



# МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.4

А.П. ЯНКОВСКИЙ, д-р физ.-мат. наук

ведущий научный сотрудник лаборатории физики быстропротекающих процессов

E-mail: yankovsky\_ap@rambler.ru

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 21.09.2018.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-АРМИРОВАННЫХ ГИБКИХ ИСКРИВЛЕННЫХ ПАНЕЛЕЙ С УЧЕТОМ ВОЗМОЖНОГО ОСЛАБЛЕННОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПОПЕРЕЧНЫМ СДВИГАМ

*Разработана математическая модель упругопластического поведения гибких искривленных панелей с пространственными структурами армирования. Неупругое деформирование компонентов композиции описывается теорией пластического течения с изотропным упрочнением. Возможное ослабленное сопротивление композитных панелей поперечным сдвигам учитывается в рамках неклассической теории Редди, а геометрическая нелинейность в приближении Кармана. Решение сформулированной начально-краевой задачи разыскивается по явной численной схеме «крест». Исследовано изгибное неупругое поведение плоско- и пространственно-армированных цилиндрических панелей под действием динамических нагрузок взрывного типа. Рассматриваются стеклопластиковые и металлокомпозитные конструкции. Показано, что для относительно толстых стеклопластиковых панелей (а в ряде случаев и для относительно тонких) замена плоско-перекрестной структуры армирования на пространственную структуру приводит к уменьшению прогиба композитной конструкции на несколько десятков процентов. В случаях металлокомпозитных панелей такая замена структур армирования практически не приводит к уменьшению их податливости в поперечном направлении.*

**Ключевые слова:** *искривленные панели, пространственное армирование, теория Редди, геометрическая нелинейность, упругопластическое деформирование, нагружение взрывного типа, схема типа «крест»*

**Введение.** В последние десятилетия в инженерной практике широко используются пространственно-армированные композитные материалы (КМ) [1–4]. Такое армирование позволяет устранить серьезный недостаток перекрестно армированных в плоскости композитов — расслоение в силу ослабленного сопротивления поперечному отрыву и сдвигам. Поэтому актуальной является проблема математического моделирования механического поведения КМ-изделий с пространственными структурами армирования.

Упругое деформирование КМ-сред с такими структурами армирования моделировалось в [5–7]. Однако современные конструкции часто испытывают внешние воздействия высокой интенсивности [2], при которых материалы фаз композиции

КМ-изделий могут вести себя упругопластически. В работе [8] предложена модель неупругого деформирования перекрестно армированных в плоскости пластин, материалы компонентов композиции которых подчиняются уравнениям теории пластического течения с изотропным упрочнением. Аналогичная структурная модель для пространственно-армированных КМ-сред еще не построена.

Основные преимущества КМ, как правило, наиболее ярко проявляются при их использовании в тонкостенных изделиях типа пластин, оболочек и искривленных панелей [9–20]. Следовательно, актуальной является и проблема математического описания изгибного деформирования таких КМ-элементов при воздействии на них высоко-

интенсивных нагрузок с учетом возможного ослабленного их сопротивления поперечным сдвигам.

Традиционно учет этих сдвигов моделируется в рамках гипотез теорий Рейсснера [9, 11, 13, 21] или Редди [8, 10, 12, 14, 15]. В последнем случае учитывается искривление поперечной нормали тонкостенной конструкции, поэтому теория Редди более точно, чем теория Рейсснера, описывает изгибное поведение таких КМ-конструкций. При этом исследуется, как правило, только упругое поведение КМ-элементов изделий [9–13, 16–19, 21]. Лишь в работах [8, 14, 15] рассматривалось упругопластическое поведение пластин, оболочек и искривленных панелей, перекрестно армированных по эквидистантным поверхностям. Расчеты, проведенные в [8, 14, 15] по теориям Рейсснера и Редди, показали, что они могут существенно различаться даже для весьма тонких КМ-конструкций.

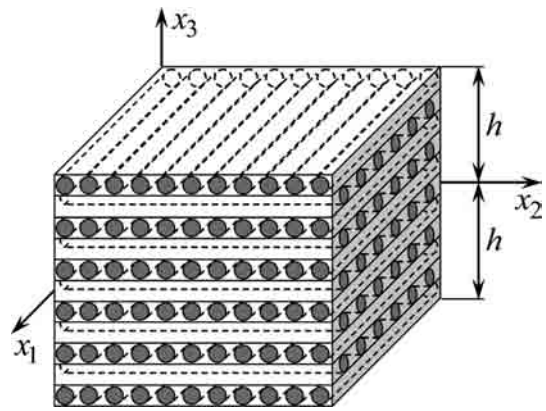
В связи со всем вышеизложенным данное исследование посвящено моделированию упругопластического поведения гибких искривленных пространственно-армированных панелей (пологих оболочек) в рамках гипотез теории Редди. Численное решение возникающих при этом начально-краевых задач предполагается получать на базе явной схемы типа «крест».

**Моделирование упругопластического поведения пространственно-армированной гибкой искривленной панели.** Рассматриваем изгибное поведение искривленной КМ-панели толщиной  $2h$ , с которой свяжем криволинейную ортогональную систему координат  $x_i$  так, чтобы отсчетная поверхность  $x_1x_2$  ( $x_3 = 0$ ) совпадала со срединной поверхностью ( $|x_3| \leq h$ ), причем направление  $x_3$  перпендикулярно этой поверхности, а  $x_1, x_2$  — гауссовы координаты относительно линий кривизны. Конструкция имеет плоско- или пространственно-перекрестную структуру армирования, которая предполагается квазиоднородной в направлении  $x_3$  (рисунок 1, где изображены малые элементы такой панели, причем их искривленность в силу малости не изображена).

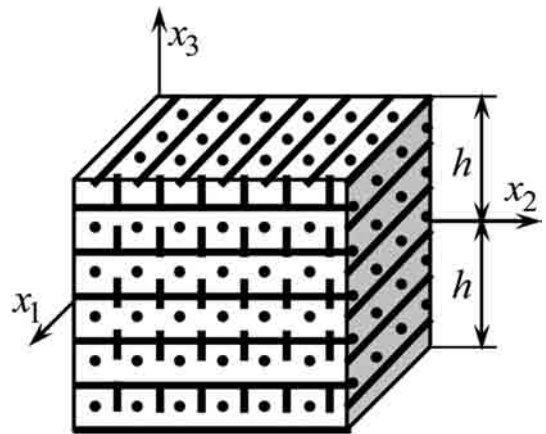
Пологая оболочка усилена  $K$  семействами волокон с плотностями армирования  $\omega_k, 1 \leq k \leq K$ . На рисунке 1 *a* изображено «плоское» ортогональное 2D-армирование при  $K = 2$ , на рисунке 1 *b* — пространственное ортогональное 3D-армирование при  $K = 3$  [1, 2, 4], а на рисунке 1 *c* — неортогональное пространственное 4D-армирование при  $K = 4$  [2]. Относительное содержание связующего в представительном элементе композиции определяется так [1, 2]:

$$\omega_0 = 1 - \sum_{k=1}^K \omega_k. \quad (1)$$

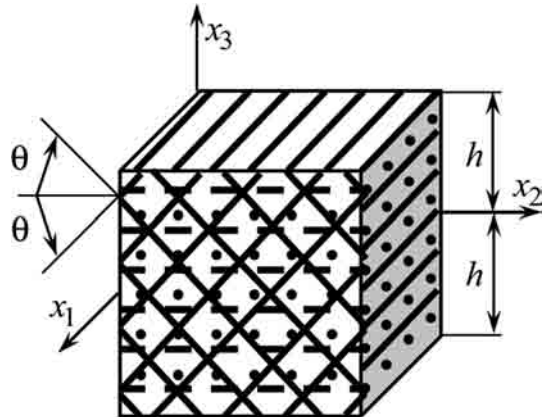
Рассматриваем практически важный частный случай, когда на лицевых поверхностях  $x_3 = \pm h$  отсутствуют внешние касательные распределенные нагрузки. Для описания же возможного ослабленного (например в случаях структур армирования,



a



b



c

**Рисунок 1 — Элемент искривленной КМ-панели:**  
*a* — с ортогональной плоской структурой 2D-армирования;  
*b* — с ортогональной пространственной структурой 3D-армирования;  
*c* — с неортогональной пространственной структурой 4D-армирования

**Figure 1 — Element of curved composite materials panel:**  
*a* — with orthogonal flat structure of 2D reinforcement;  
*b* — with orthogonal spatial structure of 3D reinforcement;  
*c* — with non-orthogonal spatial structure of 4D reinforcement

