

УДК 577

А.В. ЧИГАРЕВ, д-р физ.-мат. наук

профессор кафедры теоретической и прикладной механики¹

E-mail: chigarev@rambler.ru

М.О. МИХНОВИЧ

ассистент кафедры «Интеллектуальные и мехатронные системы»²

E-mail: mihnovich.m@bntu.by

¹Белорусский государственный университет, г. Минск, Республика Беларусь²Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 02.07.2019.

МОДЕЛИРОВАНИЕ БИОМЕХАНИКИ ГЛАЗА ПРИ ПНЕВМОТОМЕТРИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЯХ МЕТОДОМ СУПЕРПОЗИЦИИ ДВИЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ ВЯЗКОУПРУГОГО ТЕЛА

Произвольные точки поверхности роговицы вследствие деформации волнообразно перемещаются практически от центра зрачка вдоль радиуса глаза, а энергия распространяется в виде волны с быстро затухающей амплитудой. Исследования выявляют микровибрационные движения оболочки глаза вследствие кровообращения в микрососудах глаза. Это позволяет выделять максимальное давление в фазе систолы и минимальное в фазе диастолы. Мягкая оболочка в начальном (ненагруженном) состоянии не имеет собственной формы. Под действием внутреннего давления мягкая оболочка принимает форму, соответствующую наибольшему объему. В этом случае в материале оболочки возникают растягивающие напряжения, образующие вместе с внутренней средой самоуравновешенную систему, в которой формообразующая оболочка растянута, а внутренняя среда (жидкость, гель) сжаты. При любых внешних воздействиях и нагрузках вследствие избыточного давления возникают только растягивающие напряжения. Таким образом, внутреннее давление придает мембране необходимую конструктивную жесткость.

Ключевые слова: моделирование, биомеханика, пневмотонометр, движение, деформация, вязкоупругость, модель, роговица, импульс, мембрана

Введение. Экспериментальные исследования биомеханики глаза человека при пневмотонометрических испытаниях показывают, что движение точек поверхности роговицы представляет собой суперпозицию нескольких механических перемещений под действием импульса воздуха [1]. Практически одновременно глаз как целое тело поступательно перемещается вдоль оптической оси и одновременно совершает вращательные движения вокруг центра масс глаза (прецессия и нутация). Собственное вращение глаза вокруг оптической оси не наблюдается.

Передняя камера глаза ограничена спереди роговицей, а задняя часть (стенка) образуется совокупностью хрусталика радужной оболочки и заполнена жидкостью, создающей внутриглазное давление ИОР. Задняя камера глаза ограничена склерой, а дно ее выстлано сетчатой и сосудистой оболочкой. Спереди расположена конструкция из хрусталика цилиарных мышц и заполнена стекловидным телом, представляющим собой телеобразное вещество.

При пневмотонометрических испытаниях импульс объема воздуха движется вдоль оптической оси и взаимодействует с роговицей. Будем моде-

лировать роговицу мягкой оболочкой, т. е. считать, что материал ее сам по себе имеет нулевую сдвиговую жесткость. Подобные материалы слабо сопротивляются сжатию, но хорошо сопротивляются растяжению.

Математическая модель реакции роговицы на внешний импульс (рисунок 1). Оси x , y системы координат разместим в плоскости круга радиуса R — расстояние до точки, куда возмущение роговицы импульсом не доходит. Произ-

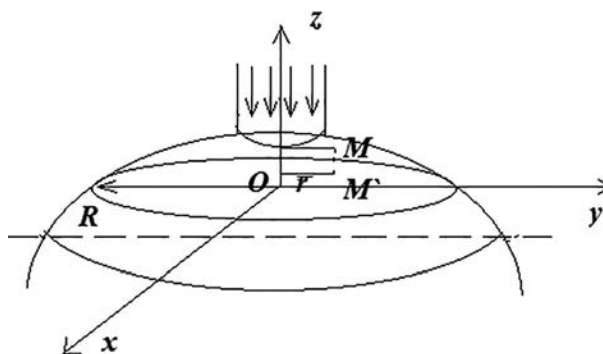


Рисунок 1 — Математическая модель реакции роговицы глаза на импульс воздуха
Figure 1 — Mathematical model of the corneal response to an air pulse

вольная точка роговицы M имеет координаты $M(x, y, z) = M(r, z)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, прогиб под действием импульса обозначим $W(t, x, y, z)$.

Будем считать, что сопротивление жидкости и роговицы зависит от скорости движения точки роговицы и от величины прогиба W . Причем в первом приближении эти зависимости имеют линейный характер.

Уравнение, описывающее динамику мембраны с учетом вязкоупругих сил сопротивления, запишем в виде [2]

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + k \frac{\partial W}{\partial t} = a^2 \Delta_2 W - bW + \Phi(x, y, t); \quad (1)$$

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2 x}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial r^2},$$

где коэффициент k характеризует вязкое, а b — упругое сопротивление растяжению; $\Phi(x, y, t)$ — внешняя сила.

