

УДК 539.4

А.П. ЯНКОВСКИЙ, д-р физ.-мат. наук

ведущий научный сотрудник лаборатории «Физики быстропротекающих процессов»

E-mail: yankovsky_ap@rambler.ru

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 19.10.2017.

МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ИЗГИБА СЭНДВИЧ-ПАНЕЛЕЙ С ТОНКИМИ АРМИРОВАННЫМИ НЕСУЩИМИ СЛОЯМИ

В рамках теории пластичности деформационного типа в геометрически линейной постановке сформулирована задача неупругого изгиба сэндвич-панелей с тонкими армированными несущими слоями. Ослабленное сопротивление заполнителя поперечным сдвигам учитывается на основе кинематической гипотезы прямолинейной нормали при ее независимой ротации. Линеаризация поставленной задачи проводится методом переменных параметров упругости. В случае цилиндрического изгиба исследовано упругопластическое поведение прямоугольных удлиненных трехслойных композитных пластин со слабым сотовым наполнителем. Проведен анализ зависимости податливости в поперечном направлении таких конструкций от параметров армирования несущих слоев. Обнаружено, что в зависимости от ориентации ячеек сотового наполнителя относительно нормали к опорной кромке сэндвич-панели могут реализоваться два разных «механизма» ее деформирования: «классический», когда доминирует изгибное состояние, и «неклассический», когда доминирующее влияние на прогиб оказывает поперечный сдвиг заполнителя. В последнем случае в окрестности опорных кромок возникают краевые эффекты, которые характеризуют «срез» трехслойной конструкции в поперечном направлении. Выявлено, что при реализации неклассического механизма деформирования изменение прогиба сэндвич-панели в меньшей степени зависит от варьирования параметров армирования (углов и плотностей) несущих слоев, чем при реализации классического механизма деформирования такой конструкции. Обнаружено, что минимум податливости сэндвич-панели достигается при такой ориентации ячеек сотового наполнителя, когда реализуется классический механизм ее деформирования.

Ключевые слова: сэндвич-панель, армированные несущие слои, упругопластическое деформирование, ослабленное сопротивление поперечному сдвигу, влияние структуры армирования, сотовый наполнитель

Введение. Известно, что при изгибе тонкостенных конструкций типа балок, пластин и оболочек рациональными являются трехслойные структуры с внешними несущими слоями, поэтому изучению проблемы деформирования таких изделий посвящено большое количество исследований [1–13]; обзор публикаций по сэндвич-конструкциям приведен в [3]. В подавляющем большинстве работ по этой тематике рассматривается линейно-упругое или линейно-вязкоупругое поведение материалов слоев [1–3, 7–9]. Публикации, посвященные неупругому деформированию таких конструкций, пока малочисленны [4–6, 10–13], причем в них, как правило, материалы несущих слоев предполагаются однородными и изотропными.

Современные же технологии позволяют создавать армированные волокнами несущие слои сэндвич-конструкций. В силу высоких жесткостных характеристик армированных несущих слоев трехслойная конструкция с наполнителем при неупругом изгибе может начать вести себя не так, как это традиционно принято считать на основе линейно-упругих решений. Упругопластическое поведение сэндвич-панелей с армированными

несущими слоями до настоящего времени не изучалось. Исследованию этой проблемы в рамках деформационной теории пластичности посвящена данная работа.

Постановка задачи и метод решения. Рассмотрим сэндвич-пластину, состоящую из наполнителя толщиной $2h$ и несущих слоев толщиной $h^{(-)}$ и $h^{(+)}$. Индексы $(-)$ и $(+)$ здесь и далее означают, что данная величина относится к нижнему или верхнему несущему слою соответственно. Несущие слои считаются тонкими ($h^{(\pm)} \ll h$). С трехслойной пластиной связана прямоугольная декартова система координат так, что ось Ox_3 направлена в поперечном направлении, а отсчетная плоскость Ox_1x_2 совпадает со срединной плоскостью наполнителя (рисунок 1).

Заполнитель может представлять собой ребристую конструкцию периодической структуры, в частности сотовую (рисунок 2), или армированный материал с регулярной в плоскости Ox_1x_2 объемной решеткой. В последнем случае элементами решетки являются цилиндрические оболочечные элементы толщиной δ_i (здесь i — номер армирующего элемента решетки; на рисунке 2

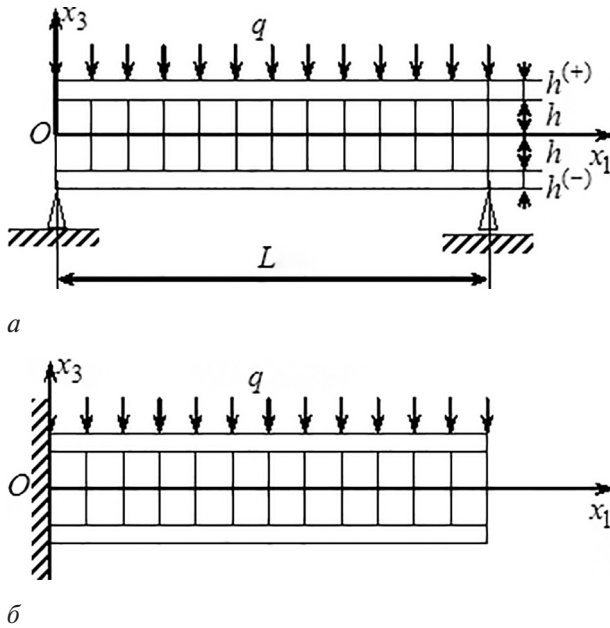


Рисунок 1 — Сэндвич-панель (вид сбоку): а — шарнирно опертая; б — консольная

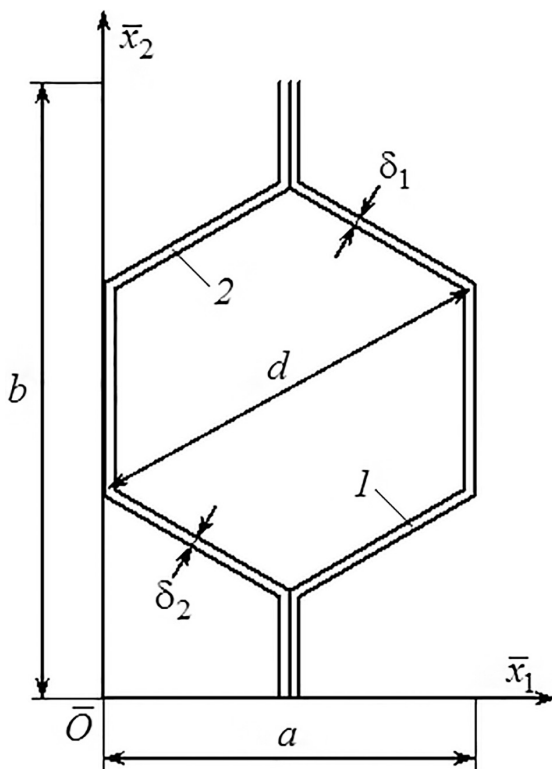


Рисунок 2 — Ячейка периодичности сотового заполнителя

$i = 1, 2$), образующие которых параллельны оси Ox_3 . Заполнитель является композиционным материалом в том случае, когда пустоты между армирующими элементами (которые на рисунке 2 обозначены как 1 и 2) заполнены некоторым материалом, например пенопластмассой [4]. С простейшей ячейкой периодичности заполнителя, имеющей размеры $a \times b \times 2h$, связана локальная декартова прямоугольная система координат $\bar{O}\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$, причем оси Ox_3 и $\bar{O}\bar{x}_3$ по направлению

совпадают. В общем случае репрезентативная ячейка заполнителя может быть повернута относительно глобальной системы координат $Ox_1x_2x_3$ вокруг оси $Ox_3 = \bar{O}\bar{x}_3$.