приведенных на рисунке 1 *a* и *b*) сопротивления искривленной КМ-панели поперечным сдвигам используем кинематические гипотезы теории Редди [12], учитывая при этом геометрическую нелинейность в приближении Кармана. Тогда деформации композиции  $\epsilon_{ij}$  и перемещения  $U_i$  точек полой КМ-оболочки выражаются формулами [14]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(t, \mathbf{r}) = & \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) - \\ & - x_3 \partial_i \partial_j w + \frac{x_3}{3h^2}(3h^2 - x_3^2)(\partial_i \varepsilon_{j3}^0 + \partial_j \varepsilon_{i3}^0) + \\ & + \delta_{ij} \frac{w}{R_i} + \frac{1}{2} \partial_i w \partial_j w; \quad \varepsilon_{i3}(t, \mathbf{r}) = \frac{h^2 - x_3^2}{h^2} \varepsilon_{i3}^0(t, \mathbf{x}), \\ & i, j = 1, 2; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} U_i(t, \mathbf{r}) = & u_i(t, \mathbf{x}) - x_3 \partial_i w + \frac{2x_3}{3h^2}(3h^2 - x_3^2) \varepsilon_{i3}^0; \\ U_3(t, \mathbf{r}) = & w(t, \mathbf{x}), \\ \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2\}, \\ \mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\varepsilon_{i3}^0$  — деформации поперечных сдвигов в точках срединной поверхности;  $w$  — прогиб;  $u_i$  — тангенциальные перемещения точек отсчетной поверхности;  $R_i$  — главные радиусы кривизны этой поверхности;  $t_0$  — начальный момент времени  $t$ ;  $\partial_i$  — оператор дифференцирования по  $x_i$  ( $i = 1, 2$ );  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;  $G$  — область, занимаемая панелью в плане.

Таким образом, в соотношениях (2), (3) неизвестны функции  $w$ ,  $u_i$ ,  $\varepsilon_{i3}^0$ , зависящие от времени и двух пространственных переменных  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Уравнения движения элемента полой оболочки в приближении Кармана при учете (3) имеют вид [14]:

$$\begin{aligned} 2h\rho\ddot{w} = & \sum_{i=1}^2 \left[ \partial_i \left( F_{i3} + \sum_{j=1}^2 F_{ij} \partial_j w \right) + \frac{F_{i3}}{R_i} \right] + \\ & + X_3(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}; \\ 2h\rho\ddot{u}_i = & \sum_{j=1}^2 \partial_j (F_{ij} - F_{j3} \partial_i w) + \frac{F_{i3}}{R_i} + X_i(t, \mathbf{x}); \\ \frac{2}{3} h^3 \rho \ddot{\gamma}_{i3} = & \sum_{j=1}^2 \partial_j M_{ij} - F_{i3} + m_i(t, \mathbf{x}), \\ \mathbf{x} \in G, \quad t \geq t_0, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} F_{ij}(t, \mathbf{x}) = & \int_{-h}^h \sigma_{ij}(t, \mathbf{r}) dx_3; \quad F_{i3}(t, \mathbf{x}) = \int_{-h}^h \sigma_{i3}(t, \mathbf{r}) dx_3; \\ M_{ij}(t, \mathbf{x}) = & \int_{-h}^h \sigma_{ij}(t, \mathbf{r}) x_3 dx_3; \quad \gamma_{i3}(t, \mathbf{x}) \equiv \frac{8}{5} \varepsilon_{i3}^0 - \partial_i w; \\ \rho = & \rho_0 \omega_0 + \sum_{k=1}^K \rho_k \omega_k, \quad i, j = 1, 2; \end{aligned} \quad (5)$$

$\sigma_{ij}$  — средние напряжения в композиции панели;  $\sigma_{33}^{(\pm)} = \sigma_{33}(t, \mathbf{x}, \pm h)$  — заданные нормальные распределенные нагрузки на нижней (–) и верхней (+) лицевых поверхностях;  $X_i$  — приведенные внешние нагрузки, вызванные объемными силами (определяются по правилу простой смеси, аналогично  $\rho$ );  $m_i$  — внешние моменты от массовых сил;  $\rho_0, \rho_k$  — объемная плотность материала связующего и арматуры  $k$ -го семейства;  $F_{ij}, F_{i3}$  — мембранные и поперечные силы;  $M_{ij}$  — изгибающие и крутящие моменты; точка — дифференцирование по времени;  $\gamma_{i3}$  — введенные для удобства дальнейшего изложения функции.

Для однозначного интегрирования рассматриваемой задачи на кромках полой оболочки следует задать силовые [14]

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 n_j (F_{ij} - F_{j3} \partial_i w) = & F_i; \quad \sum_{i=1}^2 n_i \left( F_{i3} + \sum_{j=1}^2 F_{ij} \partial_j w \right) = F_{n3}; \\ M_{11} n_1^2 + M_{22} n_2^2 + 2M_{12} n_1 n_2 = & M_{nn}; \\ (M_{22} - M_{11}) n_1 n_2 + M_{12} (n_1^2 - n_2^2) = & M_{n\tau}, \\ n_1 = \cos \alpha, \quad n_2 = \sin \alpha, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad t \geq t_0, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (6)$$

и кинематические (см. (3), (5)) граничные условия:

$$\begin{aligned} w(t, \mathbf{x}) = & U_{e3}(t, \mathbf{x}); \quad 2hu_i(t, \mathbf{x}) = u_{ei}(t, \mathbf{x}); \\ \frac{2}{3} h^3 \gamma_{i3}(t, \mathbf{x}) = & \bar{u}_{ei}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad t \geq t_0, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (7)$$

а также начальные условия при  $t = t_0$  [14]:

$$\begin{aligned} w(t_0, \mathbf{x}) = & U_{03}(\mathbf{x}); \quad \dot{w}(t_0, \mathbf{x}) = V_{03}(\mathbf{x}); \\ 2hu_i(t_0, \mathbf{x}) = & u_{0i}(\mathbf{x}); \quad \frac{2}{3} h^3 \gamma_{i3}(t_0, \mathbf{x}) = \bar{u}_{0i}(\mathbf{x}); \\ 2h\dot{u}_i(t_0, \mathbf{x}) = & v_{0i}(\mathbf{x}); \quad \frac{2}{3} h^3 \dot{\gamma}_{i3}(t_0, \mathbf{x}) = \bar{v}_{0i}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x} \in G, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} u_{ei}(t, \mathbf{x}) \equiv & \int_{-h}^h U_{ei}(t, \mathbf{r}) dx_3; \quad \bar{u}_{ei}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U_{ei}(t, \mathbf{r}) x_3 dx_3; \\ u_{0i}(\mathbf{x}) \equiv & \int_{-h}^h U_{0i}(\mathbf{r}) dx_3; \quad \bar{u}_{0i}(\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U_{0i}(\mathbf{r}) x_3 dx_3; \\ v_{0i}(\mathbf{x}) \equiv & \int_{-h}^h V_{0i}(\mathbf{r}) dx_3; \quad \bar{v}_{0i}(\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h V_{0i}(\mathbf{r}) x_3 dx_3, \quad i = 1, 2; \end{aligned} \quad (9)$$

$\Gamma$  — контур, ограничивающий область  $G$ ;  $F_i$  — заданные на  $\Gamma$  мембранные силы, действующие в направлениях  $x_i$  ( $i = 1, 2$ );  $F_{n3}$  — заданная на  $\Gamma$  перерезывающая сила;  $M_{nn}, M_{n\tau}$  — заданные на  $\Gamma$  изгибающий и крутящий моменты;  $\alpha$  — угол, определяющий направление внешней нормали к  $\Gamma$ ;  $U_{ej}$  — заданные на кромке панели перемещения;  $U_{0j}, V_{0j}$  ( $j = 1, 3$ ) — заданные в начальный момент времени  $t_0$  перемещения и скорости точек конструкции. Возможно задание и смешанных из (6), (7) граничных условий.

Так как определить реальное распределение деформаций и напряжений в КМ-среде, в которой связующая матрица содержит достаточно произвольные ориентированные, более жесткие многочисленные волокна (см. рисунок 1), весьма затруднительно [10] (особенно при упругопластическом деформировании материалов компонентов композиции), для построения практически приемлемых определяющих уравнений неупругого поведения рассматриваемого КМ искривленной панели используем исходные допущения, подобные принятым в [8, 10].

1. В пределах представительного элемента композит является макроскопически квазиоднородным анизотропным телом (при достаточно равномерном и густом наполнении связующего материала тонкими волокнами эта предпосылка вполне приемлема [10]).

2. Арматура и связующее контактируют без отрыва и проскальзывания.

3. В пределах репрезентативной ячейки, выделенной из КМ-среды на миниуровне, напряжения и деформации во всех фазах и в композиции кусочно-постоянны. Эффектами высших порядков, связанными с изменением полей напряжений и деформаций на микроуровне в малых окрестностях границ контакта арматуры со связующим, пренебрегаем.

4. Поля напряжений и деформаций в композиции осредняем по объему представительного элемента, т. е. в соответствии с гипотезой 3 — пропорционально относительному объемному содержанию  $\omega_k$  каждого компонента композиции (см. (1)).