Уравнение (1) называется телеграфным [2]. Так как материал оболочки двухмодульный и при сжатии оказывает слабое сопротивление, то мембрана прогибается до состояния апланации средней части и затем прогиб меняет знак и деформируется вогнутостью вверх. Так как при этом происходит растяжение, то возникает сопротивление деформированию мембраны при достижении определенной величины прогиба, а оставшаяся часть энергии импульса совершает работу по перемещению глаза, как целого тела, вдоль оптической оси и угловые смещения как следствия несовпадения оси импульса и оптической оси.

Отметим, что в уравнении (1) не учитывается возможное действие сил поверхностного натяжения, т. к. об этом отсутствует экспериментальная информация.

Поскольку в первом приближении можем считать, что деформируемая область глаза имеет осевую симметрию, то перейдем от декартовых координат x, y к полярным, считая, что $W(x, y, t) = W(r, t)$, тогда получим:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + k \frac{\partial W}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right) - bW + \Phi(r, t). \quad (2)$$

Представляя $W(r, t)$ в виде [3]

$$W(r, t) = \exp\left(-\frac{1}{2}kt\right)U(r, t), \quad (3)$$

получим для $U(r, t)$ уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) - \left(b - \frac{1}{4}k^2\right)U + \exp\left(\frac{1}{2}kt\right)\Phi(r, t). \quad (4)$$

Решение неоднородного уравнения (4) записывается в общем случае в интегральном виде с помощью функции Грина и имеет очень громоздкий вид, поэтому упростим модель, положив, что внутриглазное давление в передней камере глаза вместе с жидкостью и задней частью камеры, об-

разованной хрусталиком и мышцами, действуют на мембрану (роговицу) как линейно упругое основание Винклера с конструктивной жесткостью. Тогда можно положить $(r, t) \equiv 0$. Рассмотрим одномерное упрощение уравнения (4), наблюдая его в плоскости Oxz и полагая, что $r = x, y = 0$.

В этом случае уравнение (4) запишется в виде уравнения Клейна—Гордона [4]:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \left(b - \frac{1}{4}k^2\right)U. \quad (5)$$

Вид решений уравнения (5) зависит от знака выражения $b - \frac{1}{4}k^2 = \beta$, характеризующего зависимость между упругостью и вязкостью в рассматриваемой модели глаза.

При $\beta > 0$ решение имеет вид [5]:

$$W(x, t) = \exp\left(-\frac{1}{2}kt\right)[AJ_0(\xi) + BY_0(\xi)]; \quad (6)$$

$$\xi = \frac{\sqrt{\beta}}{a} \sqrt{a^2(t + C_1)^2 - (x + C_2)^2}, \quad (7)$$

где $J_0(\xi), Y_0(\xi)$ — функции Бесселя; A, B, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

При $\beta < 0$ решение имеет вид [5]:

$$W(x, t) = \exp\left(-\frac{1}{2}kt\right)[AI_0(\xi) + BK_0(\xi)]; \quad (8)$$

$$\xi = \frac{\sqrt{-\beta}}{a} \sqrt{a^2(t + C_1)^2 - (x + C_2)^2},$$

где $I_0(\xi), K_0(\xi)$ — модифицирование функции Бесселя.

Для нахождения A, B, C_1, C_2 поставим начальные и другие необходимые условия для нахождения произвольных констант.

Начальные условия сформулируем в виде:

$$\begin{aligned} W(x, 0) &= f(x); \\ \partial_t W(x, 0) &= g(x), \end{aligned} \quad (9)$$

тогда в зависимости от знака β получим следующие уравнения.

При $\beta > 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= AJ_0(\xi_0) + BY_0(\xi_0); \\ \xi_0 &= \frac{\sqrt{\beta}}{a} \sqrt{a^2 C_1^2 - (x + C_2)^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

В выражении (6) функция $Y_0(\xi)$ при $\xi = 0$ обращается в бесконечность. Это соответствует:

$$a^2(t + C_1)^2 - (x + C_2)^2 = 0. \quad (11)$$

Из (10), считая $\xi_0 = 0$, получим:

$$a^2 C_1^2 - (x + C_2)^2 = 0. \quad (12)$$

В центре роговицы $x = 0$, тогда из (12) получим:

$$a^2 C_1^2 - C_2^2 = 0, \quad C_2 = \pm a C_1. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (12), находим:

$$\begin{aligned} a^2 C_1^2 - (x \pm a C_1)^2 &= 0; \\ \pm 2a C_1 - x^2 &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

При $x = 0$ должно быть $C_1 = C_1 = 0$.

Таким образом

$$\xi = \frac{\sqrt{\beta}}{a} \sqrt{(at-x)(at+x)}. \quad (15)$$

Чтобы решение в виде (6) было корректно, нужно положить $\beta = 0$, тогда соответственно начальное условие (10) имеет вид:

$$f(x) = AJ_0(\xi_0), \quad \xi_0 = \frac{\sqrt{\beta}}{a} \sqrt{-x^2} = \pm \frac{\sqrt{\beta}x}{a}i, \quad (16)$$

$$J_0(iz) = I_0(z)$$

или

$$f(x) = AI_0\left(\pm \frac{\sqrt{\beta}}{a}x\right). \quad (17)$$

В начальный момент времени мембрана под действием внутреннего давления представляет собой часть сферической поверхности, ограниченную лимбом:

$$\frac{x^2}{(W(0,0)-R)^2} + \frac{W^2}{(W(0,0)-R)^2} = 1;$$

$$x^2 + W^2 = (W(0,0)-R)^2;$$

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{W^2}{R^2} = 1; \quad \frac{x^2}{R^2} + \frac{(W+R-W_{00})^2}{R^2} = 1;$$

$$W+R-W_n = R; \quad x^2 + (R-W_{00})^2 = R^2;$$

$$x^2 + R^2 - 2RW_{00} + W_n^2 = R^2;$$

$$x = \pm W_{00}^{1/2} \sqrt{R-W_{00}} = \pm a.$$

В плоскости лимба расположим координатную плоскость Oxy .