Несущие слои перекрестно армированы в своей плоскости $K^{(\pm)}$ семействами волокон. Структура армирования несущих слоев характеризуется плотностями $\omega_k^{(\pm)}$ и углами $\psi_k^{(\pm)}$ (отсчитываемыми от направления Ox_1) армирования ($1 \leq k \leq K^{(\pm)}$) и является квазиоднородной по толщине. В силу предположения о тонкости несущих слоев в них не учитываются изгибные составляющие напряженного состояния.

Прогибы и деформации считаются малыми, т. е. задача исследуется в геометрически линейной постановке.

Ослабленное сопротивление заполнителя поперечным сдвигам учитывается на основе кинематической гипотезы прямолинейной нормали [2], поэтому перемещения точек заполнителя в тангенциальном направлении задаются так (задача рассматривается в квазистатической постановке):

$$u_i(\mathbf{r}) = (u_i^{(+)}(\mathbf{x}) - u_i^{(-)}(\mathbf{x}))x_3 / (2h) + (u_i^{(+)}(\mathbf{x}) + u_i^{(-)}(\mathbf{x})) / 2, \quad (1)$$

$$|x_3| \leq h, \mathbf{x} \in G, i = 1, 2, \mathbf{x} = \{x_1, x_2\}, \mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\},$$

где $u_i^{(\pm)}$ — перемещения точек несущих слоев ($x_3 = \pm h$) в направлении x_i ($i = 1, 2$); G — область, занимаемая пластиной в плане.

На основе традиционной для тонкостенных элементов конструкций гипотезы $u_3(\mathbf{r}) = w(\mathbf{x})$ [2] и дифференциальных соотношений Коши [14] с учетом (1) получаем следующие выражения для деформаций в слоях сэндвич-панели:

$$2\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) = (\varepsilon_{ij}^{(+)}(\mathbf{x}) - \varepsilon_{ij}^{(-)}(\mathbf{x}))x_3 / h + \varepsilon_{ij}^{(+)}(\mathbf{x}) + \varepsilon_{ij}^{(-)}(\mathbf{x});$$

$$2\varepsilon_{i3}(\mathbf{r}) \equiv 2\varepsilon_{i3}(\mathbf{x}) = (u_i^{(+)} - u_i^{(-)}) / (2h) + w_{,i}; \quad (2)$$

$$2\varepsilon_{ij}^{(\pm)}(\mathbf{x}) = u_{i,j}^{(\pm)} + u_{j,i}^{(\pm)}, \quad |x_3| \leq h, \mathbf{x} \in G, i, j = 1, 2,$$

где w — прогиб; индекс после запятой означает частное дифференцирование по координате x_i ($i = 1, 2$).

Материалы компонентов композиции каждого слоя сэндвич-пластины являются однородными и изотропными, а их механическое поведение описывается определяющими уравнениями теории пластичности деформационного типа, причем допускается разнсопротивляемость материалов растяжению и сжатию. Предполагается, что определяющие уравнения удовлетворяют достаточным условиям сходимости метода последовательных приближений (см. с. 199 в [15]), аналогичного методу переменных параметров упругости [14]. Согласно этому, определяющие уравнения для фазовых материалов линеаризуются и на их основе можно получить линеаризованные определяющие уравнения для композиции каждого слоя сэндвич-пластины, которые в тензорной форме записываются так [16, 17]:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = c_{ijml}(\mathbf{r})\varepsilon_{ml}(\mathbf{r}), \sigma_{i3}(\mathbf{r}) = 2c_{i3m3}(\mathbf{r})\varepsilon_{m3}(\mathbf{r}) (|x_3| \leq h), \quad (3)$$

$$\sigma_{ij}^{(\pm)}(\mathbf{x}) = c_{ijml}^{(\pm)}(\mathbf{x})\varepsilon_{ml}^{(\pm)}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in G, i, j = 1, 2,$$

где σ_{ij} — осредненные напряжения в композиции заполнителя; $\sigma_{ij}^{(\pm)}$ — то же в композициях несущих слоев; c_{ijml}, c_{i3m3} — эффективные жесткости композиции заполнителя на текущей итерации метода последовательных приближений, которые определяются механическими характеристиками материалов компонентов композиции репрезентативной ячейки заполнителя, ее размерами и геометрией ребристых армирующих элементов (см. рисунок 2) и вычисляются по структурным соотношениям, полученным в [17]; $c_{ijml}^{(\pm)}$ — то же для несущих слоев и определяются механическими характеристиками материалов фаз композиции и параметрами армирования $\omega_k^{(\pm)}, \psi_k^{(\pm)}$ ($1 \leq k \leq K^{(\pm)}$) и вычисляются по структурным формулам из [16].

Равенства (3) записаны с учетом традиционной для тонкостенных элементов конструкций статической гипотезы $\sigma_{33} \approx \sigma_{33}^{(\pm)} \approx 0$, на основании которой из рассмотрения исключены деформации $\varepsilon_{33}, \varepsilon_{33}^{(\pm)}$. В соотношениях (3) и далее по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 2. Эффективные жесткости в (3) предполагаются известными из решения рассматриваемой задачи на предыдущей итерации метода последовательных приближений.

Используя соотношения (2) и (3), на текущей итерации можно определить силовые факторы, действующие в сэндвич-панели:

$$F_{ij}(\mathbf{x}) = \int_{-h}^h \sigma_{ij}(\mathbf{r}) dx_3 + h^{(+)}\sigma_{ij}^{(+)}(\mathbf{x}) + h^{(-)}\sigma_{ij}^{(-)}(\mathbf{x}) =$$

$$= A_{ijml}^{(+)}u_{l,m}^{(+)} + A_{ijml}^{(-)}u_{l,m}^{(-)};$$

$$M_{ij}(\mathbf{x}) = \int_{-h}^h \sigma_{ij}(\mathbf{r}) x_3 dx_3 + h(h^{(+)}\sigma_{ij}^{(+)}(\mathbf{x}) - h^{(-)}\sigma_{ij}^{(-)}(\mathbf{x})) =$$

$$= B_{ijml}^{(+)}u_{l,m}^{(+)} + B_{ijml}^{(-)}u_{l,m}^{(-)}; \quad (4)$$

$$F_{i3}(\mathbf{x}) = \int_{-h}^h \sigma_{i3}(\mathbf{r}) dx_3 =$$

$$= D_{i3m3} [w_m + (u_m^{(+)} - u_m^{(-)}) / (2h)], \mathbf{x} \in G, i, j = 1, 2,$$

где

$$A_{ijml}^{(\pm)}(\mathbf{x}) = A_{ijml} \pm B_{ijml} + h^{(\pm)}c_{ijml}^{(\pm)},$$

$$B_{ijml}^{(\pm)}(\mathbf{x}) = hB_{ijml} \pm C_{ijml} \pm hh^{(\pm)}c_{ijml}^{(\pm)}, \quad (5)$$

$$A_{ijml}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int_{-h}^h c_{ijml}(\mathbf{r}) dx_3, B_{ijml}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h c_{ijml}(\mathbf{r}) x_3 dx_3,$$

$$C_{ijml}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h c_{ijml}(\mathbf{r}) x_3^2 dx_3, D_{i3m3}(\mathbf{x}) = \int_{-h}^h c_{i3m3}(\mathbf{r}) dx_3;$$

F_{ij}, F_{i3} — мембранные и поперечные силы; M_{ij} — изгибающие и крутящие моменты. Равенства (4) и (5) получены в предположении о тонкости несущих слоев.