5. Материалы фаз композиции однородны и изотропны, а их упругопластическое деформирование описывается уравнениями теории течения с изотропным упрочнением [22]:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_k = \mathbf{B}_k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k \quad (\mathbf{B}_k = \mathbf{A}_k - \mathbf{P}_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, K, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_k &= \{\dot{\sigma}_1^{(k)}, \dot{\sigma}_2^{(k)}, \dot{\sigma}_3^{(k)}, \dot{\sigma}_4^{(k)}, \dot{\sigma}_5^{(k)}, \dot{\sigma}_6^{(k)}\}^T \equiv \\ &\equiv \{\dot{\sigma}_{11}^{(k)}, \dot{\sigma}_{22}^{(k)}, \dot{\sigma}_{33}^{(k)}, \dot{\sigma}_{23}^{(k)}, \dot{\sigma}_{31}^{(k)}, \dot{\sigma}_{12}^{(k)}\}^T; \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k &= \{\dot{\varepsilon}_1^{(k)}, \dot{\varepsilon}_2^{(k)}, \dot{\varepsilon}_3^{(k)}, \dot{\varepsilon}_4^{(k)}, \dot{\varepsilon}_5^{(k)}, \dot{\varepsilon}_6^{(k)}\}^T \equiv \\ &\equiv \{\dot{\varepsilon}_{11}^{(k)}, \dot{\varepsilon}_{22}^{(k)}, \dot{\varepsilon}_{33}^{(k)}, 2\dot{\varepsilon}_{23}^{(k)}, 2\dot{\varepsilon}_{31}^{(k)}, 2\dot{\varepsilon}_{12}^{(k)}\}^T; \end{aligned} \quad (11)$$

$\sigma_{ij}^{(k)}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{(k)}$  — компоненты тензоров напряжений и деформаций в  $k$ -й фазе композиции;  $\mathbf{B}_k = (b_{ij}^{(k)})$ ,  $\mathbf{A}_k = (a_{ij}^{(k)})$ ,  $\mathbf{P}_k = (p_{ij}^{(k)})$  — симметричные  $6 \times 6$ -матрицы. При этом ненулевые элементы матриц  $\mathbf{A}_k$ ,  $\mathbf{P}_k$  вычисляются по формулам [22]:

$$\begin{aligned} a_{ii}^{(k)} &= 2\mu^{(k)} + \lambda^{(k)}; \quad a_{ij}^{(k)} = a_{ji}^{(k)} = \lambda^{(k)}; \quad a_{rr}^{(k)} = \mu^{(k)}; \\ p_{nl}^{(k)} &= A^{(k)} s_n^{(k)} s_l^{(k)} \quad (j \neq i; \quad i, j = \overline{1, 3}; \quad r = \overline{4, 6}; \quad l, n = \overline{1, 6}); \\ A^{(k)} &= \frac{\mu^{(k)} c^{(k)}}{J_2^{(k)}} (1 - \kappa^{(k)}); \quad 2\mu^{(k)} = \frac{E^{(k)}}{1 + \nu^{(k)}}; \\ \lambda^{(k)} &= \frac{\nu^{(k)} E^{(k)}}{(1 + \nu^{(k)})(1 - 2\nu^{(k)})}; \quad \kappa^{(k)} = \frac{\bar{\mu}^{(k)}}{\mu^{(k)}}; \\ J_2^{(k)} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (s_i^{(k)})^2 + \sum_{i=4}^6 (s_i^{(k)})^2; \\ \dot{c}^{(k)} &= \begin{cases} 0 & \text{при } J_2^{(k)} < J_{2*}^{(k)} \text{ или } J_2^{(k)} = J_{2*}^{(k)}, W^{(k)} \leq 0, \\ 1 & \text{при } J_2^{(k)} = J_{2*}^{(k)}, W^{(k)} > 0, \end{cases} \\ W^{(k)} &= \sum_{i=1}^6 s_i^{(k)} \dot{e}_i^{(k)}; \quad s_j^{(k)} = \sigma_j^{(k)} - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \sigma_i^{(k)}; \quad s_l^{(k)} = \sigma_l^{(k)}; \\ e_j^{(k)} &= \varepsilon_j^{(k)} - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i^{(k)}; \quad e_l^{(k)} = \varepsilon_l^{(k)}; \quad J_{2*}^{(k)} = \max\{J_{2p}^{(k)}, J_{2m}^{(k)}\}, \\ & \quad j = \overline{1, 3}, \quad l = \overline{4, 6}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $E^{(k)}$ ,  $\nu^{(k)}$  — модуль упругости первого рода и коэффициент Пуассона  $k$ -го компонента композиции;  $\bar{\mu}^{(k)}$  — касательный модуль диаграммы чистого сдвига того же материала;  $c^{(k)}$  — функция переключения, определяющая активное упруго-

пластическое нагружение или разгрузку того же материала;  $J_{2p}^{(k)}$  — значение второго инварианта девиатора напряжений  $J_2^{(k)}$ , при котором материал  $k$ -й фазы композиции начинает впервые деформироваться пластически;  $J_{2m}^{(k)}$  — наибольшее значение  $J_2^{(k)}$ , достигнутое за всю историю предыдущего деформирования элемента среды  $k$ -го компонента композиции;  $T$  — операция транспонирования. Равенства (11) задают соответствия между шестью компонентами  $f_j^{(k)}$  ( $i = \overline{1, 6}$ ) некоторого вектора-столбца  $\mathbf{f}_k$  и компонентами симметричного тензора второго ранга  $f_{jl}^{(k)}$  ( $j, l = \overline{1, 3}$ ,  $0 \leq k \leq K$ ). Согласно (12),  $s_i^{(k)}$  и  $e_i^{(k)}$  ( $i = \overline{1, 6}$ ) — компоненты девиаторов напряжений и деформаций в  $k$ -м составляющем композиции.

С каждым  $k$ -м семейством волокон свяжем локальную ортогональную систему координат  $x_i^{(k)}$  так, что ось  $x_1^{(k)}$  совпадает с направлением траектории армирования, а оси  $x_2^{(k)}$  и  $x_3^{(k)}$  перпендикулярны этим траекториям (рисунок 2). Направление траектории армирования  $k$ -го семейства можно задать углами сферической системы координат: полярным расстоянием  $\theta_k$  и долготой  $\varphi_k$ . При этом направляющие косинусы  $l_{ij}^{(k)}$  между осями  $x_i^{(k)}$  и  $x_j$  ( $j, l = \overline{1, 3}$ ) определяются по формулам:

$$\begin{aligned} l_{11}^{(k)} &= \sin \theta_k \cos \varphi_k; \quad l_{12}^{(k)} = \sin \theta_k \sin \varphi_k; \quad l_{13}^{(k)} = \cos \theta_k; \\ l_{21}^{(k)} &= -\sin \varphi_k; \quad l_{22}^{(k)} = \cos \varphi_k; \quad l_{23}^{(k)} = 0; \\ l_{31}^{(k)} &= -\cos \theta_k \cos \varphi_k; \quad l_{32}^{(k)} = -\cos \theta_k \sin \varphi_k; \\ l_{33}^{(k)} &= \sin \theta_k, \quad 1 \leq k \leq K. \end{aligned} \quad (13)$$

При переходе от системы координат  $x_i$  к системе  $x_i^{(k)}$  ( $i = \overline{1, 3}$ ) векторы-столбцы, аналогичные (11), преобразуются так:

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_k &= \mathbf{G}_k \boldsymbol{\sigma}_k \quad (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_i^{(k)} = \sum_{j=1}^6 g_{ij}^{(k)} \sigma_j^{(k)}); \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_k &= \mathbf{Q}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k \quad (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{(k)} = \sum_{j=1}^6 q_{ij}^{(k)} \varepsilon_j^{(k)}, \quad i = \overline{1, 6}), \end{aligned} \quad (14)$$

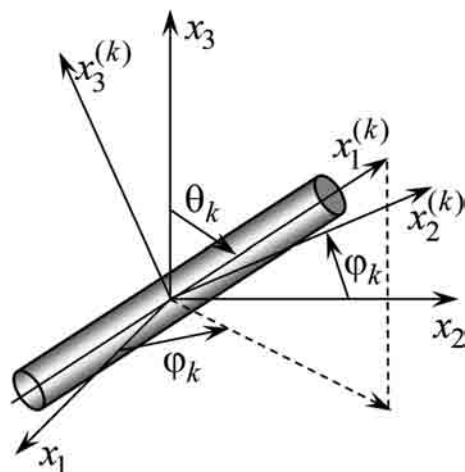


Рисунок 2 — Локальная система координат, связанная с волокном  $k$ -го семейства  
Figure 2 — Local coordinate system associated with the fiber of the  $k$  family

где  $\mathbf{G}_k = (g_{ij}^{(k)})$ ,  $\mathbf{Q}_k = (q_{ij}^{(k)})$  —  $6 \times 6$ -матрицы с компонентами (см. (13));

$$\begin{aligned} g_{11}^{(k)} &= q_{11}^{(k)} = I_{11}^{(k)} I_{11}^{(k)}; \quad g_{12}^{(k)} = q_{12}^{(k)} = I_{12}^{(k)} I_{12}^{(k)}; \quad \dots; \\ g_{16}^{(k)} &= 2q_{16}^{(k)} = 2I_{12}^{(k)} I_{11}^{(k)}; \quad \dots; \quad 2g_{61}^{(k)} = q_{61}^{(k)} = 2I_{21}^{(k)} I_{11}^{(k)}; \quad \dots; \\ g_{66}^{(k)} &= q_{66}^{(k)} = I_{11}^{(k)} I_{22}^{(k)} + I_{12}^{(k)} I_{21}^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq K. \end{aligned} \quad (15)$$

Невыписанные в (15) компоненты матриц  $\mathbf{G}_k$  и  $\mathbf{Q}_k$  приведены в таблицах (21.40) и (21.44) в [10]. Чертой сверху в (14) обозначены величины, определяемые в локальной системе  $x_i^{(k)}$ ,  $i = \overline{1, 3}$ .

