизотропии между свойствами материалов левой и правой части составляющая цилиндрическая оболочка с большей плотностью и коэффициентом упругости индуцирует интерфейсные колебания в составной цилиндрической оболочке [27].

Численные результаты показывают, что асимптотические формулы (3.9) и (4.1) дисперсионного уравнения (2.17) являются хорошим ориентиром для нахождения собственных частот задач (1.1)–(1.4); (1.1)–(1.3), (1.5).

Приложение. Аналитические выражения для элементов матрицы m_{ij} уравнения (2.17):

$$\begin{aligned}
 m_{11}^{(r)} &= H^{(r)}(x_1^{(r)})^4 + d_1^{(r)}(x_1^{(r)})^2 + d_2^{(r)}; m_{12}^{(r)} = H^{(r)}\bar{f}_3^{(r)} + \\
 &+ d_1^{(r)}\bar{f}_1^{(r)}; m_{13}^{(r)} = H^{(r)}\bar{f}_2^{(r)} + d_1^{(r)}; m_{14}^{(r)} = H^{(r)}f_1^{(r)}; \\
 m_{21}^{(r)} &= (-1)^r L^{(r)}(T^{(r)}(x_1^{(r)})^5 + d_3^{(r)}(x_1^{(r)})^3 + d_4^{(r)}x_1^{(r)}); \\
 m_{22}^{(r)} &= (-1)^r L^{(r)}(T^{(r)}\bar{f}_4^{(r)} + d_3^{(r)}\bar{f}_2^{(r)} + d_4^{(r)}); \\
 m_{23}^{(r)} &= (-1)^r L^{(r)}(T^{(r)}\bar{f}_3^{(r)} + d_3^{(r)}\bar{f}_1^{(r)}); \\
 m_{24}^{(r)} &= (-1)^r L^{(r)}(T^{(r)}f_2^{(r)} + d_3^{(r)}); m_{31}^{(r)} = \delta_m (x_1^{(r)})^6 + \\
 &+ d_5^{(r)}(x_1^{(r)})^4 + d_6^{(r)}(x_1^{(r)})^2 + d_7^{(r)}; m_{32}^{(r)} = \delta_m \bar{f}_5^{(r)} + \\
 &+ d_5^{(r)}\bar{f}_3^{(r)} + d_6^{(r)}\bar{f}_1^{(r)}; m_{33}^{(r)} = \delta_m \bar{f}_4^{(r)} + d_5^{(r)}\bar{f}_2^{(r)} + d_6^{(r)}; \\
 & m_{34}^{(r)} = \delta_m f_3^{(r)} + d_5^{(r)}f_1^{(r)}; \\
 m_{41}^{(r)} &= (-1)^r (\delta_m (x_1^{(r)})^7 + d_8^{(r)}(x_1^{(r)})^5 + d_9^{(r)}(x_1^{(r)})^3 + d_{10}^{(r)}x_1^{(r)}); \\
 m_{42}^{(r)} &= (-1)^r (\delta_m \bar{f}_6^{(r)} + d_8^{(r)}\bar{f}_4^{(r)} + d_9^{(r)}\bar{f}_2^{(r)} + d_{10}^{(r)}); \\
 m_{43}^{(r)} &= (-1)^r (\delta_m \bar{f}_5^{(r)} + d_8^{(r)}\bar{f}_3^{(r)} + d_9^{(r)}\bar{f}_1^{(r)}); \\
 m_{44}^{(r)} &= (-1)^r (\delta_m f_4^{(r)} + d_8^{(r)}f_2^{(r)} + d_9^{(r)}); \\
 m_{51}^{(r)} &= F^{(r)}(x_1^{(r)})^4 + \gamma_1^{(r)}(x_1^{(r)})^2 + \gamma_2^{(r)}; \\
 m_{52}^{(r)} &= F^{(r)}\bar{f}_3^{(r)} + \gamma_1^{(r)}\bar{f}_1^{(r)}; m_{53}^{(r)} = F^{(r)}\bar{f}_2^{(r)} + \gamma_1^{(r)}; \\
 m_{54}^{(r)} &= F^{(r)}f_1^{(r)}; m_{61}^{(r)} = (-1)^r (\gamma_3^{(r)}(x_1^{(r)})^3 + \gamma_4^{(r)}x_1^{(r)}); \\
 m_{62}^{(r)} &= (-1)^r (\gamma_3^{(r)}\bar{f}_2^{(r)} + \gamma_4^{(r)}); m_{63}^{(r)} = (-1)^r \gamma_3^{(r)}\bar{f}_1^{(r)}; \\