Силовые факторы (4) удовлетворяют уравнениям равновесия [14, 15]:

$$F_{ij,j} = -X_i(\mathbf{x}), M_{ij,j} - F_{i3} = -m_l(\mathbf{x}), \quad (6)$$

$$i = \overline{1, 3}, l = 1, 2, \mathbf{x} \in G,$$

где X_i — приведенная распределенная внешняя нагрузка, действующая в направлении x_i ($i = \overline{1, 3}$), которая порождена объемной нагрузкой и поверхностными нагрузками, приложенными к лицевым поверхностям сэндвич-панели (на рисунке 1 изображен случай $X_1 = X_2 = 0, X_3 = -q = \text{const}$); m_l — приведенные распределенные внешние моменты, порожденные теми же нагрузками.

После подстановки соотношений (4) в (6) получаем уравнения равновесия в разрешающем виде:

$$(A_{ijml}^{(+)}u_{l,m}^{(+)} + A_{ijml}^{(-)}u_{l,m}^{(-)})_j = -X_i(\mathbf{x});$$

$$(B_{ijml}^{(+)}u_{l,m}^{(+)} + B_{ijml}^{(-)}u_{l,m}^{(-)} - D_{i3m3} [w_m + (u_m^{(+)} - u_m^{(-)}) / (2h)]) = -m_l(\mathbf{x}); \quad (7)$$

$$\{D_{j3m3} [w_m + (u_m^{(+)} - u_m^{(-)}) / (2h)]\}_j = -X_3(\mathbf{x}), i = 1, 2, \mathbf{x} \in G.$$

Для однозначного интегрирования системы (7) на одной части кромки сэндвич-панели (обозначим ее Γ_p) должны быть заданы статические граничные условия:

$$F_{ij}n_j = P_i(\mathbf{x}), M_{ij}n_j = M_l(\mathbf{x}), i = \overline{1, 3}, \quad (8)$$

$$l = 1, 2, \mathbf{x} \in \Gamma_p, n_1 = \cos \alpha, n_2 = \sin \alpha,$$

а на другой части (обозначим ее Γ_u) — кинематические (см. (1)):

$$u_i^{(\pm)} = u_{i0}^{(\pm)}(\mathbf{x}), w = w_0(\mathbf{x}), i = 1, 2, \mathbf{x} \in \Gamma_u. \quad (9)$$

где P_i, P_3 — заданные на контуре Γ_p мембранные и перерезывающие силы; M_l — заданные на Γ_p моменты; $u_{i0}^{(\pm)}$ — заданные на контуре Γ_u перемещения точек несущих слоев в тангенциальных направлениях x_i ($i = 1, 2$); w_0 — заданный на Γ_u прогиб; $\Gamma = \Gamma_p \cup \Gamma_u$ — контур, ограничивающий область G ; α — угол внешней нормали к контуру Γ .

Подставив соотношения (4) в (8), получим статические граничные условия в разрешающем виде:

$$(A_{ijml}^{(+)}u_{l,m}^{(+)} + A_{ijml}^{(-)}u_{l,m}^{(-)})n_j = P_i(\mathbf{x}),$$

$$(B_{ijml}^{(+)}u_{l,m}^{(+)} + B_{ijml}^{(-)}u_{l,m}^{(-)})n_j = M_l(\mathbf{x}), \quad (10)$$

$$n_j D_{j3m3} [w_m + (u_m^{(+)} - u_m^{(-)}) / (2h)] = P_3(\mathbf{x}), i = 1, 2, \mathbf{x} \in \Gamma_p.$$

Возможно задание смешанных из (9) и (10) граничных условий, например в случае шарнирного опирания кромки трехслойной пластины [2].

Таким образом, на каждой итерации метода последовательных приближений требуется проинтегрировать систему дифференциальных уравнений (7), которая имеет десятый порядок, поэтому в каждой точке контура Γ должны быть заданы пять граничных условий (9) или (10), или пять смешанных из (9) и (10) условий. Так как система разрешающих уравнений (7) и соответствующие ей граничные условия (9) и (10) на каждой итерации формально совпадают с уравнениями

и граничными условиями изгиба упругих неоднородных пластин в рамках теории Рейсснера [18], то для интегрирования поставленной задачи могут быть использованы численные методы, разработанные на основе соотношений этой теории (в частности, МКЭ [18, 19]).

Модельная задача. Для демонстрации особенностей упругопластического деформирования сэндвич-панели с армированными несущими слоями достаточно исследовать простые случаи ее цилиндрического изгиба. Поэтому рассмотрим прямоугольную удлиненную сэндвич-панель, сориентированную вдоль оси Ox_2 и имеющую ширину L . Трехслойная пластина либо шарнирно оперта вдоль удлиненных кромок $x_1 = 0, L$ (см. рисунок 1 а), либо жестко закреплена на продольной кромке $x_1 = 0$ и свободна от нагружения на другой продольной кромке $x_1 = L$ (см. рисунок 1 б). Сэндвич-панель нагружена равномерным давлением со стороны верхней лицевой поверхности ($X_3 = -q = \text{const}$, $X_i \equiv 0$, $m_i \equiv 0$, $i = 1, 2$). Структуры армирования несущих слоев в продольном направлении Ox_2 не изменяются, поэтому решение данной задачи приближенно соответствует случаю цилиндрического изгиба, т. е. не зависит от координаты x_2 .

Для случаев, изображенных на рисунок 1, требуемые в процессе решения внутренние силовые факторы имеют выражения (см. (6) и (8)): при шарнирном опирании (см. рисунок 1 а)

$$\begin{aligned} F_{11}(x_1) = 0, \quad F_{13}(x_1) = q(x_1 - L/2), \\ M_{11}(x_1) = qx_1(x_1 - L)/2, \quad 0 \leq x_1 \leq L; \end{aligned} \quad (11)$$

в случае консольной трехслойной пластины (см. рисунок 1 б)

$$\begin{aligned} F_{11}(x_1) = 0, \quad F_{13}(x_1) = q(x_1 - L), \\ M_{11}(x_1) = q(x_1 - L)^2/2, \quad 0 \leq x_1 \leq L. \end{aligned} \quad (12)$$

Рассматривается случай легкого заполнителя, поэтому в (3) можно принять $c_{jmi}(\mathbf{r}) \approx 0$ ($i, j, m, l = 1, 2$). Кроме того, предполагается, что ячейка периодичности заполнителя сориентирована так, что локальная ось $\bar{O}\bar{x}_1$ (см. рисунок 2) совпадает с осью Ox_1 или с осью Ox_2 глобальной системы координат (см. рисунок 1, где ось Ox_2 перпендикулярна плоскости рисунка). При этом из соотношений (4) с учетом (2), (3) и (5) получаем

$$4hc_{1313}(\varepsilon_{13})\varepsilon_{13} = F_{13}(x_1), \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad (13)$$

где функция F_{13} известна из (11) или (12) и учтено, что деформация ε_{13} не зависит от координаты x_3 (см. (2)).