Согласно второму и третьему допущениям и условиям сопряжения полей напряжений и перемещений на границах контакта волокон и связующего, имеем (см. (14)):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^6 q_{1j}^{(k)} \varepsilon_j^{(k)} &= \sum_{j=1}^6 q_{1j}^{(k)} \varepsilon_j^{(0)}; \quad \sum_{j=1}^6 g_{ij}^{(k)} \sigma_j^{(k)} = \sum_{j=1}^6 g_{ij}^{(k)} \sigma_j^{(0)}, \quad (16) \\ i &= \overline{2, 6}, \quad 1 \leq k \leq K, \end{aligned}$$

где первое равенство выражает одинаковое удлинение арматуры  $k$ -го семейства и связующего материала в направлении траектории волокна, остальные соотношения определяют условия контакта волокна и связующего в напряжениях на боковой поверхности арматуры.

Исходные гипотезы 1–5 аналогичны допущениям, принятым в [8], поэтому, повторяя выкладки из [8] и учитывая равенства (1), (10), (12) и (16), получим следующее матричное соотношение, которое описывает упругопластическое деформирование КМ-среды с пространственной структурой армирования:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= (\omega_0 \mathbf{B}_0 + \sum_{k=1}^K \omega_k \mathbf{B}_k \mathbf{E}_k) \mathbf{H}; \quad \mathbf{H} = (\omega_0 \mathbf{I} + \sum_{k=1}^K \omega_k \mathbf{E}_k)^{-1}; \quad (18) \\ \mathbf{E}_k &= \mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{C}_k, \quad 1 \leq k \leq K; \end{aligned}$$

$\dot{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  — шестикомпонентные векторы-столбцы скоростей осредненных напряжений  $\dot{\sigma}_{ij}$  и деформаций  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  в КМ, по структуре аналогичные (11);  $\mathbf{I}$  — единичная  $6 \times 6$ -матрица;  $\mathbf{B}, \mathbf{H}, \mathbf{E}_k, \mathbf{C}_k$  —  $6 \times 6$ -матрицы;  $\mathbf{D}_k^{-1}$  — матрица, обратная  $6 \times 6$ -матрице  $\mathbf{D}_k$ .

Элементы  $c_j^{(k)}$  и  $d_j^{(k)}$  матриц  $\mathbf{C}_k$  и  $\mathbf{D}_k$  при учете (10), (12), (13), (15), (16) определяются так:

$$\begin{aligned} c_{1j}^{(k)} &= d_{1j}^{(k)} = q_{1j}^{(k)}; \quad c_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(0)}; \quad (19) \\ d_{ij}^{(k)} &= \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(k)}, \quad i = \overline{2, 6}, \quad j = \overline{1, 6}. \end{aligned}$$

По аналогии с [8] при выводе соотношений (17) и (18) попутно получают следующие матричные равенства:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 = \mathbf{H} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}; \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k = \mathbf{E}_k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (20)$$

где первое соотношение определяет скорости деформаций связующего материала  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0$  через скорости средних деформаций КМ  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , а второе равенство выражает скорости деформаций арматуры  $k$ -го

семейства  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$  через скорости деформаций связующей матрицы  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0$ .

Так как рассматривается динамическое поведение искривленной КМ-панели как гибкой тонкостенной системы, то напряжение  $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$  с приемлемой для практических расчетов точностью можно линейно аппроксимировать по поперечной координате  $x_3$  [9]:

$$\begin{aligned} \sigma_{33}(t, \mathbf{r}) &\equiv \sigma_3(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} x_3 + \\ &+ \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2}, \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0. \end{aligned} \quad (21)$$

Матричное соотношение (17) в действительности является системой шести алгебраических уравнений. На основании условий соответствия, аналогичных (11), из третьего равенства этой системы выразим скорость линейной поперечной деформации КМ-панели:

$$\dot{\varepsilon}_{33} \equiv \dot{\varepsilon}_3 = \frac{1}{b_{33}} \left( \dot{\sigma}_3 - \sum_{i=1}^6 (1 - \delta_{3i}) b_{3i} \dot{\varepsilon}_i \right), \quad (22)$$

где  $b_{3i}$  ( $i = \overline{1, 6}$ ) — компоненты матрицы  $\mathbf{B}$  в (17); скорость нормального напряжения  $\dot{\sigma}_3$  известна из (21) после его дифференцирования по  $t$ . Скорости деформаций  $\dot{\varepsilon}_i$  в правой части (22) определяются за счет дифференцирования по  $t$  выражений (2), т. е. зависят от двумерных функций  $w, \dot{w}, \dot{u}_i, \dot{\varepsilon}_{i3}^0$  (или  $\dot{\gamma}_{i3}$ , см. (5)) и их частных производных по  $x_l$  ( $l = 1, 2$ ).

**Метод решения.** Для численного интегрирования рассматриваемой задачи используем алгоритм шагов по времени [8, 11, 14, 15, 22, 23], т. е. будем разыскивать решение в дискретные моменты времени  $t_{n+1} = t_n + \tau$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), где  $\tau = \text{const} > 0$  — шаг по времени. При этом предполагается, что в моменты времени  $t_m$  уже известны значения следующих функций:

$$\begin{aligned} w^m(\mathbf{x}) &\equiv w(t_m, \mathbf{x}); \quad u_i^m(\mathbf{x}) \equiv u_i(t_m, \mathbf{x}); \\ \gamma_{i3}^m(\mathbf{x}) &\equiv \gamma_{i3}(t_m, \mathbf{x}); \quad \sigma_{33}^{\pm m}(\mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}^{\pm}(t_m, \mathbf{x}); \\ \dot{\sigma}_{33}^{\pm m}(\mathbf{x}) &\equiv \dot{\sigma}_{33}^{\pm}(t_m, \mathbf{x}); \quad \sigma_{ij}^m(\mathbf{r}) \equiv \sigma_{ij}(t_m, \mathbf{r}); \quad (23) \\ \sigma_{ij}^{(k)m}(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}); \quad X_j^m(\mathbf{x}) \equiv X_j(t_m, \mathbf{x}); \\ m_i(\mathbf{x}) &\equiv m_i(t_m, \mathbf{x}), \quad i = \overline{1, 2}, \quad j = \overline{1, 3}, \\ m &= n - 1, \quad n, \quad 0 \leq k \leq K, \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h. \end{aligned}$$

По формулам (5) с учетом предположений (23) при  $t = t_n$  можно определить все силовые факторы  $F_{ij}, F_{i3}$  и  $M_{ij}$ , входящие в правые части уравнений (4) и в граничные условия (6).

Далее, как и в [8, 14, 15], все производные по  $t$  аппроксимируем центральными конечными разностями на трехточечном шаблоне. Согласно этому, конечно-разностные аналоги уравнений (4) при учете обозначений, аналогичных (23), примут вид:

$$\begin{aligned} & \frac{2h\rho}{\tau^2} \left( w - 2w + w \right)^{n+1} = \\ & = \sum_{l=1}^2 \left[ \partial_l \left( F_{l3}^n + \sum_{j=1}^2 F_{lj}^n \partial_j w \right) + R_l^{-1} F_{ll}^n \right] + X_3^n + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}; \\ & \frac{2h\rho}{\tau^2} \left( u_i - 2u_i + u_i \right)^{n+1} = \\ & = \sum_{j=1}^2 \partial_j \left( F_{ij}^n - F_{j3}^n \partial_i w \right) + R_i^{-1} F_{i3}^n + X_i^n; \\ & \frac{2h^3\rho}{3\tau^2} \left( \gamma_{i3}^{n+1} - 2\gamma_{i3}^n + \gamma_{i3}^{n-1} \right) = \sum_{j=1}^2 \partial_j M_{ij}^n - F_{i3}^n + m_i, \\ & \mathbf{x} \in G, \quad i = 1, 2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (24)$$

Правые части в (24), согласно (5) и (23), известны, поэтому, используя необходимые граничные условия (6), (7) при учете (9), из уравнений (24) определяем  $w$ ,  $u_i$  и  $\gamma_{i3}$  в следующий момент времени  $t_{n+1}$ . На основании (5) по известным  $w$  и  $\gamma_{i3}$  вычисляем  $\varepsilon_{i3}^0$ , а затем по формулам (2) — осредненные деформации  $\varepsilon_{ij}$ . Так как, согласно (2) и (23), при  $t = t_{n-1}$  деформации  $\varepsilon_{ij}^{n-1}$  ( $i = 1, 2, j = \overline{1, 3}$ ) уже известны, используя (21), (22) и формулы численно-го дифференцирования по  $t$ , определяем скорости средних деформаций композиции  $\dot{\varepsilon}_{ij}^n$  ( $i, j = \overline{1, 3}$ ). После этого по формулам (20) последовательно вычисляем скорости деформаций в фазах композиции  $\dot{\varepsilon}_k^n$ , а из (10) — скорости напряжений в компонентах композиции  $\dot{\sigma}_k^n$  ( $0 \leq k \leq K$ ). Далее решение исследуемой задачи строится совершенно так же, как описано в [8, 14, 15].