 m_{64}^{(r)} &= (-1)^r \gamma_3^{(r)}; \\
 m_{71}^{(r)} &= \delta_m (x_1^{(r)})^4 + \gamma_5^{(r)}(x_1^{(r)})^2 + \gamma_6^{(r)}; m_{72}^{(r)} = \delta_m \bar{f}_3^{(r)} + \\
 &+ \gamma_5^{(r)}\bar{f}_1^{(r)}; m_{73}^{(r)} = \delta_m \bar{f}_2^{(r)} + \gamma_5^{(r)}; m_{74}^{(r)} = \delta_m f_1^{(r)}; \\
 m_{81}^{(r)} &= (-1)^r (\delta_m (x_1^{(r)})^5 + \gamma_5^{(r)}(x_1^{(r)})^3 + \gamma_6^{(r)}x_1^{(r)}); \\
 m_{82}^{(r)} &= (-1)^r (\delta_m \bar{f}_4^{(r)} + \gamma_5^{(r)}\bar{f}_2^{(r)} + \gamma_6^{(r)}); \\
 m_{83}^{(r)} &= (-1)^r (\delta_m \bar{f}_3^{(r)} + \gamma_5^{(r)}\bar{f}_1^{(r)}); m_{84}^{(r)} = (-1)^r (\delta_m f_2^{(r)} + \gamma_5^{(r)});
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{i5}^{(1)} &= (-1)^{i-1} m_{i1}^{(1)} \exp(z_1^{(1)}); m_{i8}^{(1)} = (-1)^{i-1} (m_{i4}^{(1)} \exp(z_4^{(1)}) + \\
 &+ m_{i3}^{(1)} [z_3^{(1)} z_4^{(1)}] + m_{i2}^{(1)} [z_2^{(1)} z_3^{(1)} z_4^{(1)}] + m_{i1}^{(1)} [z_1^{(1)} z_2^{(1)} z_3^{(1)} z_4^{(1)}]); \\
 m_{i6}^{(1)} &= (-1)^{i-1} (m_{i2}^{(1)} \exp(z_2^{(1)}) + m_{i1}^{(1)} [z_1^{(1)} z_2^{(1)}]); \\
 m_{i7}^{(1)} &= (-1)^{i-1} (m_{i3}^{(1)} \exp(z_3^{(1)}) + m_{i1}^{(1)} [z_2^{(1)} z_3^{(1)}] + \\
 &+ m_{i1}^{(1)} [z_1^{(1)} z_2^{(1)} z_3^{(1)}]), i = \overline{1, 8};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{91}^{(1)} &= m_{15}^{(1)}; m_{92}^{(1)} = m_{16}^{(1)}; m_{93}^{(1)} = m_{17}^{(1)}; m_{94}^{(1)} = m_{18}^{(1)}; \\
 m_{95}^{(1)} &= m_{11}^{(1)}; m_{96}^{(1)} = m_{12}^{(1)}; m_{97}^{(1)} = m_{13}^{(1)}; m_{98}^{(1)} = m_{14}^{(1)}; \\
 m_{101}^{(1)} &= m_{25}^{(1)}; m_{102}^{(1)} = m_{26}^{(1)}; m_{103}^{(1)} = m_{27}^{(1)}; m_{104}^{(1)} = m_{28}^{(1)}; \\
 m_{105}^{(1)} &= m_{21}^{(1)}; m_{106}^{(1)} = m_{22}^{(1)}; m_{107}^{(1)} = m_{23}^{(1)}; m_{108}^{(1)} = m_{24}^{(1)}; \\
 m_{111}^{(1)} &= m_{35}^{(1)}; m_{112}^{(1)} = m_{36}^{(1)}; m_{113}^{(1)} = m_{37}^{(1)}; m_{114}^{(1)} = m_{38}^{(1)}; \\
 m_{115}^{(1)} &= m_{31}^{(1)}; m_{116}^{(1)} = m_{32}^{(1)}; m_{117}^{(1)} = m_{33}^{(1)}; m_{118}^{(1)} = m_{34}^{(1)}; \\
 m_{121}^{(1)} &= m_{45}^{(1)}; m_{122}^{(1)} = m_{46}^{(1)}; m_{123}^{(1)} = m_{47}^{(1)}; m_{124}^{(1)} = m_{48}^{(1)}; \\
 m_{125}^{(1)} &= m_{41}^{(1)}; m_{126}^{(1)} = m_{42}^{(1)}; m_{127}^{(1)} = m_{43}^{(1)}; m_{128}^{(1)} = m_{44}^{(1)};
 \end{aligned}$$