Для простоты предполагаем: толщины несущих слоев и их структуры армирования одинаковы ($h^{(-)} = h^{(+)}$, $\omega_k^{(-)} = \omega_k^{(+)}$, $\psi_k^{(-)} = \psi_k^{(+)}$, $1 \leq k \leq K^{(-)} = K^{(+)}$), а материалы компонентов композиции одинаково сопротивляются растяжению и сжатию [14]. При этом считаем, что в каждом несущем слое уложено два семейства армирующих волокон ($K^{(\pm)} = 2$)

с одинаковой плотностью армирования ($\omega_1^{(\pm)}(x_1) = \omega_2^{(\pm)}(x_1)$) и симметрично относительно направления оси Ox_1 ($\psi_1^{(\pm)}(x_1) = -\psi_2^{(\pm)}(x_1)$). Отсюда следует, что для сэндвич-панелей, изображенных на рисунке 1, $u_2^{(\pm)} = 0$, $w_2 = 0$ (поэтому $\varepsilon_{23} = 0$) и $u_1^{(-)}(x_1) = u_1^{(+)}(x_1)$. А значит, согласно (2)–(5), равенства $F_{11}(x_1) = 0$ в (11) и (12) выполняются тождественно, для изгибающего же момента с учетом предположения о легком заполнителе из соотношений (4) с учетом (2) и (3) получаем

$$2hh^{(+)}c_{1111}^{(+)}(\varepsilon_{11}^{(+)})\varepsilon_{11}^{(+)} = M_{11}(x_1), \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad (14)$$

где функция M_{11} известна из (11) или (12).

Так как правые части в равенствах (13) и (14) известны в каждой точке $x_1 \in [0, L]$, решая эти уравнения независимо друг от друга методом переменных параметров упругости [14], можем определить неизвестные функции $\varepsilon_{11}^{(+)}(x_1) = -\varepsilon_{11}^{(-)}(x_1)$ и $\varepsilon_{13}(x_1)$. Зная $\varepsilon_{11}^{(+)}(x_1)$ и интегрируя кинематическое равенство $u_{1,1}^{(+)}(x_1) = \varepsilon_{11}^{(+)}(x_1)$ (см. (2)), можем вычислить тангенциальное перемещение $u_1^{(+)}(x_1)$. При этом в случае шарнирного опирания (см. рисунок 1 а) в качестве краевого условия нужно использовать условие симметрии $u_1^{(+)}(L/2) = 0$, а в случае консольной сэндвич-панели (см. рисунок 1 б) – граничное условие $u_1^{(+)}(0) = 0$ (см. (9)). При известных $u_1^{(+)}(x_1) = -u_1^{(-)}(x_1)$ и $\varepsilon_{13}(x_1)$ прогиб $w(x_1)$ определяется за счет интегрирования кинематического соотношения $w_{,1} = 2\varepsilon_{13} - u_1^{(+)} / h$ (см. (2)) при граничном условии $w(0) = 0$ (см. рисунок 1).

Таким образом, модельная задача полностью решена.

Обсуждение результатов расчетов. В качестве конкретных примеров исследуем изгибное поведение композитных сэндвич-панелей, изображенных на рисунке 1 (модельные задачи). Толщина заполнителя трехслойных пластин $2h = 13$ мм [20], толщины несущих слоев $h^{(\pm)} = 1$ мм [20], ширина L прямоугольных удлиненных пластин может быть разной. Легкий заполнитель представляет собой сотовую конструкцию (см. рисунок 2): диаметр соты $d = 8$ мм [20], толщина стенок соты $\delta_1 = \delta_2 = 0,05$ мм [20].

Сотовый заполнитель изготовлен из алюминия (низкопрочный сплав АДМ или высокопрочный сплав Д16), несущие слои выполнены из того же алюминиевого сплава и армированы одинаково и однородно двумя семействами борных волокон ($\omega_k^{(\pm)} = \omega_k$, $\omega_1 = \omega_2 = \text{const}$, $\psi_k^{(\pm)} = \psi_k$, $\psi_1 = -\psi_2 \equiv \psi = \text{const}$, $k = 1, 2$). Связь между напряжением σ и деформацией ε в каждом компоненте композиции каждого слоя при растяжении и сжатии описывается идеализированной диаграммой с линейным упрочнением [14]:

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_s = \sigma_s / E, \\ \text{sign}(\varepsilon)\sigma_s + E_s(\varepsilon - \text{sign}(\varepsilon)\varepsilon_s), & |\varepsilon| > \varepsilon_s, \end{cases}$$

где E , E_s – модуль Юнга и модуль линейного упрочнения материала; σ_s , ε_s – предел текучести

и соответствующая ему деформация. Механические характеристики материалов фаз композиции приведены в таблице 1, где ν — коэффициент Пуассона. Борные волокна ведут себя упруго-хрупко [21], поэтому величина E_s для них в таблице 1 не указана.

В качестве меры податливости изгибаемых пластин примем величину

$$w_m = \max_{0 \leq x_1 \leq L} |w(x_1)|. \quad (15)$$

В случае шарнирно опертой прямоугольной удлиненной сэндвич-панели (см. рисунок 1 а) $w_m = |w(L/2)|$, для консольной пластины (см. рисунок 1 б) $w_m = |w(L)|$.

Для удобства изложения введем в рассмотрение параметр n_h , условно задающий ориентацию сотовой ячейки заполнителя относительно глобальной системы координат $Ox_1x_2x_3$, связанной с сэндвич-панелью: если $n_h = 1$, то локальная ось \bar{Ox}_2 , связанная с ячейкой периодичности заполнителя (см. рисунок 2), совпадает с осью Ox_1 глобальной системы координат (см. рисунок 1); при $n_h = 2$ локальная ось \bar{Ox}_2 совпадает с глобальной осью Ox_2 . Далее на рисунок 3–5 кривые, номера которых помечены одним штрихом, рассчитаны при $n_h = 1$, а двумя штрихами — при тех же условиях, но с параметром $n_h = 2$.