Если область  $G$ , занимаемая искривленной панелью в плане, прямоугольна, то после замены в (6) и (24) производных  $\partial_i(\cdot)$  их конечно-разностными аналогами получим явную численную схему типа «крест» [8, 11, 14, 15]. Если же область  $G$  не является канонической, то дискретизация соотношений (6), (24) по переменным  $x_i$  может быть осуществлена на основе вариационно-разностного подхода, предложенного в [11].

**Обсуждение результатов расчетов.** В качестве примеров рассмотрим динамическое деформирование цилиндрических удлиненных панелей толщиной  $2h = 2$  см, которые имеют в плане прямоугольную форму, т. е.  $G: |x_1| \leq a, |x_2| \leq b$  и  $a = 4b$ . Пологие оболочки изогнуты в направлении  $x_2$  ( $1/R_1 = 0$  и  $R_2 \equiv R = \text{const}$ ) и имеют стрелу подъема  $f$  над продольными кромками  $|x_2| = b$ . При этом  $R = (b^2 + f^2)/(2f)$ ,  $0 \leq f \leq 2b/5$  [14].

Панели жестко закреплены по всем краям (см. (7) и (9) при  $U_i \equiv 0$ ) и в начальный момент времени  $t_0$  покоятся (см. (8) и (9) при  $U_{0i} \equiv 0$  и  $V_{0i} \equiv 0$ ). Объемные нагрузки отсутствуют (см. (4) и (24) при  $X_i \equiv 0, m_j \equiv 0, i = \overline{1, 3}, j = 1, 2$ ). Конструкции

нагружаются давлением, порожденным воздушной взрывной волной [23]:

$$p(t) = \begin{cases} p_{\max} t / t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max}, \\ p_{\max} \exp[-\alpha(t - t_{\max})], & t > t_{\max}, \end{cases} \quad (25)$$

где

$$\alpha = -\ln(0,01) / (t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max}, \quad (26)$$

которое прикладывается к нижней (вогнутой) или верхней (выпуклой) лицевой поверхности (см. (4), (21)), причем

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(-)}(t) &= \begin{cases} -p(t), & p_{\max} > 0, \\ 0, & p_{\max} < 0, \end{cases} \\ \sigma_{33}^{(+)}(t) &= \begin{cases} 0, & p_{\max} > 0, \\ p(t), & p_{\max} < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (27)$$

где  $t_{\max}$  — время, при котором нагрузка  $p(t)$  достигает по модулю наибольшего значения  $|p_{\max}|$ ;  $t_{\min}$  — время, при котором  $|p(t)|$  можно считать пренебрежимо малым по сравнению с  $|p_{\max}|$  (так, равенство (26) справедливо при  $p(t_{\min}) = 0,01p_{\max}$ ). На основании экспериментальных данных [23] примем  $t_{\max} = 0,1$  мс и  $t_{\min} = 2$  мс. Согласно (27), учитываем, что при  $p_{\max} > 0$  нагрузка (25) прикладывается к нижней ( $x_3 = -h$ ), а при  $p_{\max} < 0$  — к верхней ( $x_3 = h$ ) лицевой поверхности.

Конструкции изготовлены из эпокиссвязующего и усилены стеклянными волокнами марки S-994 [24, 25] (стеклопластик) или из алюминиевого сплава АДМ и армированы стальной проволокой У8А [24] (металлокомпозит). На стадии активного нагружения упругопластическое деформирование компонентов композиции определяется билинейной диаграммой:

$$\sigma = \begin{cases} E^{(k)} \varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_y^{(k)} \equiv \sigma_y^{(k)} / E^{(k)}, \\ \text{sign}(\varepsilon) \sigma_y^{(k)} + E_y^{(k)} (\varepsilon - \text{sign}(\varepsilon) \varepsilon_y^{(k)}), & |\varepsilon| > \varepsilon_y^{(k)}, \quad 0 \leq k \leq K, \end{cases}$$

где  $\sigma, \varepsilon$  — напряжение и деформация при растяжении-сжатии;  $E_y^{(k)}$  — модуль линейного упрочнения материала  $k$ -й фазы композиции;  $\sigma_y^{(k)}$  — условный предел текучести того же материала. Физико-механические характеристики компонентов композиции приведены в таблице.

Армирование предполагается однородным:  $\omega_k = \text{const}, \theta_k = \text{const}, \varphi_k = \text{const}, 1 \leq k \leq K$  (см. (1) и (13)), причем рассматриваются такие структуры: - ортогональное «плоское» 2D-армирование (см. рисунок 1 а), когда два семейства волокон ( $K = 2$ ) укладываются в направлениях  $x_1, x_2$  с плотностями армирования  $\omega_1 = 0,266, \omega_2 = 0,324$  соответственно; - ортогональное пространственное 3D-армирование (см. рисунок 1 б), когда три семейства волокон ( $K = 3$ ) укладываются по направлениям  $x_1, x_2, x_3$  с плотностями  $\omega_1 = 0,235, \omega_2 = 0,324, \omega_3 = 0,031$  [1]; - пространственное неортогональное 4D-армирование (см. рисунок 1 с), когда первые два семейства

Таблица — Физико-механические характеристики материалов компонентов композиций панелей [24, 25]  
Table — Physico-mechanical characteristics of components materials of panels compositions [24, 25]

Материал	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$\nu$	$\sigma_{yp}$ , МПа	$E$ , ГПа	$E_{yp}$ , ГПа
Эпоксисвязующее	1210	0,33	20	2,8	1,114
Стекловолокно S-994	2520	0,25	4500	86,8	6,230
Алюминиевый сплав АДМ	2710	0,3	30	71,0	0,143
Стальная проволока У8А	7800	0,31	3968	210,0	6,973

укладываются в направлениях  $x_1$  и  $x_2$ , а третье и четвертое семейства по направлениям, определяемым углами (см. (13)):  $\theta_3 = \pi/4$ ,  $\theta_4 = 3\pi/4$ ,  $\varphi_3 = \varphi_4 = \pi/2$  (см. рисунок 1 *c* при  $\theta = \pi/4$ ).

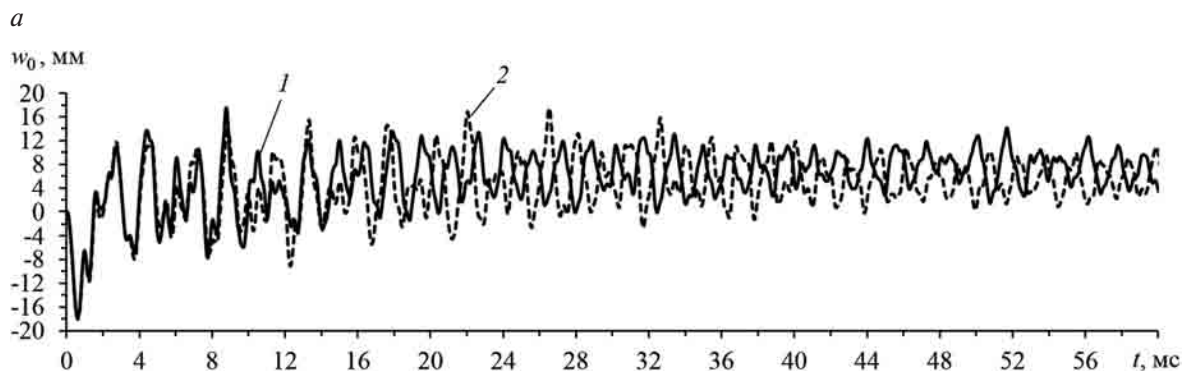
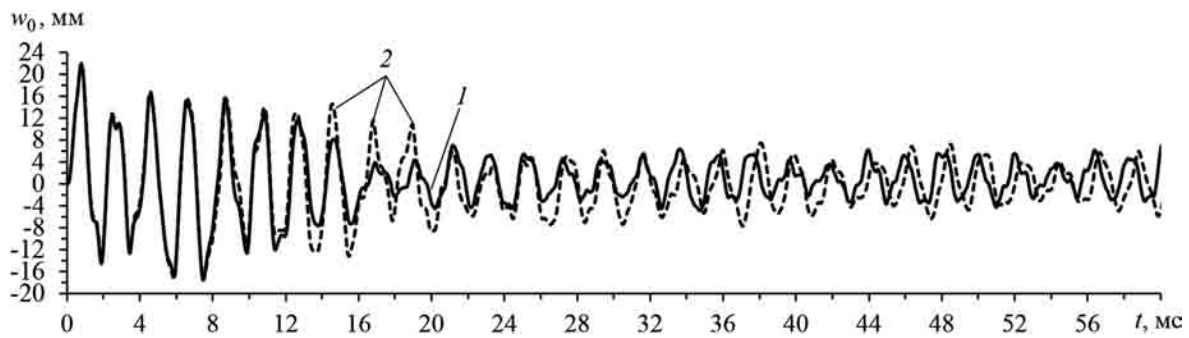
При этом плотности армирования таковы:  $\omega_1 = 0,126$ ,  $\omega_2 = 0,324$  и  $\omega_3 = \omega_4 = 0,07$ . Общий расход арматуры во всех структурах одинаков.