Тогда начальный профиль мембраны представим в виде (рисунок 2):

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2} + W_{00} - R. \quad (18)$$

Представим (17), (18) в окрестности центра роговицы в виде разложений правой и левой частей в степенные ряды с учетом (18), тогда получим:

$$A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta x^2/a^2)^k}{k! \sqrt{k+1}} = W_{00} - R + R \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{R} \right)^2 + \dots \right). \quad (19)$$

Приравниваем члены при одинаковых степенях x :

$$A \left(1 + \frac{\beta x^2}{4a^2} + \dots \right) = W_{00} - R + R \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{R} \right)^2 + \dots \right); \quad (20)$$

$$A = W_{00} - R + R; \quad A \frac{\beta}{4a^2 \Gamma(2)} = \frac{R}{2} \frac{1}{R^2}.$$

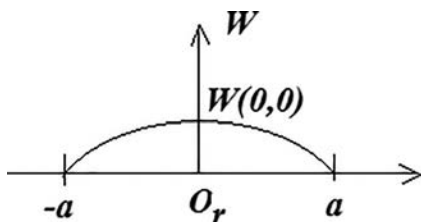


Рисунок 2 — Начальный профиль мембраны (роговицы)
Figure 2 — Initial profile of the membrane (cornea)

Из (20) следует:

$$W_{00} = A;$$

$$\frac{\beta W_{00}}{4a^2 \Gamma(2)} = \frac{1}{2R} \Rightarrow \beta > 0, \quad (21)$$

при $\beta < 0$.

Рассмотрим теперь нахождение произвольных постоянных при $\beta < 0$ согласно формуле (8). Исходя из условия конечности перемещений в центре зрачка требуется положить $B = 0$, тогда решение (8) запишется в виде:

$$W(x, t) = A \exp\left(-\frac{1}{2}kt\right) I_0(\xi). \quad (22)$$

Начальное условие (10) имеет вид:

$$f(x) = AI_0(\xi_0), \quad \xi_0 = \frac{\sqrt{-\beta}}{a} \sqrt{a^2 C_1^2 - (x+C_2)^2}. \quad (23)$$

Полагая $\xi_0 = 0$, получим из (23):

$$a^2 C_1^2 - (x+C_2)^2 = 0. \quad (24)$$

В центре роговицы $x = 0$, тогда из (24) следует

$$a^2 C_1^2 - C_2^2 = 0, \quad C_2 = \pm a C_1. \quad (25)$$

Подставляя (25) в (24), получим:

$$a^2 C_1^2 - (x \pm a C_1)^2 = 0;$$

$$\pm 2a C_1 - x^2 = 0. \quad (26)$$

Из (26) находим при $x = 0$:

$$C_1 = C_2 = 0.$$

Таким образом

$$\xi = \frac{\sqrt{-\beta}}{a} \sqrt{a^2 t^2 - x^2}. \quad (27)$$

Подставляя (27) в (22), получим решение в общем виде.

Начальное условие записывается в виде

$$f(x) = AI_0(\xi_0), \quad \xi_0 = \frac{\sqrt{-\beta}}{a} \sqrt{-x^2} = \pm \frac{\sqrt{-\beta}E}{a}i;$$

$$I_0\left(\pm \frac{\sqrt{-\beta}E}{a}i\right) = J_0\left(\pm \frac{\sqrt{-\beta}}{a}x\right). \quad (28)$$

Таким образом

$$f(x) = AJ_0\left(\pm \frac{\sqrt{-\beta}x}{a}\right). \quad (29)$$

Подставим разложения правой и левой частей (29) в степенные ряды

$$\frac{(\pm \frac{\sqrt{-\beta}x}{a})^2}{4} = W_{00} - R + R \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{R} \right)^2 + \dots \right).$$

Приравнивая члены при одинаковых степенях x , получим:

$$A \left(\frac{1}{\Gamma(1)} \right) = W_{00}; \quad A \frac{\left(\frac{-\beta}{a^2} x^2 \right)}{4} = \frac{1}{2} \frac{x^2}{R}. \quad (31)$$

Из (31) найдем

$$W_{00} = A; \quad -\beta W_{00} = \frac{x^2}{4a^2} = \frac{x^2}{2R}. \quad (32)$$

Рассмотрим второе начальное условие

$$\partial_t W|_{t=0} = g(x). \quad (33)$$

При $\beta > 0$, дифференцируя (6) при $t = 0$, получим

$$g(x) = -\frac{A}{2} k \frac{dJ_0}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} \Big|_{t=0} = -\frac{Ak}{2} (-J_1(\xi_0(x))) \frac{\sqrt{\beta}}{a} \frac{aC_1}{\sqrt{C_1^2 - (x+C_2)^2}}. \quad (34)$$