$$H^{(r)} = -a^2 m^2 \frac{B_{12}^{(r)} + 4B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}; T^{(r)} = -a^2 m^2 \delta_m \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{66}^{(r)}};$$

$$F^{(r)} = -a^2 m^2 \frac{B_{12}^{(r)} + 4B_{66}^{(r)}}{B_{66}^{(r)}}; L^{(r)} = \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}};$$

$$\begin{aligned}
 d_1^{(r)} &= \frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2}{(B_{11}^{(r)})^2} - \frac{B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)}}{(B_{11}^{(r)})^2} (\eta_{1m}^{(r)})^2 + \\
 &+ 4a^2 m^2 \varepsilon_m^2 \frac{B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)}}{(B_{11}^{(r)})^2} (1 - (\eta_{1m}^{(r)})^2) + \\
 &+ a^2 m^2 \frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - 4B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)} + B_{12}^{(r)} (B_{12}^{(r)} + 4B_{66}^{(r)}) (\eta_{1m}^{(r)})^2}{(B_{11}^{(r)})^2}; \\
 d_2^{(r)} &= \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (1 - (\eta_{1m}^{(r)})^2) \left(\frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_{2m}^{(r)})^2 + a^2 m^2 \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (1 - \varepsilon_m^2) \right);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_3^{(r)} &= a^2 m^2 \left(\frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} - 3B_{11}^{(r)} + 4(\eta_{2m}^{(r)})^2 - \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_{1m}^{(r)})^2 \right) + \\
 &+ \frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} \delta_m + 4a^4 m^4 \varepsilon_m^2 \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (1 - (\eta_{1m}^{(r)})^2); \\
 d_4^{(r)} &= \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_{1m}^{(r)})^2 + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_{2m}^{(r)})^2 + \\
 &+ a^2 m^2 \left(\frac{B_{22}^{(r)} (B_{12}^{(r)} + 4B_{66}^{(r)})}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} - 3 \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_{1m}^{(r)})^2 - \right. \\
 &\left. - 4 \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_{2m}^{(r)})^2 (1 - (\eta_{1m}^{(r)})^2) \right) - a^2 m^2 \varepsilon_m^2 \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \times \\
 &\times \left(\frac{B_{12}^{(r)} + 4B_{66}^{(r)}}{B_{66}^{(r)}} - 4(\eta_{1m}^{(r)})^2 \right);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_5^{(r)} &= \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_{1m}^{(r)})^2 + (\eta_{2m}^{(r)})^2 - B_1^{(r)} - a^2 m^2 \varepsilon_m^2 \times \\
&\times \left(B_1^{(r)} + \frac{B_{12}^{(r)} + 4B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} - 4 \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_{1m}^{(r)})^2 \right); d_6^{(r)} = \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} B_2^{(r)} + \\
&+ \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \left(\frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} + B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)}}{(B_{11}^{(r)})^2} (\eta_{1m}^{(r)})^2 + \frac{B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_{2m}^{(r)})^2 \right) + \\
&+ \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_{1m}^{(r)})^2 (\eta_{2m}^{(r)})^2 + \varepsilon_m^2 \left(a^2 m^2 \frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2}{(B_{11}^{(r)})^2} \times \right. \\
&\quad \left. \times \left(1 - (\eta_{1m}^{(r)})^2 \right) - \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} B_1^{(r)} \right); \\
d_7^{(r)} &= \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \left(1 - (\eta_{1m}^{(r)})^2 \right) \left(\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\varepsilon_m^2 - 1) + \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_{2m}^{(r)})^2 \right); \\
d_8^{(r)} &= \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_{1m}^{(r)})^2 + (\eta_{2m}^{(r)})^2 - B_1^{(r)} - \frac{4B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} - \\
&- a^2 m^2 \varepsilon_m^2 \left(B_2^{(r)} + \frac{4B_{66}^{(r)} - 2B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} - \frac{4B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_{1m}^{(r)})^2 \right); \\
d_9^{(r)} &= \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_{1m}^{(r)})^2 (\eta_{2m}^{(r)})^2 - \frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} + B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)} + 4(B_{66}^{(r)})^2}{(B_{11}^{(r)})^2} \times \\
&\times \left((\eta_{1m}^{(r)})^2 - \frac{B_{12}^{(r)} + 5B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_{2m}^{(r)})^2 + \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} + \frac{B_{12}^{(r)} + 4B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} B_2^{(r)} + \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon_m^2 \left(a^2 m^2 \frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - 4B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)}}{(B_{11}^{(r)})^2} \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \left(1 - (\eta_{1m}^{(r)})^2 \right) - \frac{B_{12}^{(r)} + 4B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} B_1^{(r)} \right) \right); \\
d_{10}^{(r)} &= \frac{B_{12}^{(r)} + 4B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \left(1 - (\eta_{1m}^{(r)})^2 \right) \left(\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\varepsilon_m^2 - 1) + \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_{2m}^{(r)})^2 \right); \\
\gamma_1^{(r)} &= B_1^{(r)} + a^2 m^2 \frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} + B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)} + 4(B_{66}^{(r)})^2}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} - \\
&- a^2 m^2 \frac{B_{12}^{(r)} + 4B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_{1m}^{(r)})^2; \\
\gamma_2^{(r)} &= -\frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (1 + a^2 m^2) \left(1 - (\eta_{1m}^{(r)})^2 \right); \\
\gamma_3^{(r)} &= \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \delta_m - a^2 m^2 \frac{(B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)})(B_{12}^{(r)} + 4B_{66}^{(r)})}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}}; \\
\gamma_4^{(r)} &= \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_{2m}^{(r)})^2 + a^2 m^2 \frac{B_{22}^{(r)} (B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)})}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} - \\
&- a^2 m^2 \varepsilon_m^2 \frac{B_{12}^{(r)} B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}}; \gamma_5^{(r)} = \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_{1m}^{(r)})^2 + (\eta_{2m}^{(r)})^2 - \\
&- B_2^{(r)} - a^2 m^2 \varepsilon_m^2 \left(\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} + \frac{4B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \left(1 - (\eta_{1m}^{(r)})^2 \right) \right); \\
\gamma_6^{(r)} &= \left(1 - (\eta_{1m}^{(r)})^2 \right) \left(\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} - \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_{2m}^{(r)})^2 + a^2 m^2 \varepsilon_m^2 \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \right).
\end{aligned}$$