На рисунке 3 изображены зависимости от времени прогибов центральных точек металлокомпозитных панелей с 2D- (штриховые кривые 2) и 3D-структурами (сплошные кривые 1) армирования ( $w_0(t) \equiv w(t, 0, 0)$ ), имеющих размеры:  $b = 50$  см и  $f = 12$  см. Кривые на рисунке 3 *a* рассчитаны при  $p_{max} = 30$  МПа, а на рисунке 3 *b* — при  $p_{max} = -30$  МПа (см. (25) и (27)).

Сопоставление кривых на рисунке 3 свидетельствует о том, что при  $t > 10$  мс осцилляции

металлокомпозитных панелей с 2D- и 3D-структурами армирования существенно различаются. При этом максимальные по модулю прогибы в обоих случаях армирования практически одинаковы. Однако кривые 1 на рисунке 3 затухают быстрее, чем кривые 2, т. е. в конструкции с пространственным 3D-армированием механическая диссипация энергии в процессе пластического деформирования происходит более активно, чем в панели с «плоской» 2D-структурой.

Следует отметить, что на рисунке 3 *b* в окрестности момента времени  $t = 60$  мс обе кривые осциллируют около значения  $w_0 = 6$  мм, которое можно рассматривать как приближенную величину остаточных прогибов центральных точек соответствующих КМ-панелей. Следовательно, остаточный прогиб является положительным, несмотря на то, что нагрузка прикладывается к соответствующим конструкциям в отрицательном направлении — к верхним лицевым поверхностям (см. первый локальный минимум на кривых рисунка 3 *b*). Этот факт свидетельствует о сложном динамическом поведении тонкостенных КМ-конструкций при их упругопластическом деформировании. Такой результат не может быть получен, например, в рамках использования жесткопластической модели деформирования материалов тонкостенных элементов конструкций при их динамическом нагружении [26], так как в рамках этой модели не учитываются упругие деформации и конструкции в процессе динамического деформирования вообще не осциллируют.



*b*

Рисунок 3 — Поперечные колебания центральных точек тонких металлокомпозитных цилиндрических панелей с 2D- и 3D-армированием при нагружении с разных лицевых поверхностей: *a* — нижней (вогнутой); *b* — верхней (выпуклой)  
Figure 3 — Transverse oscillations of central points of thin metal composite cylindrical panels with 2D and 3D reinforcement when loaded from different front surfaces: *a* — from lower (concave) surface; *b* — from top (convex) surface

Выше исследовалось поведение металлокомпозитных пологих оболочек, композиция которых имеет слабо выраженную анизотропию (согласно таблице,  $E^{(k)}/E^{(0)} \approx 3$ ,  $1 \leq k \leq K$ ). Рассмотрим теперь стеклопластиковые конструкции, анизотропия композиции которых является сильно выраженной ( $E^{(k)}/E^{(0)} = 31$ ,  $1 \leq k \leq K$ ). На рисунке 4 приведены зависимости  $w_0(t)$ , определенные для стеклопластиковых 2D- (штриховые кривые 2) и 4D-армированных (сплошные кривые 1) цилиндрических панелей прежних размеров. Кривые на рисунке 4 *a* рассчитаны при  $p_{\max} = 9$  МПа, а на рисунке 4 *b* — при  $p_{\max} = -9$  МПа. Поведение кривых на рисунке 4 показывает, что несмотря на то, к какой лицевой поверхности прикладывается динамическое нагружение (25), прогиб с максимальным по модулю значением достигается в отрицательном направлении. При этом на рисунке 4 *a* (при нагружении конструкции снизу) максимальные по модулю прогибы в КМ-панелях с 2D- и 4D-структурами армирования почти одинаковы, а на рисунке 4 *b* (при нагружении сверху) максимальный по модулю прогиб в полой оболочке со структурой 2D-армирования примерно на 20 % больше, чем в конструкции с 4D-армированием. Следовательно, даже в относительно тонкой цилиндрической КМ-панели ( $h/b = 1/50$ ) замена «плоской» структуры армирования с сильно выраженной анизотропией на пространственную структуру

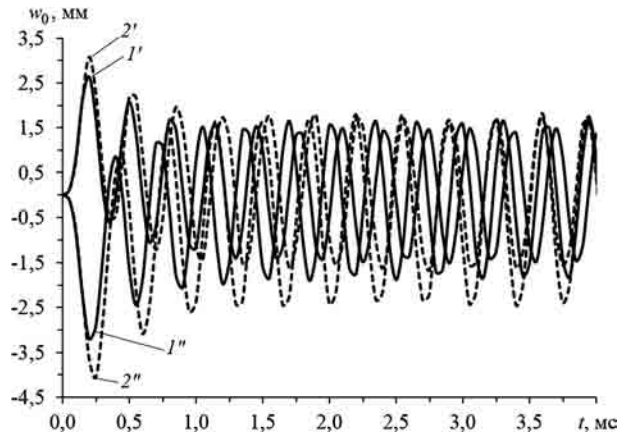
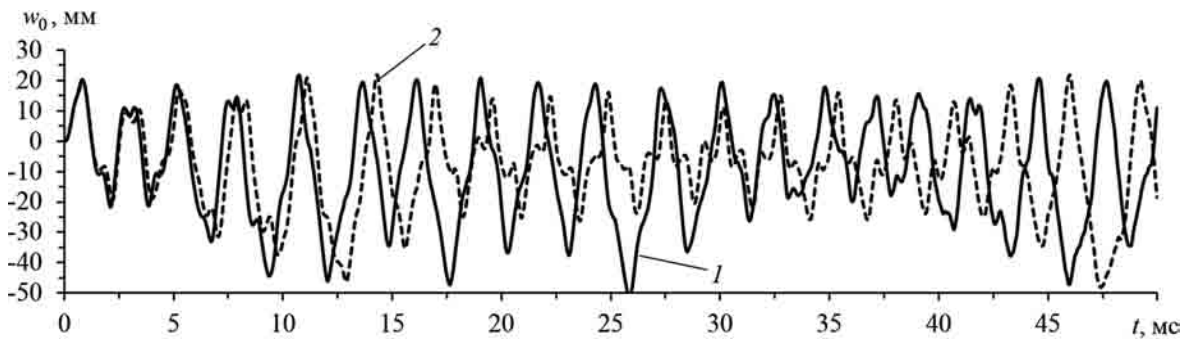


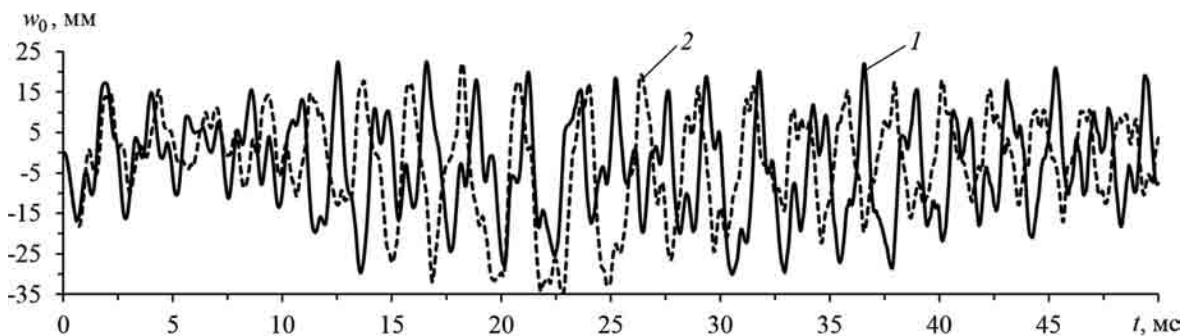
Рисунок 5 — Поперечные колебания центральных точек относительно толстых стеклопластиковых панелей с 2D- и 4D-армированием, нагруженных с разных лицевых поверхностей  
 Figure 5 — Transverse oscillations of central points of relatively thick fiberglass panels with 2D and 4D reinforcement loaded from different front surfaces

4D-армирования может приводить к существенному уменьшению податливости такой конструкции при динамическом нагружении.