Будем считать, что импульс длится до момента, когда мембрана начинает оказывать сопротивление, останавливаясь в нижнем положении так, что глазное яблоко начинает двигаться как целое тело. Это следует из модели мембраны как мягкой оболочки, почти не оказывающей сопротивления сжатию:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\sqrt{\beta}}{a} \frac{1}{2\sqrt{2a^2(t+C_1)}} = \frac{\sqrt{\beta}}{a} \frac{2a^2 C_1^2}{2\sqrt{a^2 C_1^2 - (x+C_2)^2}};$$

$$\xi = \frac{\sqrt{\beta}}{a} \sqrt{(at+C_1)^2 - (x+C_2)^2};$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\sqrt{\beta} 2}{a} \frac{(at+C_1)a}{2\sqrt{(at+C_1)^2 - (x+C_2)^2}};$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\sqrt{\beta}}{a} \frac{aC_1}{\sqrt{C_1^2 - (x+C_2)^2}};$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} \Big|_{x=0} = \frac{\sqrt{\beta}}{a} \frac{a(at+C_1)}{\sqrt{(at+C_1)^2 - C_2^2}};$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} \Big|_{x=0} = \frac{\sqrt{\beta}}{a} \frac{aC_1}{\sqrt{C_1^2 - C_2^2}}.$$

Тогда профиль $g(x)$ представляет собой параболу, которая описывает профиль скорости в трубке пневмотонометра (рисунок 3):

$$g(x) = V_0 \left(1 - \frac{x^2}{d^2}\right). \quad (35)$$

При $x=0, t=0, g(x) = V_0$, тогда из (34) следует

$$V_0 = -\frac{Ak}{2} (-J_1(\xi_0(0))) \frac{\sqrt{\beta}}{a} \frac{aC_1}{\sqrt{C_1^2 - C_2^2}}. \quad (36)$$

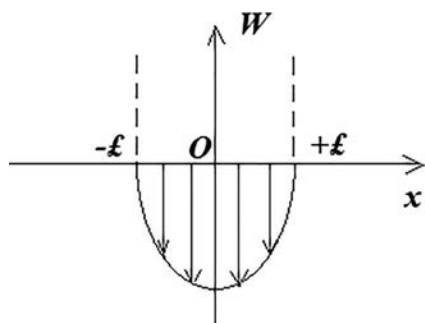


Рисунок 3 — Профиль скорости в тонометре $g(x)$ представляет собой параболу

Figure 3 — Speed profile in the tonometer $g(x)$ is a parabola

Рассмотрим условия (34), (36), раскладывая $J_1(\xi_0)$ в ряд:

$$J_1(\xi_0) = \left(\frac{\xi_0}{2}\right) \left[\frac{1}{\Gamma(1)} + \frac{-\xi_0^2}{4} \dots \right].$$

Из (34) следует

$$\xi = \frac{\sqrt{\beta}}{a} \sqrt{(at+C_1)^2 - (x+C_2)^2};$$

$$\xi_0 = \frac{\sqrt{\beta}}{a} \sqrt{C_1^2 - (x+C_2)^2} = \frac{\sqrt{\beta} C_1}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x+C_2}{C_1}\right)^2} = \frac{\sqrt{\beta} C_1}{a} \left(1 - \left(\frac{x+C_2}{C_1}\right)^2\right) + \dots;$$

$$\frac{\xi_0}{2} \left[1 - \frac{\xi_0^2}{2 \cdot 4}\right] = \frac{\sqrt{\beta}}{2a} C_1 \left(1 - \left(\frac{x+C_2}{C_1}\right)^2\right) \times$$

$$\times \left[1 - \frac{1}{8} \frac{\beta}{2a} C_1^2 \left(1 - \left(\frac{x+C_2}{C_1}\right)^2\right)\right] = \frac{\sqrt{\beta}}{2a} C_1 \left[1 - \left(\frac{x+C_2}{C_1}\right)^2 - \frac{1}{8} \frac{\beta}{2a} C_1^2 \left(1 - \left(\frac{x+C_2}{C_1}\right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{x+C_2}{C_1}\right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{x+C_2}{C_1}\right)^2 \frac{\beta}{a^2} C_1^2 \left(1 - \left(\frac{x+C_2}{C_1}\right)^2\right)\right) \right] =$$

$$= \frac{\sqrt{\beta}}{2a} C_1 \left[\begin{aligned} &1 - \left(\frac{x}{C_1}\right)^2 + 2 \frac{x C_2}{C_1} - \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 - \frac{1}{8} \frac{\beta}{a^2} C_1^2 + \\ &+ \frac{1}{8} \frac{\beta}{a^2} C_1^2 \left[\left(\frac{x}{C_1}\right)^2 + \frac{2x C_2}{C_1} + \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 \right] + \\ &+ \left[\frac{1}{8} \left(\frac{x}{C_1}\right)^2 + \frac{2x C_2}{8 C_1} + \frac{1}{8} \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 \right] \frac{\beta}{a^2} C_1^2 \times \\ &\times \left[1 - \left(\frac{x}{C_1}\right)^2 - \frac{2x C_2}{C_1} - \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 \right] \end{aligned} \right] =$$