На рисунке 3 изображены зависимости $w_m(\omega)$, где $\omega = \omega_1 + \omega_2$ — суммарная плотность армирования несущих слоев. Расчеты выполнены для пластин из АДМ–В-композиции при $L = 40$ см. Кривые с разными номерами получены при разных углах армирования ψ : линии 1', 4' и 4'' определены при $\psi = 0$ (армирование в направлении оси Ox_1 на рисунке 1); кривые 2', 5' и 5'' — при $\psi = \pi/4$ (перекрестное угловое армирование по ортогональным траекториям); линии 3', 6' и 6'' — при $\psi = \pi/2$ (армирование вдоль оси Ox_2 , перпендикулярной плоскости рисунок 1). Кривые 1', 2' и 3' рассчитаны для шарнирно опертой пластины (см. рисунок 1 а) при $q = 60$ кПа (аналогичные зависимости для такой сэндвич-панели при $n_h = 2$ на рисунках 3 и 4 не приведены, так как величины (15) при этом превосходят толщину пластины, т. е. являются большими), остальные кривые на рисунке 3 получены для консольной пластины (см. рисунок 1 б) при $q = 15$ кПа.

Все кривые на рисунке 3 являются монотонно убывающими, что свидетельствует об уменьшении

Таблица 1 — Механические характеристики материалов компонентов композиции [21]

Материал	E , ГПа	ν	σ_s , МПа	E_s , ГПа
Алюминиевый сплав АДМ	71	0,32	30	0,143
Алюминиевый сплав Д16	71	0,32	380	1,250
Борные волокна (В)	410	0,23	3200	—

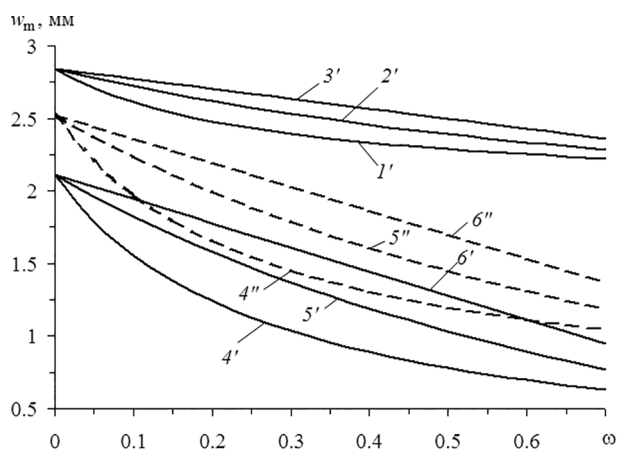


Рисунок 3 — Зависимость максимального по модулю прогиба сэндвич-панели от суммарной плотности армирования несущих слоев

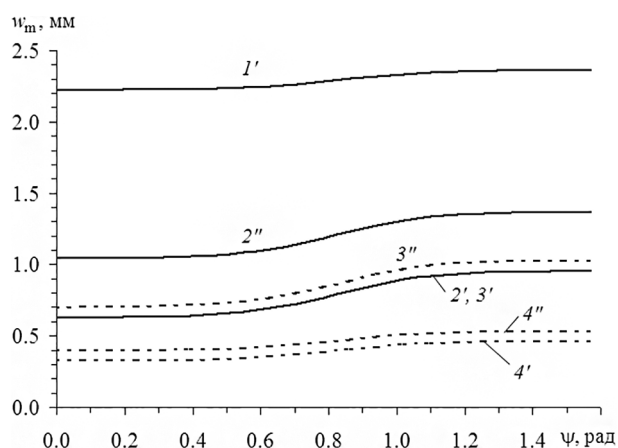


Рисунок 4 — Зависимость максимального по модулю прогиба сэндвич-панели от угла армирования несущих слоев

податливости сэндвич-панелей при увеличении плотностей армирования их несущих слоев при разных направлениях армирования. Однако если линии 3', 6' и 6'' визуально неотличимы от прямых, то кривые 1', 4', 4'' и 2', 5', 5'' имеют тенденцию к выполаживанию, т. е. в соответствующих случаях с увеличением ω эффект уменьшения податливости конструкции за счет усиления ее несущих слоев постепенно убывает. Кривые 4''–6'' лежат выше соответствующих линий 4'–6', поэтому с точки зрения минимизации податливости сэндвич-панелей существенным фактором является ориентация ячейки периодичности заполнителя (см. рисунок 2) относительно глобальной системы координат $Ox_1x_2x_3$.

Определенный интерес представляет и зависимость податливости сэндвич-конструкций от углов армирования несущих слоев ψ при фиксированных плотностях армирования ($\omega_1 = \omega_2 = \text{const}$). В дальнейших расчетах принято $\omega_1 = \omega_2 = 0,35$, что на практике соответствует предельно допустимому значению суммарной плотности армирования $\omega = 0,7$.

На рисунке 4 изображены зависимости $w_m(\psi)$ (см. (15)), рассчитанные для трехслойных кон-

струкций тех же размеров и при тех же уровнях нагружения, что и на рисунке 3. Сплошные линии 1', 2' и 2'' на рисунке 4 получены для сэндвич-панелей из АДМ–В-композиции, а штриховые линии 3', 3'', 4' и 4'' — из Д16–В-композиции. Поведение конструкций из Д16–В-композиции во всех расчетах настоящего исследования оказалось линейно-упругим. Кривые 2' и 3' на рисунке 4 совпадают. Линии 1', 4' и 4'' соответствуют шарнирно опертым пластинам (см. рисунок 1 а), а кривые 2', 2'', 3' и 3'' — консольным (см. рисунок 1 б). Все кривые на рисунке 4 монотонно возрастают, но имеют разную изменяемость, для оценки которой используем величину

$$\Delta w_m = \frac{w_m(\pi/2) - w_m(0)}{(w_m(\pi/2) + w_m(0))/2}. \quad (16)$$

Значения (16), рассчитанные для кривых на рисунке 4, приведены в таблице 2, из которой видно, что наибольшей изменяемостью Δw_m обладают зависимости $w_m(\psi)$ в случае линейно-упругого поведения материалов компонентов композиции сэндвич-панели (см. кривые 2', 3', 3'', 4' и 4'' на рисунке 4 и соответствующие значения Δw_m в таблице 2). Для объяснения того факта, почему в случаях упругопластического деформирования трехслойных пластин зависимости $w_m(\psi)$ обладают малой изменяемостью (см. кривые 1' и 2''), рассмотрим особенности поведения прогибов $w(x_1)$ соответствующих сэндвич-панелей с армированными несущими слоями.

На рисунке 5 изображены эпюры прогиба $w(x)$ (где $x = x_1 / L$) для шарнирно опертых сэндвич-панелей разной ширины L (см. рисунок 5 а) и консольных пластин шириной $L = 40$ см (см. рисунок 5 б), рассчитанные при $\psi = 0$ и $\omega_1 = \omega_2 = 0,35$. Кривые 1', 4', 4'' на рисунке 5 а получены при $L = 40$ см и $q = 60$ кПа. Относительная толщина таких пластины $H / L = 1,5 / 40 = 0,0375$ (где $H = 2h + h^{(+)} + h^{(-)}$ — общая толщина слоистого пакета). Кривая 2' определена при $L = 80$ см и $q = 26$ кПа ($H / L = 0,01875$), а линия 3' — при $L = 1$ м и $q = 15$ кПа ($H / L = 0,015$). Кривые 4' и 4'' получены для пластин из Д16–В-композиции (поведение которых линейно-упруго), остальные линии — из АДМ–В-композиции (деформирование соответствующих сэндвич-панелей упругопластическое).