Список литературы

- Pietraszkiewicz, W. Shell Structures, Theory and Applications / W. Pietraszkiewicz; eds. Cz. Szymczak // Proceedings of the 8th International conference on shell structures. — 2005.
- Rayleigh, J.W. On waves propagated along the plate surface of an elastic solids / J.W. Rayleigh // Proc. London Math. Soc. — 1885. — № 17. — Pp. 4–11.
- Викторов, И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. — М.: Наука, 1981. — 288 с.
- Гринченко, В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. — Киев: Наук. думка, 1981. — 284 с.
- Михасев, Г.И. Локализованные колебания и волны в тонких оболочках. Асимптотические методы / Г.И. Михасев, П.Е. Товстик. — М.: Физматлит, 2009. — 292 с.
- Багдасарян, Р.А. Волны типа Рэлея в полубесконечной замкнутой цилиндрической оболочке / Р.А. Багдасарян, М.В. Белубекян, К.Б. Казарян // Волновые задачи механики: сб. тр. — Н. Новгород, 1992. — С. 118–124.
- Гулгазарян, Г.Р. Колебания, локализованные у свободного края полубесконечной незамкнутой безмоментной цилиндрической оболочки / Г.Р. Гулгазарян, Л.Г. Гулгазарян // Акуст. Вісн. АН України. — 1999. — Т. 2, № 4. — С. 42–48.
- Гулгазарян, Г.Р. Волны типа Рэлея в полубесконечной гофрированной цилиндрической оболочке / Г.Р. Гулгазарян, Л.Г. Гулгазарян // Изв. РАН. МТТ. — 2001. — № 3. — С. 151–158.
- Gulgazaryan, G.R. Vibrations of a corrugated orthotropic cylindrical shells with free edges / G.R. Gulgazaryan, L.G. Gulgazaryan // Int. Appl. Mechanics. — 2006. — № 42(12). — Pp. 1398–1413.
- Гулгазарян, Г.Р. Колебания безмоментной консольной незамкнутой ортотропной цилиндрической оболочки переменной кривизны / Г.Р. Гулгазарян // Изв. РАН. МТТ. — 2007. — № 1. — С. 84–99.
- Вильде, М.В. Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах / М.В. Вильде, Ю.Д. Каплунов, Л.Ю. Коссович. — М.: Физматлит, 2010. — 280 с.
- Gulgazaryan, G.R. Vibrations of semi-infinite orthotropic cylindrical shells of open profile / G.R. Gulgazaryan // Int. Appl. Mechanics. — 2004. — № 40(2). — Pp. 199–212.
- Гулгазарян, Г.Р. О локализованных собственных колебаниях у свободного торца полубесконечной замкнутой круговой цилиндрической оболочки / Г.Р. Гулгазарян // Изв. РАН. МТТ. — 2003. — № 1. — С. 180–192.
- Гулгазарян, Г.Р. О колебаниях тонкой упругой ортотропной цилиндрической оболочки со свободными краями / Г.Р. Гулгазарян, Л.Г. Гулгазарян // Проблемы прочности и пластичности. — 2006. — Вып. 68. — С. 150–160.
- Gulgazaryan, G.R. Natural vibrations of a cantilever thin elastic orthotropic cylindrical shell / G.R. Gulgazaryan // Int. Appl. Mechanics. — 2008. — № 44(5). — Pp. 539–554.
- Gulgazaryan, G.R. The vibrations thin elastic orthotropic circular cylindrical shell with free and hinged edges / G.R. Gulgazaryan, L.G. Gulgazaryan, R.D. Saakyan // J. Appl. Math. Mech. — 2008. — № 72(3). — Pp. 1398–1413.
- Gulgazaryan, G.R. Localized vibrations of a thin-walled structure consisted of orthotropic elastic non-closed cylindrical shells with free and rigid-clamped edge generators / G.R. Gulgazaryan, R.G. Gulgazaryan, Dg.L. Srapionyan // ZAMM. — 2013. — № 93(4). — Pp. 269–283.
- Зильбергейт, А.С. Контактные волны изгиба в тонких пластинках / А.С. Зильбергейт, И.Б. Сулова, // Акуст. журнал. — 1985. — Т. 29, № 2. — С. 186–191.
- Гертман, И.П. Отражение и прохождение звуковых волн через границу раздела двух состыкованных упругих полуплос / И.П. Гертман, О.Н. Лисицкий // Прикл. математика и механика. — 1988. — Т. 52, № 6. — С. 1044–1048.
- Stoneley, R. The elastic waves at the interface of two solids / R. Stoneley // Proc. Roy Soc. London A. — 1924. — № 106. — Pp. 416–429.
- Свободные интерфейсные колебания бесконечной безмоментной цилиндрической оболочки с произвольной направляющей / Г.Р. Гулгазарян [и др.] // Вест. ФФИ. — 2012. — № 1. — С. 59–80.
- Гулгазарян, Г.Р. Свободные интерфейсные колебания безмоментной цилиндрической оболочки переменной кривизны с жестко защемленными торцами / Г.Р. Гулгазарян,