$$= \frac{\sqrt{\beta}}{2a} C_1 \left[\begin{aligned} &1 + 2 \frac{x C_2}{C_1} - \left(\frac{x}{C_1}\right)^2 - \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 - \frac{1}{8} \frac{\beta}{2a} C_1^2 + \\ &+ \frac{1}{8} \frac{\beta}{2a} C_1^2 \left(\frac{x}{C_1}\right)^2 + \frac{2x C_2 \beta C_1^2}{8 a^2 C_1} + \frac{1}{8} \frac{\beta}{2a} C_1^2 \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 + \\ &+ \frac{1}{8} \frac{\beta}{a^2} C_1^2 \left(\frac{x}{C_1}\right)^2 + \frac{\beta}{a^2} C_1^2 \frac{2x C_2}{8 C_1} + \frac{1}{8} \frac{\beta}{a^2} C_1^2 \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 - \\ &- \frac{\beta}{a^2} C_1^2 \left(\frac{x}{C_1}\right)^2 \frac{1}{8} \left(\frac{x}{C_1}\right)^2 - \frac{\beta}{a^2} C_1^2 \left(\frac{x}{C_1}\right)^2 \frac{2x C_2}{8 C_1} - \\ &- \frac{\beta}{a^2} C_1^2 \left(\frac{x}{C_1}\right)^2 \frac{1}{8} \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 - \frac{\beta}{a^2} C_1^2 \frac{2x C_2}{C_1} \frac{1}{8} \left(\frac{x}{C_1}\right)^2 - \\ &- \frac{\beta}{a^2} C_1^2 \frac{2x C_2}{C_1} \frac{2x C_2}{8 C_1} - \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 \frac{\beta}{a^2} C_1^2 \frac{1}{8} \left(\frac{x}{C_1}\right)^2 - \\ &- \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 \frac{\beta}{a^2} C_1^2 \frac{2x C_2}{8 C_1} - \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 \frac{\beta}{a^2} C_1^2 \frac{1}{8} \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 \end{aligned} \right] =$$

$$= \frac{\sqrt{\beta}}{2a} C_1 \left\{ \begin{aligned} & \left[1 - \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 - \frac{1}{8} \frac{\beta}{a^2} C_1^2 + \frac{1}{8} \frac{\beta}{a^2} C_1^2 \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{\beta}{a^2} C_1^2 \frac{1}{8} \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 - \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 \frac{\beta}{a^2} C_1^2 \frac{1}{8} \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 + \right. \\ & \left. + x \left\{ 2 \frac{C_2}{C_1} + \frac{C_2 \beta C_1^2}{4a^2 C_1} + \frac{C_2 \beta C_1^2}{4a^2 C_1} - \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 \frac{C_2 2\beta C_1}{a^2 8 C_1} \right\} + \right. \\ & \left. + x^2 \left\{ - \left(\frac{1}{C_1} \right)^2 + \frac{1}{8} \frac{\beta}{a^2} \frac{C_1^2}{C_1} + \frac{\beta}{a^2} C_1^2 \frac{1}{8 C_1^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\beta}{a^2} C_1 \frac{1}{C_1^2} \frac{1}{8} \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 - \frac{\beta}{a^2} C_1 \frac{2 C_2}{C_1} \frac{2 C_2}{8 C_1} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 \frac{\beta}{a^2} C_1 \frac{1}{C_1} \frac{1}{8} \right\} \right] \end{aligned} \right\} =$$

$$= \frac{\sqrt{\beta}}{2a} C_1 \left\{ \begin{aligned} & \left[1 - \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 - \frac{1}{8} \frac{\beta}{a^2} (C_1^2 + C_2^2) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{8} \frac{\beta}{a^2} \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 C_1 - \frac{1}{8} \frac{\beta}{a^2} \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^4 C_1 \right] + \\ & \left. + x^2 \left\{ - \frac{1}{C_1^2} + \frac{1}{8} \frac{\beta}{a^2} \frac{C_1^2}{C_1} + \frac{\beta}{a^2} C_1 \frac{1}{C_1^2} \frac{1}{8} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{8} \frac{\beta}{a^2} \frac{C_1^2}{C_1} \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\beta}{a^2} \frac{C_1 C_2^2}{C_1^2} - \frac{1}{8} \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 \frac{\beta}{a^2} \frac{C_1}{C_1^2} \right\} \right] \end{aligned} \right\};$$

$$V_0 = \frac{\sqrt{\beta}}{2a} C_1 \left[1 - \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 - \frac{1}{8} \frac{\beta}{a^2} (C_1^2 + C_2^2) + \right. \\ \left. + \frac{1}{8} \frac{\beta}{a^2} \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 C_1 - \frac{1}{8} \frac{\beta}{a^2} \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^4 C_1 \right];$$

$$0 = \frac{\sqrt{\beta}}{2a} C_1 \left[2 \frac{C_2}{C_1} + \frac{\beta C_1^2 C_2 C_1}{2a^2 C_1} - \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 \frac{\beta C_2 C_1}{4a^2 C_1} \right];$$