Поведение кривых 1' и 3', 4', 4'' на рисунке 5 а качественно различно. Кривая же 2' по своему качественному поведению занимает как бы промежуточное положение между линиями 1' и 3', 4', 4''.

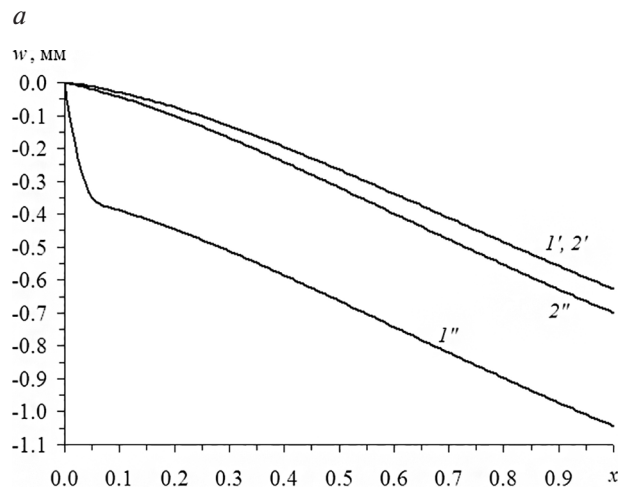
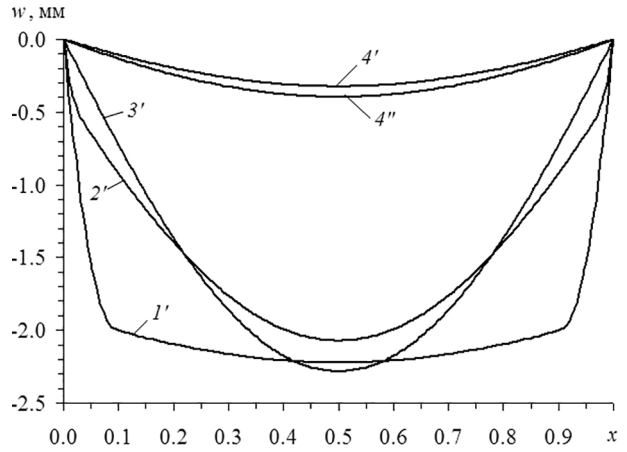


Рисунок 5 — Зависимость прогиба сэндвич-панели от безразмерной координаты x при «поперечном» армировании несущих слоев: а — случай шарнирного опирания; б — случай консоли

Согласно поведению кривой 3', в окрестности центрального сечения $x_1 = L / 2$ ($x = 0,5$) шарнирно опертой, весьма тонкой ($H / L = 0,015$) сэндвич-панели напряженное состояние в ней близко к образованию пластического шарнира [14, 22]. Такое поведение зависимости $w(x)$ является традиционным при изгибе шарнирно опертых прямоугольных удлиненных пластин [14, 22], поэтому этот механизм деформирования сэндвич-панелей назовем «классическим». Подобный механизм деформирования всегда реализуется при линейно-упругом изгибе трехслойных пластин (см. кривые 4', 4'').

Поведение кривой 1' на рисунке 5 а свидетельствует о том, что в относительно толстой ($H / L = 0,0375$) сэндвич-панели пластический

Таблица 2 — Изменяемость зависимости податливости сэндвич-пластин от угла армирования несущих слоев

Параметр решения	Номер кривой на рисунке 4						
	1'	2'	2''	3'	3''	4'	4''
Δw_m	0,059	0,409	0,268	0,409	0,375	0,344	0,290

шарнир в окрестности центрального сечения не образуется (центральная часть кривой 1' имеет малую кривизну), а основное деформирование конструкции происходит как бы за счет ее «среза» в поперечном направлении в окрестности опорных кромок, т. е. за счет активного развития неупругой деформации поперечного сдвига заполнителя ε_{13} , которая согласно (11) и (13) достигает наибольшего по модулю значения именно в окрестности опорных кромок. Такой механизм деформирования сэндвич-панели назовем «неклассическим». Из поведения кривой 1' видно: основной вклад в величину (15) в этом случае вносит сдвиг заполнителя в окрестности опорных кромок. Вклад же в величину w_m от изгиба (от изгибающего момента $M_{11}(x_1)$) мал, так как мала кривизна центрального участка линии 1'.

Из (11) и (13) следует, что в случае тонких несущих слоев деформация поперечного сдвига ε_{13} не зависит от структуры армирования этих слоев, а значит, от этого не зависит и величина абсолютного сдвига («среза») сэндвич-панели в окрестности опорных кромок. Согласно же (11), (14) и (2), от структуры армирования зависит лишь изгибная составляющая прогиба, определяемая степенью искривления центрального участка кривой 1'. Но кривизна этого участка мало изменяется при варьировании углов армирования несущих слоев ($0 \leq \psi \leq \pi/2$), так как при $\omega_1 + \omega_2 = 0,7$ несущие слои являются весьма жесткими. Именно это и объясняет причину того, что величина (16) для кривой 1' на рисунке 4 является малой (см. таблицу 2).

Таким образом, малая изменяемость зависимости податливости сэндвич-панели от параметров армирования ее тонких несущих слоев наблюдается только в тех случаях, когда такая конструкция деформируется упругопластически по неклассическому механизму изгиба (со значительным сдвигом в поперечном направлении в окрестности опорных кромок).

На кривой 2' рисунка 5 а еще наблюдаются краевые эффекты («срез») в окрестности опорных кромок, но уже намечается образование пластического шарнира в окрестности центрального сечения ($x = 0,5$). Из сравнения кривых 1' и 2' на рисунке 5 а видно, что с уменьшением относительной толщины сэндвич-панели (H/L) зоны краевых эффектов в них уменьшаются и при весьма малых значениях H/L или при линейно-упругом деформировании могут вообще не проявляться (см. кривые 3', 4' и 4'').

Разные механизмы деформирования сэндвич-панели могут наблюдаться и для конструкции с фиксированным характерным размером в плане L , но при разных значениях параметра n_h . Так, на рисунке 5 б зависимости $w(x)$ получены для консольных трехслойных пластин при $L = 40$ см и $q = 15$ кПа. Кривые 1' и 1'' определены для сэндвич-панелей из АДМ–В-композиции, а ли-

нии 2' и 2'' — из Д16–В-композиции, причем кривые 1' и 2' совпадают.

Согласно поведению кривых 1', 2' и 2'' на рисунке 5 б, соответствующие сэндвич-панели деформируются по классическому механизму изгиба. Поведение же кривой 1'' свидетельствует о том, что при $n_h = 2$ трехслойная АДМ–В-пластина деформируется по неклассическому механизму изгиба, так как в окрестности опорной кромки $x = 0$ наблюдается краевой эффект, вызванный значительным неупругим поперечным сдвигом сэндвич-панели.

Расчеты показали, что всем точкам кривой 2' на рисунке 4 соответствует классический механизм деформирования консольной пластины, а точкам кривой 2'' — неклассический механизм. Именно поэтому изменяемость (см. (16)) кривой 2'' на рисунке 4 в 1,5 раза меньше изменяемости кривой 2' (см. соответствующие значения Δw_m в таблице 2).