- И.А. Миклашевич // Уч. записки АГПУ им. Х. Абовяна. — 2012. — № 2(17). — С. 57–87.
23. Гулгазарян, Г.Р. Свободные интерфейсные и краевые колебания консольной составной безмоментной цилиндрической оболочки переменной кривизны / Г.Р. Гулгазарян, Л.Г. Гулгазарян, И.А. Миклашевич // Изв. НАН Армении. Механика. — 2013. — Т. 66, № 1. — С. 48–66.
 24. Гулгазарян, Г.Р. О свободных интерфейсных колебаниях тонких упругих круговых цилиндрических оболочек / Г.Р. Гулгазарян, Р.Г. Гулгазарян // Механика машин, механизмов и материалов. — 2013. — № 4(25). — С. 12–19.
 25. Ермоленко, В.М. Влияние параметров ортотропии на спектр в задачах колебаний оболочек / В.М. Ермоленко // ПМТФ. — 1980. — № 1. — С. 163–170.
 26. Амбарцумян, С.А. Теория анизотропных оболочек / С.А. Амбарцумян. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 1961. — 384 с.
 27. Гулгазарян, Г.Р. О свободных интерфейсных и краевых колебаниях тонких упругих полубесконечных пластин со свободным краем / Г.Р. Гулгазарян, Р.Г. Гулгазарян, Г.И. Михасев // Механика машин, Механизмов и материалов. — 2015. — № 2(31). — С. 29–35.
 28. Гулгазарян, Г.Р. Свободные интерфейсные и краевые колебания тонких упругих полубесконечных круговых цилиндрических оболочек со свободным торцом / Г.Р. Гулгазарян, Р.Г. Гулгазарян, Г.И. Михасев // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. — 2014. — С. 187–191.
 29. Гулгазарян, Г.Р. Плотность частот свободных колебаний тонкой анизотропной оболочки, составленной из анизотропных слоев / Г.Р. Гулгазарян, В.Б. Лидский // Изв. АН СССР. МТТ. — 1982. — № 3. — С. 171–174.

GHULGHAZARYAN Gurgen R., Dr. Phys.-Math. Sc.

Professor of the Department of Mathematical Analysis and Theory of Functions

E-mail: ghulgr@yahoo.com

The Armenian State Pedagogical University after Khachatur Abovyan, Yerevan, Republic of Armenia

GHULGHAZARYAN Ruben G., Cand. Phys.-Math. Sc.

Lead Engineer

E-mail: ghulgr@yahoo.com

Mentor Graphics Development Services CJSC, Yerevan, Republic of Armenia

MIKHASEV Gennadij I., Dr. Phys.-Math. Sc., Professor

Head of the Department of Bio- and Nano-Mechanics

E-mail: mikhasev@bsu.by

Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

Received 16 August 2015.

ABOUT FREE BOUNDARY AND INTERFACIAL VIBRATIONS OF THIN ELASTIC SEMI-INFINITE CIRCULAR CYLINDRICAL SHELLS

Free boundary and interfacial vibrations of closed and non-closed semi-infinite cylindrical shells composed of finite and semi-infinite orthotropic thin cylindrical shells with different elastic properties are studied. Using the system of equations of the related classical theory of orthotropic cylindrical shells, dispersion equations and asymptotic formulas for obtaining eigenfrequencies of possible boundary and interfacial vibrations of composed cylindrical shells are derived. An algorithm for separating possible boundary and interfacial vibrations is presented. An asymptotic link is established between the dispersion equations of problems in hand and analogous problems for semi-infinite composed plate and plate-strip, respectively. By examples of shells with different lens of finite cylindrical shells approximate values of dimensionless characteristics of eigenfrequencies and attenuating characteristics of the related vibration forms are given.