$$\frac{V_0}{a^2} = \left(- \frac{1}{C_1^2} + \frac{1}{8} \frac{\beta}{a^2} \frac{C_1^2}{C_1} + \frac{\beta}{a^2} C_1 \frac{1}{8 C_1^2} - \frac{1}{8} \frac{\beta}{a^2} \frac{C_1}{C_1^2} \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 - \right. \\ \left. - \frac{\beta}{2a^2} \frac{C_1 C_2^2}{C_1^2} - \frac{1}{8} \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 \frac{\beta}{a^2} \frac{C_1}{C_1^2} \right) \frac{\sqrt{\beta}}{2a} C_1;$$

$$-J_1(\xi_0(0)) \approx - \left(\frac{\xi_0(0)}{2} \right) = - \frac{\sqrt{\beta}}{a} \sqrt{C_1^2 - C_2^2} = V_0;$$

$$\xi_0(0) = \frac{\sqrt{\beta}}{a} \sqrt{C_1^2 - C_2^2};$$

$$V_0 = \frac{\sqrt{\beta}}{2a} C_1, \quad C_1 = \frac{2V_0 a}{\sqrt{\beta}};$$

$$\left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 \frac{\beta C_1}{a^2 4 C_1} = \frac{2}{C_1} + \frac{\beta C_1}{2a^2};$$

$$C_2^2 = \frac{4 \cdot 2 C_1^2 a^2}{\beta} + \frac{\beta C_1}{2a^2} \frac{a^2 C_1^2}{\beta};$$

$$V_0 = \frac{\sqrt{\beta}}{2a} C_1, \quad C_1 = \frac{2V_0 a}{\sqrt{\beta}};$$

$$\left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 \frac{\beta C_1}{a^2 4 C_1} = \frac{2}{C_1} + \frac{\beta C_1}{2a^2};$$

$$C_2^2 = \frac{4 \cdot 2 C_1^2 a^2}{\beta} + \frac{\beta C_1}{2a^2} \frac{a^2 C_1^2}{\beta};$$

$$C_2 = \pm \sqrt{C_1^3 + \frac{8 C_1^2 a^2}{\beta}} = \pm \sqrt{\frac{8 V_0^3 a^3}{\beta^{3/2}} + \frac{8 a^2 4 V_0^2 a^2}{\beta}} = \\ = \pm \sqrt{\frac{8 V_0^3 a^3}{\beta^{3/2}} + \frac{32 V_0^2 a}{\beta^2}}.$$

Размерность $-(C_2 + x) - (C_1 + at)$, тогда размерность $C_2 - x$, $C_1 - at$, а размерность скорости $\frac{L}{T}$:

$$\beta = b - \frac{1}{4} k^2; \quad C_1 = \frac{2V_0 a}{\sqrt{\beta}} \approx \frac{L^2}{T^2}; \quad \sqrt{\beta} \approx \frac{L}{T^2}.$$

Рассмотрим теперь уравнение волнового движения мембраны в полярной системе координат в виде

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + k \frac{\partial W}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right) - bW + \Phi(r, t). \quad (37)$$

Представим решение (37) в виде

$$W(r, t) = \exp\left(-\frac{1}{2} kt\right) U(r). \quad (38)$$

Подставляя (38) в (37), получим:

$$\frac{1}{4} k^2 U(r) - \frac{k^2}{2} U(r) = a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) - bU(r).$$

Приведа подобные члены, получим:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \left(\frac{k^2}{4a^2} - \frac{b}{a^2} \right) U = 0. \quad (39)$$

Решение уравнения (39) запишем в виде

$$U(r) = AJ_0(\sqrt{\lambda}r) + BY_0(\sqrt{\lambda}r), \quad (40)$$

где $J_0(\sqrt{\lambda}r)$, $Y_0(\sqrt{\lambda}r)$ — функции Бесселя первого

и второго рода; $\lambda = \frac{k^2}{4a^2} - \frac{b}{a^2} > 0$.

Так как при $r = 0$ решение по физическому смыслу должно быть конечным, то $B = 0$.

Таким образом, имеем

$$U(r) = AJ_0(\sqrt{\lambda}r). \quad (41)$$

Решение $U \equiv 0$ удовлетворяет (39), поэтому представляет интерес найти условия существования нулевых решений при определении λ , которые являются собственными значениями. Для нахождения собственных значений обычно формулируется задача Штурма—Лиувилля для уравнения (39). Задаются нулевые краевые условия, которые в данной задаче можно сформулировать, исходя из физических условий. Первое условие дало $B = 0$. Второе условие сформулируем исходя

из того, что деформация волнообразного изменения роговицы быстро затухает и на лимбе перемещение равно нулю. Поэтому положим, что при $r = \rho_0$, $U(r) = 0$. Из (41) тогда следует

$$J_0(\sqrt{\lambda}\rho_0) = 0. \quad (42)$$

Уравнение (42) представляет собой соотношение для нахождения простых вещественных корней функции Бесселя первого порядка, которых имеется бесконечное число, и они связаны соотношением

$$\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k < \dots; \quad (43)$$

$$\lambda_k = \frac{\mu_k^2}{\rho_0^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Таким образом, собственными функциями задачи являются функции

$$J_0\left(\frac{\mu_k r}{\rho_0}\right), \quad (44)$$

а собственными значениями

$$\mu_k = \sqrt{\lambda_k}\rho_0. \quad (45)$$

Тогда общее решение (37) имеет вид:

$$W(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k_n t} J_0\left(\frac{\mu_n r}{\rho_0}\right). \quad (46)$$