Выше предполагалось, что армирующие элементы заполнителя (например, стенки сотовой ячейки) не теряют устойчивости. Учет возможности такой потери устойчивости и закритического поведения силовых элементов заполнителя выходит за рамки данной работы. Однако, как показано в [23], при потере устойчивости стенок сотового заполнителя в случае его поперечного сдвига соответствующий секущий модуль c_{1313} (см. (13)) резко уменьшается, поэтому следует ожидать, что в этом случае неклассический механизм деформирования сэндвич-панели с армированными несущими слоями будет реализовываться чаще, а краевые эффекты будут проявляться более ярко, чем это имело место в настоящем исследовании.

Заключение. Проведенный анализ результатов расчетов линейно-упругого и упругопластического поведения изгибаемых сэндвич-панелей с легким заполнителем и тонкими армированными несущими слоями позволил обнаружить два механизма неупругого деформирования таких конструкций: «классический» и «неклассический». При реализации классического механизма деформирования сэндвич-панели происходит главным образом за счет изгиба (доминируют изгибные деформации). При реализации неклассического механизма деформирования трехслойных пластин определяется в основном (или, по крайней мере, во многом) ослабленным сопротивлением заполнителя поперечным сдвигам (изгибная составляющая уже не является доминирующей). В последнем случае в окрестности опорных кромок сэндвич-панели проявляются краевые эффекты, характеризующие «срез» такой конструкции в поперечном направлении. При неклассическом механизме деформирования сэндвич-панели варьирование структуры армирования ее тонких несущих слоев в меньшей степени сказывается на изменении податливости такой конструкции

в поперечном направлении, чем это наблюдается при реализации классического механизма ее деформирования. При линейно-упругом деформировании трехслойных пластин всегда реализуется классический механизм изгиба, поэтому влияние структуры армирования несущих слоев на податливость сэндвич-панелей в упругом случае сказывается в большей степени, чем при упругопластическом изгибе.

Список литературы

1. Александров, А.А. Расчет трехслойных панелей / А.А. Александров [и др.]. — М.: Оборонгиз, 1960. — 271 с.
2. Панин, В.Ф. Конструкции с заполнителем: справ. / В.Ф. Панин, Ю.А. Гладков. — М.: Машиностроение, 1991. — 272 с.
3. Noor, A.K. Computational models for sandwich panels and shells / A.K. Noor, W.S. Burton, Ch.W. Bert // Appl. Mech. Rev. — 1996. — Vol. 49, no. 3. — Pp. 155–199.
4. Vaziri, A. Metal sandwich plates with polymer foam-filled cores / A. Vaziri, Z. Xue, J.W. Hutchinson // Journal of Mechanics of Materials and Structures. — 2006. — Vol. 1, no. 1. — Pp. 97–127.
5. Some theoretical considerations on dynamic response of sandwich structures under impulsive loading / F. Zhu [et al.] // International Journal of Impact Engineering. — 2010. — Vol. 37. — Pp. 625–637.
6. Wilbert, A. Buckling and progressive crushing of laterally loaded honeycomb / A. Wilbert [et al.] // International Journal of Solids and Structures. — 2011. — Vol. 48. — Pp. 803–816.
7. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойного стержня в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. — 2013. — № 1(22). — С. 31–35.
8. Леоненко, Д.В. Свободные колебания трехслойных цилиндрических оболочек в упругой среде Пастернака / Д.В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. — 2013. — № 4(25). — С. 57–59.
9. Кравчук, А.С. Вязкоупругий чистый изгиб слоистых и композиционных призматических брусьев / А.С. Кравчук, Е.В. Томило // Механика машин, механизмов и материалов. — 2014. — № 3(28). — С. 48–52.
10. Джагангиров, А.А. Несущая способность усиленной трехслойной волокнистой круглой пластинки, зашпеленной по контуру и находящейся на несжимаемой среде / А.А. Джагангиров // Механика машин, механизмов и материалов. — 2015. — № 4(33). — С. 50–54.
11. Журавков, М.А. Повторное деформирование упругопластического трехслойного стержня локальной нагрузкой / М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. — 2016. — № 3(36). — С. 71–79.
12. Янковский, А.П. Неустановившаяся ползучесть слоистых стержней нерегулярной структуры из нелинейно-наследственных материалов / А.П. Янковский // Механика машин, механизмов и материалов. — 2016. — № 3(36). — С. 87–96.
13. Янковский, А.П. Моделирование динамического упругопластического поведения балок нерегулярной слоисто-волокнистой структуры / А.П. Янковский // Механика машин, механизмов и материалов. — 2017. — № 1(38). — С. 45–56.
14. Малинин, Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Н.Н. Малинин. — М.: Машиностроение, 1968. — 400 с.
15. Ильюшин, А.А. Труды. Т. 3. Теория термовязкоупругости / А.А. Ильюшин / Составители: Е.А. Ильюшина, В.Г. Тунгусова. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 288 с.
16. Янковский, А.П. Определение термоупругих характеристик пространственно армированных волокнистых сред при общей анизотропии материалов компонент композиции. 1. Структурная модель / А.П. Янковский // Механика композитных материалов. — 2010. — Т. 46, № 5. — С. 663–678.
17. Янковский, А.П. Моделирование термоупругого поведения ребристо-армированных пенопластмасс. Ч. 1: Уточненная структурная модель / А.П. Янковский // Космонавтика и ракетостроение. — 2013. — № 3(72). — С. 124–132.
18. Васидзу, К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу. — М.: Мир, 1987. — 542 с.
19. Баженов, В.А. Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры: Модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи / В.А. Баженов, О.П. Кривенко, Н.А. Соловей. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. — 336 с.
20. Брюккер, Л.Э. Испытания трехслойных стержней при нормальных и повышенных температурах / Л.Э. Брюккер, А.С. Ракин // Динамика и прочность авиационных конструкций: межвуз. сб. науч. тр. — Новосибирск: Изд-во НГУ, НЭТИ, 1978. — Вып. 4. — С. 73–79.
21. Композиционные материалы: справ. / под ред. Д.М. Карпиноса. — Киев: Наук. думка, 1985. — 592 с.
22. Качанов, Л.М. Основы теории пластичности / Л.М. Качанов. — М.: Наука, 1969. — 420 с.
23. Теоретико-экспериментальный метод определения усредненных упругих и пространственных характеристик сотового заполнителя трехслойных конструкций / Н.И. Акишев [и др.] // Механика композитных материалов. — 2011. — Т. 47, № 4. — С. 543–556.

YANKOVSKII Andrei P., D. Sc. in Phys. & Math.

Leading Researcher of the Laboratory “Physics of Fast Processes”

E-mail: yankovsky_ap@rambler.ru

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

Received 19 October 2017.