Выше рассматривались тонкие КМ-панели. На рисунке 5 изображены зависимости  $w_0(t)$ , полученные для относительно толстых панелей с размерами  $b = 10$  см и  $f = 2$  см ( $h/b = 1/10$ ), выполненных из стеклопластиков. Кривые 1', 2' определены при  $p_{\max} = 20$  МПа, а кривые 1'', 2'' — при  $p_{\max} = -20$  МПа. Сплошные кривые 1', 1''



*a*



*b*

Рисунок 4 — Поперечные колебания центральных точек тонких стеклопластиковых цилиндрических панелей с 2D- и 4D-армированием при нагружении с разных лицевых поверхностей: *a* — нижней (вогнутой); *b* — верхней (выпуклой)  
 Figure 4 — Transverse oscillations of central points of thin fiberglass cylindrical panels with 2D and 4D reinforcement when loaded from different front surfaces: *a* — from lower (concave) surface; *b* — from top (convex) surface



рассчитаны для панели с пространственным 4D-армированием, а штриховые кривые 2', 2" — с «плоским» 2D-армированием. Сопоставление сплошных и штриховых кривых показывает, что в случае относительно толстых стеклопластиковых панелей замена 2D-структуры на 4D-структуру армирования приводит к уменьшению наибольшего по модулю значения прогиба примерно на 20 %. Дополнительные расчеты, проведенные для аналогичных конструкций из АДМ—У8А-композиции, продемонстрировали, что для металлокомпозитных цилиндрических панелей замена «плоской» структуры 2D-армирования на пространственную 4D-структуру приводит к уменьшению максимального по модулю значения прогиба менее чем на 1,5 % (соответствующие зависимости  $w_0(t)$  не приведены).

**Заключение.** Сравнительный анализ динамического упругопластического поведения изгибаемых искривленных панелей с плоскими и пространственными структурами армирования показал, что замена плоско-перекрестной структуры армирования с сильно выраженной анизотропией (стеклопластик) на пространственную структуру с тем же расходом волокон позволяет уменьшить максимальное по модулю значение прогиба на несколько десятков процентов, причем не только для относительно толстых, но в ряде случаев и для относительно тонких КМ-конструкций. При слабо выраженной анизотропии композиции (металлокомпозит) такая замена структур армирования практически не приводит к уменьшению податливости искривленных панелей в поперечном направлении. Однако при пространственных металлокомпозитных структурах армирования наблюдается более интенсивная диссипация механической энергии при пластическом деформировании КМ-конструкций, чем при использовании плоских структур армирования.

Проведенные расчеты продемонстрировали, что в силу физической и геометрической нелинейности исследуемых задач наибольший по модулю прогиб тонких КМ-панелей может реализоваться значительно позже времени прекращения действия интенсивной, но кратковременной динамической нагрузки взрывного типа. В случаях относительно толстых пологих КМ-оболочек максимальное по модулю значение прогиба достигается на первой осцилляции, так как при деформировании таких конструкций влияние геометрической нелинейности пренебрежимо мало.

### Список литературы

- Композиционные материалы, армированные системой прямых взаимно ортогональных волокон. 2. Экспериментальное изучение / И.Г. Жигун [и др.] // Механика полимеров. — 1973. — № 6. — С. 1011–1018.
- Тарнопольский, Ю.М. Пространственно-армированные композиционные материалы: справ. / Ю.М. Тарнопольский, И.Г. Жигун, В.А. Поляков. — М.: Машиностроение, 1987. — 224 с.
- A new generation of 3D woven fabric performs and composites / M.H. Mohamed [et al.] // SAMPE J. — 2001. — Vol. 37, No. 3. — Pp. 3–17.
- Measuring and modeling the thermal conductivities of three-dimensionally woven fabric composites / J. Schuster [et al.] // Mechanics of Composite Materials. — 2009. — Vol. 45, No. 2. — Pp. 241–254.
- Тарнопольский, Ю.М. Композиционные материалы, армированные системой прямых взаимно ортогональных волокон. 1. Расчет упругих характеристик / Ю.М. Тарнопольский, В.А. Поляков, И.Г. Жигун // Механика полимеров. — 1973. — № 5. — С. 853–860.
- Крегерс, А.Ф. Структурная модель деформирования анизотропных, пространственно армированных композитов / А.Ф. Крегерс, Г.А. Тетерс // Механика композитных материалов. — 1982. — № 1. — С. 14–22.
- Янковский, А.П. Определение термоупругих характеристик пространственно армированных волокнистых сред при общей анизотропии материалов компонент композиции. 1. Структурная модель / А.П. Янковский // Механика композитных материалов. — 2010. — Т. 46, № 5. — С. 663–678.
- Янковский, А.П. Применение явного по времени метода центральных разностей для численного моделирования динамического поведения упругопластических гибких армированных пластин / А.П. Янковский // Вычислительная механика сплошных сред. — 2016. — Т. 9, № 3. — С. 279–297.
- Богданович, А.Е. Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек / А.Е. Богданович. — Рига: Зинатне, 1987. — 295 с.
- Малмейстер, А.К. Сопrotивление жестких полимерных материалов / А.К. Малмейстер, В.П. Тамуж, Г.А. Тетерс. — Рига: Зинатне, 1972. — 500 с.
- Абросимов, Н.А. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций / Н.А. Абросимов, В.Г. Баженов. — Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. — 400 с.
- Reddy, J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis / J.N. Reddy. — 2nd Ed. — Boca Raton: CRC Press, 2004. — 858 с.
- Моделирование статики и динамики оболочечных конструкций из композиционных материалов / В.О. Каледин [и др.]. — М.: Физматлит, 2014. — 196 с.
- Янковский, А.П. Моделирование динамического упругопластического поведения гибких армированных пологих оболочек / А.П. Янковский // Конструкции из композиционных материалов. — 2018. — № 2. — С. 3–14.
- Янковский, А.П. Моделирование осесимметричного упругопластического деформирования цилиндрических волокнистых оболочек / А.П. Янковский // Механика машин, механизмов и материалов. — 2018. — № 2(43). — С. 68–76.
- Босяков, С.М. Анализ свободных колебаний цилиндрической оболочки из стеклопластика при граничных условиях Навье / С.М. Босяков, В. Чживэй // Механика машин, механизмов и материалов. — 2011. — № 3(16). — С. 24–27.
- Гулгазрян, Г.Р. О свободных интерфейсных колебаниях тонких упругих круговых цилиндрических оболочек / Г.Р. Гулгазрян, Р.Г. Гулгазрян // Механика машин, механизмов и материалов. — 2013. — № 4(25). — С. 12–19.
- Марчук, М.В. Исследование деформирования гибких длинных пологих некруговых цилиндрических панелей с заземленными продольными краями на основе уточненной теории / М.В. Марчук, Р.И. Тучапский, В.С. Пакош // Механика машин, механизмов и материалов. — 2015. — № 4(33). — С. 59–69.
- Агаларова, И.У. Колебания подкрепленных перекрестными системами ребер анизотропных цилиндрических оболочек с наполнителем при осевом сжатии и с учетом трения / И.У. Агаларова // Механика машин, механизмов и материалов. — 2017. — № 1(38). — С. 57–63.
- Леоненко, Д.В. Напряженно-деформированное состояние физически нелинейной трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем / Д.В. Леоненко, А.С. Зеленая // Механика машин, механизмов и материалов. — 2018. — № 2(43). — С. 77–82.
- Reissner, E. On transverse vibrations of thin shallow elastic shells / E. Reissner // Quarterly of Applied Mathematics. — 1955. — Vol. 13, No. 2. — Pp. 169–176.

22. Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твердых тел / Г.В. Иванов [и др.]. — Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2002. — 352 с.
23. Houlston, R. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading // *Computers & Structures* / R. Houlston, C.G. Desrochers. — 1987. — Vol. 26, No. 1/2. — Pp. 1–15.
24. Композиционные материалы: справ. / Под ред. Д.М. Карпиноса. — Киев: Наук. думка, 1985. — 592 с.
25. Справочник по композитным материалам: в 2 кн. / Под ред. Дж. Любина; пер. с англ. А.Б. Геллера, М.М. Гельмонта (под ред. Б.Э. Геллера). — М.: Машиностроение, 1988. — Кн. 1. — 448 с.
26. Немировский, Ю.В. Динамика пластического деформирования пластин с криволинейным контуром / Ю.В. Немировский, Т.П. Романова // *Прикладная механика*. — 2001. — Т. 37, № 12. — С. 68–78.