Коэффициент A_n находим из начальных условий

$$W(r, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_n e^{-k_n t} J_0\left(\frac{\mu_n r}{\rho_0}\right). \quad (47)$$

Умножим обе части (47) на $rJ_0\left(\frac{\mu_k r}{\rho_0}\right)$ и проин-

тегрируем обе части равенства на промежутке $[0, \rho_0]$. Тогда с учетом свойства ортогональности функций и формул для квадрата их нормы получим

$$\int_0^{\rho_0} r f(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{\rho_0}\right) dr = A_k \frac{\rho_0^2}{2} [J_0'(\mu_k)]^2. \quad (48)$$

Из (48) получим

$$A_k = \frac{2}{\rho_0^2 [J_0'(\mu_k)]^2} \int_0^{\rho_0} r f(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{\rho_0}\right) dr. \quad (49)$$

Второе начальное условие

$$\partial_t W(r, t)|_{t=0} = g(r) \quad (50)$$

дает с учетом (46)

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} (-k_n) J_0\left(\frac{\mu_n r}{\rho_0}\right). \quad (51)$$

Умножая $g(r)$ на $rJ_0\left(\frac{\mu_k r}{\rho_0}\right)$ и интегрируя аналогично предыдущему, получим

$$\int_0^{\rho_0} r g(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{\rho_0}\right) dr = (-A_k k_k) \frac{\rho_0^2}{2} [J_0'(\mu_k)]^2. \quad (52)$$

Из (52) следует

$$-A_k k_k = \frac{2}{\rho_0^2 [J_0'(\mu_k)]^2} \int_0^{\rho_0} r g(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{\rho_0}\right) dr. \quad (53)$$

Подставляя A_k из (49) в (53), получим

$$k_k = \frac{\int_0^{\rho_0} r g(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{\rho_0}\right) dr}{\int_0^{\rho_0} r f(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{\rho_0}\right) dr}. \quad (54)$$

Ограничиваясь первыми двумя членами ряда (46) запишем решение в виде

$$W(r, t) = A_1 e^{-k_1 t} J_0\left(\frac{\mu_1 r}{\rho_0}\right) + A_2 e^{-k_2 t} J_0\left(\frac{\mu_2 r}{\rho_0}\right). \quad (55)$$

Значения μ_1, μ_2 находятся по таблице нулей функций Бесселя:

$$\mu_1 = 2,4048; \mu_2 = 5,5201.$$

Тогда из (45) получаем

$$\lambda_1 = \frac{\mu_1^2}{\rho_0^2}; \quad \lambda_2 = \frac{\mu_2^2}{\rho_0^2}. \quad (56)$$

Величина радиуса лимба ρ_0 является индивидуальной геометрической характеристикой роговицы глаза конкретного человека. Значения λ выражаются через механические характеристики роговицы глаза конкретного человека. Среднее значение коэффициентов упругости и вязкости зависит от возраста:

$$\lambda_1 = \frac{k_1^2}{4a_1^2 \frac{b_1}{a_1^2}}; \quad \lambda_2 = \frac{k_2^2}{4a_2^2 \frac{b_2}{a_2^2}}. \quad (57)$$

В (57) задаем известные коэффициенты, например, $\frac{b_1}{a_1^2}, \frac{b_2}{a_2^2}$, и находим $\frac{k_1}{2a_1}, \frac{k_2}{2a_2}$ или используем

другие комбинации. На практике нужно брать значения, ближайšie к экспериментальным данным.

Поступательное движение глазного яблока под воздействием импульса воздуха. Экспериментальные наблюдения [6] показывают, что часть энергии импульсов воздуха вызывает не только деформацию роговицы, но и смещение глазного яблока как целого тела вдоль оптической оси. Отмечается, что это движение начинается с некоторым временным запаздыванием после воздействия импульса на роговицу. Это объясняется тем, что материал роговицы является двухмодульным, т. е. имеет разные модули упругости на растяжение и сжатие (рисунок 4).

Вследствие этого роговица под действием импульса воздуха деформируется в зоне действия (площади S) импульса до состояния апланации практически без сопротивления. После прохождения плоского состояния мембрана начинает работать на растяжение и испытывает сопротивление

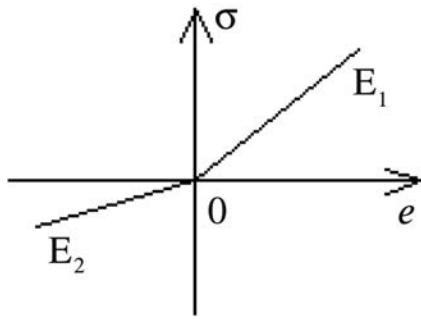


Рисунок 4 — Диаграмма нагружения для двухмодульного материала:
*E*₁ — модуль Юнга на растяжение; *E*₂ — модуль Юнга на сжатие
Figure 4 — Loading diagram for a two-module material:
*E*₁ — Young's modulus of tension; *E*₂ — Young's modulus of compression

так, что при достижении некоторой величины растяжения сопротивление дальнейшему растяжению оказывается выше сопротивления поступательному движению глазного яблока как целого вдоль оптической оси.