Keywords: interfacial vibrations, eigenfrequencies, shell

References

1. Pietraszkiewicz W., Szymczak Cz. (Eds.) Shell Structures, Theory and Applications. *Proceedings of the 8th International conference on shell structures*. SSTA, 2005.
2. Rayleigh J.W. On waves propagated along the plate surface of an elastic solids. *Proc. London Math. Soc.*, 1885, no. 17, pp. 4–11.
3. Viktorov I.A. *Zvukovye poverkhnostnye volny v tverdykh telakh* [Sound surface waves in solid bodies]. Moscow, Nauka, 1981. 288 p.
4. Grinchenko W.T., Meleshko V.V. *Garmonicheskie kolebaniya i volny v uprugikh telakh* [Harmonic vibrations and waves in elastic bodies]. Kiev, Naukova dumka, 1981. 284 p.
5. Mikhasev G.I., Tovstik P.E. *Lokalizovannyye kolebaniya i volny v tonkikh obolochkakh. Asimptoticheskie metody* [Localized vibrations and waves in thin shells: Asymptotic methods]. Moscow, Fizmatlit, 2009. 292 p.
6. Bagdasaryan R.A., Belubekyan M.V., Kazaryan K.B. Volny tipa Releya v polubeskonechnoy zamknutoy tsilindricheskoj obolochke [Rayleigh type waves in a semi-infinite closed cylindrical shell]. *Volnovye zadachi mehaniki* [Wave problems in mechanics], 1992, pp. 118–124.
7. Gulgazaryan G.R., Gulgazaryan L.G. Kolebaniya, lokalizovannyye usvobodnogo kraja polubeskonechnoy nezamknutoy bezmomentnoy tsilindricheskoj obolochki [Localized vibrations at the free end of semi-infinite non-closed cylindrical shells]. *Akust. Visnik AN Ukrainy* [Acoustic herald NAS of Ukraine], 1999, vol. 2, no. 4, pp. 42–48.
8. Gulgazaryan G.R., Gulgazaryan L.G. Volny tipa Releya v polubeskonechnoy gofrirovannoy tsilindricheskoj obolochki [Rayleigh-type waves in a semi-infinite corrugated cylindrical shells]. *Izv. Ross. Akad. Nauk MTT* [The journal Mechanics of Solids. A Journal of RAS], 2001, no. 3, pp. 151–158.