YANKOVSKII Andrei P., D. Sc. in Phys. and Math.

Leading Researcher of the Laboratory of Fast Processes Physics

E-mail: yankovsky\_ap@rambler.ru

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Science, Novosibirsk, Russia

Received 21 September 2018.

## MODELING ELASTO-PLASTIC BEHAVIOR OF SPACE-REINFORCED FLEXIBLE CURVED PANELS TAKING INTO ACCOUNT POSSIBLE WEAKENED RESISTANCE TO TRANSVERSE SHEARS

*A mathematical model of elastic-plastic behavior of flexible curved panels with spatial reinforcement structures is developed. The inelastic deformation of the composition components is described by the theory of plastic flow with isotropic hardening. The possible weakened resistance of composite panels to transverse shears is taken into account in the framework of the non-classical Reddy theory, and the geometric nonlinearity is considered in the Karman approximation. The solution of the formulated initial-boundary value problem is obtained by an explicit numerical “cross” scheme. The bending inelastic behavior of “flat”- and spatially-reinforced cylindrical panels under the action of dynamic loads of explosive type is investigated. The glass-plastic and metal-composite structures are considered. It is shown that for relatively thick glass-plastic panels (and in some cases for relatively thin ones), the replacement of the flat-cross structure of the reinforcement with the spatial structure leads to a decrease in the deflection of the composite structure by several tens of percent. In cases of metal-composite panels, such replacement of reinforcement structures practically does not lead to a decrease in their flexibility in the transverse direction.*

**Keywords:** curved panels, spatial reinforcement, Reddy theory, geometric nonlinearity, elastic-plastic deformation, explosive load, “cross” scheme

### References

1. Zhigun I.G., Dushin M.I., Polyakov V.A., Yakushin V.A. Kompozitsionnye materialy, armirovannye sistemoy pryamykh vzaimno ortogonalnykh volokon. 2. Eksperimentalnoe izuchenie [Composite materials reinforced with a system of straight mutually orthogonal fibers. 2. Experimental study]. *Mekhanika polimerov* [Mechanics of polymers], 1973, no. 6, pp. 1011–1018.
2. Tarnopolskiy Yu.M., Zhigun I.G., Polyakov V.A. *Prostranstvenno-armirovannye kompozitsionnye materialy: spravochnik* [Spatially reinforced composite materials: handbook]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1987. 224 p.
3. Mohamed M.H., Bogdanovich A.E., Dickinson L.C., Singletary J.N., Lienhart R.R. A new generation of 3D woven fabric per-forms and composites. *SAMPE Journal*, 2001, vol. 37, no. 3, pp. 3–17.
4. Schuster J., Heider D., Sharp K., Glowania M. Measuring and modeling the thermal conductivities of three-dimensionally woven fabric composites. *Mechanics of Composite Materials*, 2009, vol. 45, no. 2, pp. 241–254.
5. Tarnopolskiy Yu.M., Zhigun I.G., Polyakov V.A. Kompozitsionnye materialy, armirovannye sistemoy pryamykh vzaimno ortogonalnykh volokon. 1. Raschet uprugikh kharakteristik [Composite materials reinforced with a system of straight mutually orthogonal fibers. 1. Calculation of elastic characteristics]. *Mekhanika polimerov* [Mechanics of polymers], 1973, no. 5, pp. 853–860.
6. Kregers A.F., Teters G.A. Strukturnaya model deformirovaniya anizotropnykh, prostranstvenno armirovannykh kompozitov [Structural model of deformation of anisotropic, spatially reinforced composites]. *Mekhanika kompozitnykh materialov* [Mechanics of composite materials], 1982, no. 1, pp. 14–22.
7. Yankovskii A.P. Determination of the thermoelastic characteristics of spatially reinforced fibrous media in the case of general anisotropy of their components. 1. Structural model. *Mechanics of Composite materials*, 2010, vol. 46, no. 5, pp. 451–460.
8. Yankovskii A.P. Applying the Explicit Time Central Difference Method for Numerical Simulation of the Dynamic Behavior of Elastoplastic Flexible Reinforced Plates. *Journal of Mechanics and Technical Physics*, 2017, vol. 58, no. 7, pp. 1223–1241.
9. Bogdanovich A.E. *Nelineynye zadachi dinamiki tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek* [Nonlinear problems of the dynamics of cylindrical composite shells]. Riga, Zinatne Publ., 1987. 295 p.
10. Malmeister A.K., Tamuzh V.P., Teters G.A. *Soprotivlenie zhestkikh polimernykh materialov* [Resistance of rigid polymer materials]. Riga, Zinatne Publ., 1972. 500 p.
11. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G. *Nelineynye zadachi dinamiki kompozitnykh konstruksiy* [Nonlinear problems of dynamics composite designs]. Nizhniy Novgorod, Nizhegorodskiy gosudarstvennyy universitet Publ., 2002. 400 p.
12. Reddy J.N. *Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis*. 2nd ed. Boca Raton, CRC Press, 2004. 858 p.

13. Kaledin V.O., Aulchenko S.M., Mitkevich A.B., Reshetnikova E.V., Sedova E.A., Shpakova Yu.V. *Modelirovaniye statiki i dinamiki obolocheknykh konstruktsey iz kompozitsionnykh materialov* [Modeling of statics and dynamics of shelled designs from composite materials]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2014. 196 p.
14. Yankovskii A.P. Modelirovaniye dinamicheskogo uprugoplasticheskogo povedeniya gibkikh armirovannykh pologikh obolochek [Modeling of dynamic elastic-plastic behavior of flexible reinforced shallow shells]. *Konstruktsey iz kompozitsionnykh materialov* [Designs from composite materials], 2018, no. 2, pp. 3–14.
15. Yankovskii A.P. Modelirovaniye osesimmetrichnogo uprugoplasticheskogo deformirovaniya tsilindricheskikh voloknistykh obolochek [Modeling of axisymmetric elastoplastic deformation of cylindrical fibrous shells]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2018, no. 2(43), pp. 68–76.
16. Bosiakov S.M., Zhiwei W. Analiz svobodnykh kolebaniy tsilindricheskoy obolochki iz stekloplastika pri granichnykh usloviyakh Nave [Free vibration analysis of cylindrical shell from fiberglass with Navier boundary conditions]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2011, no. 3(16), pp. 24–27.
17. Ghulghazaryan G.R., Ghulghazaryan R.G. O svobodnykh interfeysnykh kolebaniyakh tonkikh uprugikh krugovykh tsilindricheskikh obolochek [About free interfacial vibrations of thin elastic circular cylindrical shells]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2013, no. 4(25), pp. 12–19.
18. Marchuk M.V., Tuchapskiy R.I., Pakosh V.S. Issledovaniye deformirovaniya gibkikh dlinnykh pologikh nekrugovykh tsilindricheskikh paneley s zashchemlennymi prodolnymi krayami na osnove utochnennoy teorii [Study of deformation of flexible long shallow noncircular cylindrical panels with clamped longitudinal edges by refined theory]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2015, no. 4(33), pp. 59–69.
19. Agalarova I.Y. Kolebaniya podkreplennykh perekrestnymi sistemami reber anizotropnykh tsilindricheskikh obolochek s zapolnitelem pri osevom szhatii i s uchedom treniya [Oscillations of anisotropic cylindrical shells with filler supported with cross ribs system, under axial compression and given friction]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2017, no. 1(38), pp. 57–63.
20. Leonenko D.V., Zelenaya A.S. Napryazhenno-deformirovannoe sostoyaniye fizicheski nelineynoy trekhslonnoy pryamougolnoy plastiny so szhimaemym zapolnitelem [Stress-strain state of a physically non-linear three-layer rectangular plate with a compressed filler]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2018, no. 2(43), pp. 77–82.
21. Reissner E. On transverse vibrations of thin shallow elastic shells. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1955, vol. 13, no. 2, pp. 169–176.
22. Ivanov G.V., Volchokov Yu.M., Bogulskiy I.O., Anisimov S.A., Kurguzov V.D. *Chislennoe resheniye dinamicheskikh zadach uprugoplasticheskogo deformirovaniya tverdykh tel* [The numerical solution of dynamic problems of elastic-plastic deformation of solids]. Novosibirsk, Sibirskiy universitet Publ., 2002. 352 p.
23. Houlston R., DesRochers C.G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading. *Computers & Structures*, 1987, vol. 26, no. 1/2, pp. 1–15.
24. *Kompozitsionnye materialy. Spravochnik* [Composite materials. Reference book]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1985. 592 p.
25. *Handbook of composites*. New York, Van Nostrand Reinhold Company Inc., 1982. 786 p.
26. Nemirovskiy Yu.V., Romanova T.P. Dynamic plastic deformation of curvilinear plates. *International Applied Mechanics*, 2001, vol. 37, no. 12, pp. 1568–1578.