MODELING OF ELASTIC-PLASTIC BENDING OF SANDWICH PANELS WITH THIN REINFORCED BEARING LAYERS

In the framework of the deformational theory of plasticity and in a geometrically linear formulation, the problem of inelastic bending for sandwich panels with thin reinforced bearing layers is formulated. The weakened resistance of the core to the transverse shears on base of the kinematic hypothesis of straight normal when it is independent on the rotation is considered. The linearization of the problem by the method of variable elasticity parameters is carried out. In the case of cylindrical bending the elastic-plastic behavior of the rectangular elongated three-layer composite plates with a weak honeycomb core is investigated. The analysis of the dependence of compliance in

the transverse direction of such structures on the parameters of the reinforcement of load-bearing layers is carried out. It is obtained that depending on the orientation of the cells of the honeycomb core relative to the normal to the supported edge of the sandwich panels, two different mechanisms of deformation can be realized: “classical”, when the bending state dominates and “non-classical”, when the dominant influence on the deflection has a transverse shear of the core. In the second case, in the vicinity of the supported edges the edge effects, which characterize cross-section of the three-layer structure in the transverse direction, are raised. It is discovered that for non-classical mechanism of deformation the change of the deflection of sandwich panels is depended to a lesser extent on the varying parameters of reinforcement (angles and densities) of bearing layers than on the classical mechanism of deformation of this design. It is obtained that minimal compliance of the sandwich panels is achieved by such orientation of the cells of the honeycomb core, when classical mechanism of its deformation is realized.

Keywords: sandwich panel, reinforced bearing layers, elastic-plastic deformation, weakened resistance to transverse shear, influence of structure of reinforcement, honeycomb core

References

- Alexsandrov A.Ya., Bryukker L.E., Kurshin L.M., Prusakov A.P. *Raschet tryekhsloynnykh panelei* [Calculation of Sandwich Panels]. Moscow, Oborongiz, 1960. 271 p.
- Panin V.F., Gladkov Yu.A. *Konstruksii s zapolnitelem. Spravochnik* [Structures with a filler. Reference Book]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1991. 272 p.
- Noor A.K., Burton W.S., Bert Ch.W. Computational models for sandwich panels and shells. *Appl. Mech. Rev.*, 1996, vol. 49, no. 3, pp. 155–199.
- Vaziri A., Xue Z., Hutchinson J.W. Metal sandwich plates with polymer foam-filled cores. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2006, vol. 1, no. 1, pp. 97–127.
- Zhu F., Wang Z., Lu G., Nurick G. Some theoretical considerations on dynamic response of sandwich structures under impulsive loading. *International Journal of Impact Engineering*, 2010, vol. 37, pp. 625–637.
- Wilbert A., Jang W.-Y., Kyriakides S., Floccari J.F. Buckling and progressive crushing of laterally loaded honeycomb. *International Journal of Solids and Structures*, 2011, vol. 48, pp. 803–816.
- Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Deformirovanie trekhslonogo sterzhnia v temperaturnom pole [Deformation of three-layer beams in a temperature field]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2013, no. 1(22), pp. 31–35.
- Leonenko D.V. Svobodnye kolebaniya trekhslonnykh cilindricheskikh obolochek v uprugoi srede Pasternaka [Natural vibrations of the three-layered cylindrical shells in the elastic Pasternak's medium]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2013, no. 4(25), pp. 57–59.
- Kravchuk A.S., Tamila Y.V. Vyazkoupругii chisty izgib sloistykh i kompozitsionnykh prizmaticheskikh brusyev [Viscoelastic pure bending layered and composite prismatic beams]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2014, no. 3(28), pp. 48–52.
- Yahangirov A.A. Nesushchaya sposobnost usilennoi trekhslonoi voloknistoi krugloi plastinki, zashchemlennoi po konturu i nakhodyashcheysya ne neshzimaemoi srede [Carrying capacity of reinforced three layer circular composite plate clamped on edge and lying on non-compressible foundation]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2015, no. 4(33), pp. 50–54.
- Zhuravkov M.A., Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Povtorno deformirovanie uprugoplasticheskogo trekhslonogo sterzhnia lokalnoi nagruzkoi [The second deformation of the three-layer elastoplastic rod by local load]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2016, no. 3(36), pp. 71–79.
- Yankovskii A.P. Neustanovivshaiasia polzhuchest sloistykh sterzhnei neregularnoi struktury iz nelineino-nasledstvennykh materialov [Unsteady Creep of Layered Rods of Irregular Structure from Nonlinear-hereditary Materials]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2016, no. 3(36), pp. 87–96.
- Yankovskii A.P. Modelirovanie dinamicheskogo uprugoplasticheskogo povedeniya balok neregularnoi sloisto-voloknistoi struktury [Modeling of dynamic elastic-plastic behavior of beams of irregular layered-fibrous structures]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2017, no. 1(38), pp. 45–56.
- Malinin N.N. *Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti* [The applied theory of plasticity and creep]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1968. 400 p.
- Il'yushin A.A. Teoriya termov'yazkoupругosti [The theory of thermo-visco-elasticity]. *Trudy* [Works], Moscow, Fizmatlit, 2007, vol. 3. 288 p.
- Yankovskii A.P. Opredelenie termouprugih harakteristik prostranstvenno armirovannykh voloknistykh sred pri obshhej anizotropii materialov komponent kompozitsii. 1. Strukturnaya model [Determination of the thermoelastic characteristics of spatially reinforced fibrous media in the case of general anisotropy of their components. 1. Structural model]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials], 2010, vol. 46, no. 5, pp. 451–460.
- Yankovskii A.P. Modelirovanie termouprugogo povedeniya rebristo-armirovannykh penoplastmass. Chast 1. Utochnennaya strukturnaya model [Thermoelastic behavior modeling of ribbed-reinforced plastic foams. Part 1. The Refined structural model]. *Kosmonavtika i raketostroenie* [Astronautics and rocket science], 2013, no. 3(72), pp. 124–132.
- Washizu K. *Variatsionnye metody v teorii uprugosti i plastichnosti* [Variational methods in elasticity and plasticity]. Moscow, Mir, 1987. 542 p.
- Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovei N.A. *Nelineinoe deformirovanie i ustoychivost' uprugikh obolochek neodnorodnoi struktury: Modeli, metody, algoritmy, maloizuchemye i novye zadachi* [Nonlinear deformation and stability of elastic shells of non-uniform structure: Models, methods, algorithms, the insufficiently studied and new problems]. Moscow, Knizhnyi dom “LIBROKOM”, 2012. 336 p.
- Bryukker L.E., Rakin A.S. Ispytaniya tryekhsloynnykh sterzhnei pri normalnykh i povyshennykh temperaturakh [Testing of sandwich cores at normal and elevated temperatures]. *Dinamika i prochnost aviacionnykh konstruktsij* [Dynamics and Strength of Aviation Structures], Izdatatelstvo NGU, Novosibirsk, 1978, no. 4, pp. 73–79.
- Karpinos D.M. *Kompozitsionnye materialy. Spravochnik* [Composite materials. Reference Book]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1985. 592 p.
- Kachanov L.M. *Osnovy teorii plastichnosti* [The bases of the theory of plasticity]. Moscow, Nauka, 1969. 420 p.
- Akisev N.I., Zakirov I.I., Paimushin V.N., Shishov M.A. Teoretiko-jekspperimentalnyy metod opredeleniya usrednennykh uprugih i prostranstvennykh harakteristik sotovogo zapolnitelja trehsloynnykh konstruktsij [Theoretical-experimental method for determining the averaged elastic and strength characteristics of a honeycomb core of sandwich designs]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials], 2011, vol. 47, no. 4, pp. 377–386.