9. Gulgazaryan G.R. Gulgazaryan L.G. Vibrations of a corrugated orthotropic cylindrical shells with free edges. *Int. Appl. Mechanics*, 2006, no. 42(12), pp. 1398–1413.
10. Gulgazaryan G.R. Kolebaniya bezmomentnoy konsolnoy nezamknutoy tsilindricheskoy obolochki peremennoy krivizny [Vibrations of non-closed orthotropic cantilever membrane cylindrical shells]. *Izv. Ross. Akad. Nauk MTT* [The journal Mechanics of Solids. A Journal of RAS], 2007, no. 1, pp. 84–99.
11. Vilde M.V., Kaplunov Yu.D., Kossovich L.Yu. *Kraevye i interfeysnye rezonansnye yavleniya v uprugich telach* [Edge and interfacial resonance phenomenon in elastic solids]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2010. 280 p.
12. Gulgazaryan G.R. Vibrations of semi-infinite orthotropic cylindrical shells of open profile. *Int. Appl. Mechanics*, 2004, no. 40(2), pp. 199–212.
13. Gulgazaryan G.R. O lokalizatsionnykh sobstvennykh kolebaniyakh u svobodnogo tortsya polubeskonechnoy zamknutoy krugovoy tsilindricheskoy obolochki [On localized free vibrations at the free end of semi-infinite closed circular cylindrical shells]. *Izv. Ross. Akad. Nauk MTT* [The journal Mechanics of Solids. A Journal of RAS], 2003, no. 1, pp. 180–192.
14. Gulgazaryan G.R., Gulgazaryan L.G. O kolebaniyakh tonkoy uprugoy ortotropnoy tsilindricheskoy obolochki so svobodnymi krayami [On vibrations of thin elastic orthotropic cylindrical shells with free ends]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and plasticity]. Nizhnii Novgorod, izd-vo Nizhegor. un-ta, 2006, no. 68, pp. 150–160.
15. Gulgazaryan G.R. Natural vibrations of a cantilever thin elastic orthotropic cylindrical shell. *Int. Appl. Mechanics*, 2008, no. 44(5), pp. 539–554.
16. Gulgazaryan G.R., Gulgazaryan L.G., Saakyan R.D. The vibrations thin elastic orthotropic circular cylindrical shell with free and hinged edges. *J. Appl. Math. Mech.*, 2008, no. 72(3), pp. 1398–1413.
17. Gulgazaryan G.R., Gulgazaryan R.G., Srapionyan Dg.L. Localized vibrations of a thin-walled structure consisted of orthotropic elastic non-closed cylindrical shells with free and rigid-clamped edge generators. *ZAMM*, 2013, no. 93(4), pp. 269–283.
18. Zilbergeyt A.S., Suslova I.B. Kontaknyye volny izgiba v tonkikh plastinkakh [Contact bending waves in thin plates]. *Acoust. Zh.* [Akust. Zhurnal], 1983, no. 29, pp. 186–191.
19. Gertman I.P., Lisitskiy O.N. Otrazhenie i prokhozhdenie zvukovykh voln cherez granitsu razdela dvukh sostykovannykh uprugikh polupolos [Reflection and transmission of acoustic waves at the interface of separation of two elastic semi-strips]. *Prikladnaya matematika i mehanika* [Appl. Mat. and Mech.], 1998, no. 52, pp. 1044–1048.
20. Stoneley R. The elastic waves at the interface of two solids. *Proc. Roy Soc. London A.*, 1924, no. 106, pp. 416–429.
21. Gulgazaryan G.R., Gulgazaryan L.G., Miklashevich I.A., Pletezhov A.A., Chachanyan A.A. Svobodnye interfeysnye kolebaniya beskonечноy bezmomentnoy tsilindricheskoy obolochki s proizvolnoy napravlyayushey [Free interfacial vibrations of unmoment infinite cylindrical shells with arbitrary smooth directing curve]. *Vestnik FFI* [Vestnik of the Foundation for Fundamental Research], 2012, no. 1, pp. 59–80.
22. Gulgazaryan G.R., Miklashevich I.A. Svobodnye interfeysnye kolebaniya bezmomentnoy tsilindricheskoy obolochki peremennoy krivizny s zhestko zaschemlennymi tortsami [Free interfacial vibrations of unmoment cylindrical shells with variable curvature and rigid clamped ends]. *Uchenye zapiski AGPU im. H. Abovyan* [Scientific news of ASPY after Kh. Abovyan], 2012, no. 2(17), pp. 57–87.
23. Gulgazaryan G.R., Gulgazaryan L.G., Miklashevich I.A. Svobodnye interfeysnye i kraevye kolebaniya konsolnoy sostavnoy bezmomentnoy tsilindricheskoy obolochki peremennoy krivizny [Free interfacial and edge vibrations of cantilever composed unmoment cylindrical shells with variable curvature]. *Izv. NAN Armenii. Mehanika* [The Journal of NAS RA. Mechanics], 2011, vol. 64, no. 1, pp. 37–49.
24. Gulgazaryan G.R., Gulgazaryan R.G. O svobodnykh interfeysnykh kolebaniyakh tonkikh uprugikh krugovykh tsilindricheskikh obolochek [About free interfacial vibrations of thin elastic circular cylindrical shells]. *Mechanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2013, no. 4(25), pp. 12–19.
25. Ermolenko V.M. Vliyaniye parametrov ortotropii na spektr v zadachakh kolebaniy obolochek [The effect of orthotropy parameters on the spectrum in shell vibration problems]. *Zh Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.* [Journal of Applied Mechanics and Technical Physics], 1980, no. 1, pp. 163–170.
26. Ambartsumyan S.A. *Teoriya anizotropnykh obolochek* [The Theory of Anisotropic Shells]. Moscow, Gos.izd.fiz.mat.lit., 1961. 384 p.
27. Gulgazaryan G.R., Gulgazaryan R.G., Mikhasev G.I. Osvoobodnykh interfeysnykh i kraevykh kolebaniyakh polubeskonechnykh plastin so svobodnym kraem [About free boundary and interfacial vibrations of thin elastic semi-infinite plates with free end]. *Mechanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2015, no. 2(31), pp. 29–36.
28. Gulgazaryan G.R., Gulgazaryan R.G., Mikhasev G.I. Svobodnye interfacnye i kraevye kolebaniya tonkikh uprugikh polubeskonechnykh krugovykh tsilindricheskikh obolochek so svobodnym tortsom [Free interfacial and boundary vibrations of thin elastic semi-infinite circular cylindrical shells]. *Problemy dinamiki vzaimodeystviya deformiruemykh sred* [The problems of dynamics of interaction of deformable media], Yerevan, 2014, pp. 187–191.
29. Gulgazaryan G.R., Lidskiy V.B. Plotnost chastot svobodnykh kolebaniy tonkoy anizotropnoy obolochki, sostavlennoy iz anizotropnykh sloev [The frequency density of the free vibrations of a thin anisotropic shell composed of anizotrpic layers]. *Izv. AN SSSR MTT* [The Journal of AS USSR, Mechanics of solids], 1982, no. 3, pp. 171–174.