Рассмотрим двухмассовую модель глазного яблока, исходя из того, что передняя камера между роговицей и хрусталиком имеет структуру и физико-механические свойства, отличные от структуры и физико-механических свойств стекловидного тела. Поэтому рассмотрим модель глаза, схематически изображенную на рисунке 5.

Часть глаза *m*₂ находится в глазнице и окружена слоем жироподобного материала, обладающего свойством упругости и вязкости.

Часть глаза *m*₁, как уже было сказано выше, обладает вязкоупругими свойствами.

Граница между *m*₁, *m*₂ образована хрусталиком и мышечными тканями и в общем случае также обладает вязкоупругими свойствами.

Схема глазного яблока, учитывающая вышесеречисленные свойства, изображена на рисунке 6.

Для простоты считаем, что поверхность глазницы, по которой перемещаются *m*₁, *m*₂, абсолютно гладкая, однако не составляет труда обобщить модель с учетом сухого и жидкого трения.

Динамика поступательного движения модели глаза описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (\eta_1 + \eta_2) \dot{x}_1 - \eta_2 \dot{x}_2 + (C_1 + C_2)x_1 - C_2 x_2 &= F_1; \\ m_2 \ddot{x}_2 + (\eta_2 + \eta_3) \dot{x}_2 - \eta_2 \dot{x}_1 + (C_2 + C_3)x_2 - C_2 x_1 &= F_2; \end{aligned} \quad (58)$$

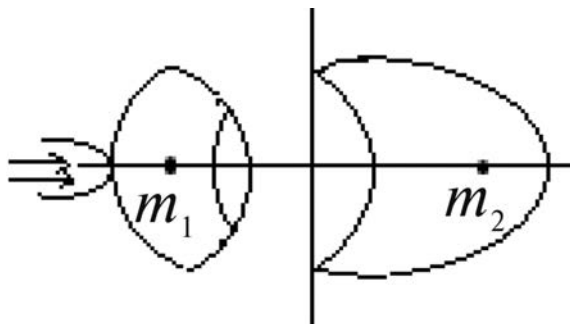


Рисунок 5 — Схема глазного яблока в виде двухмассовой системы
Figure 5 — Diagram of the eyeball as a two-mass system

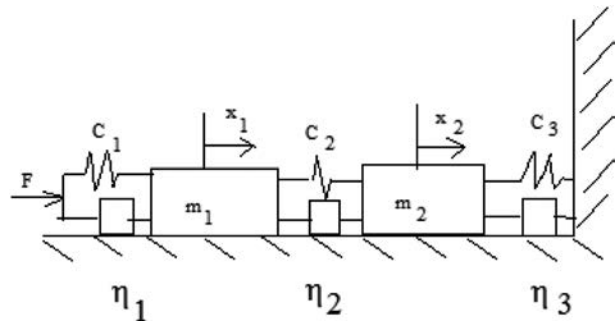


Рисунок 6 — Схема модели вязкоупругого глазного яблока:
*C*₁ — коэффициенты жесткости (упругости);
*η*₁ — коэффициенты вязкости; *m*₁, *m*₂ — масса передней и задней частей глазного яблока

Figure 6 — Diagram of the viscoelastic eyeball model:
*C*₁ — stiffness (elasticity) coefficients; *η*₁ — viscosity coefficients;
*m*₁, *m*₂ — mass of the front and back parts of the eyeball

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_1^0, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_1^0 = V_0; \\ x_2(0) &= x_2^0, \quad \dot{x}_2(0) = \dot{x}_2^0 = V_1. \end{aligned} \quad (59)$$

В векторно-матричной форме уравнения движения (58) имеют вид:

$$\begin{aligned} \hat{M} \ddot{\bar{x}} + \hat{K} \dot{\bar{x}} + Cx &= \bar{F}; \\ \hat{M} &= \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}; \quad \hat{K} = \begin{pmatrix} \eta_1 + \eta_2 & -\eta_2 \\ -\eta_2 & \eta_2 + \eta_3 \end{pmatrix}; \\ \hat{C} &= \begin{pmatrix} C_1 + C_2 & -\eta_2 \\ -\eta_2 & C_2 + C_3 \end{pmatrix}; \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда в выражениях для кинетической *T* и потенциальной *Π* энергий отсутствуют произведения *x*₁, *x*₂:

$$T = \frac{1}{2} (m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2); \quad (60)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} (C_1 x_1^2 + C_2 x_2^2). \quad (61)$$

Следовательно, *x*₁, *x*₂ являются главными (нормальными) координатами. Диссипативная функция имеет вид:

$$\Phi = \frac{1}{2} (\eta_1 \dot{x}_1^2 + 2\eta_2 \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \eta_3 \dot{x}_2^2). \quad (62)$$

Решение уравнений (58) ищется в виде:

$$x_1 = C_1 e^{st}; \quad x_2 = C_2 e^{st}. \quad (63)$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} m_1 m_2 x^4 + (m_1 \eta_2 + m_2 \eta_1) x^3 + \\ + (m_1 C_2 + m_2 C_1 + \eta_1 \eta_3 - \eta_2^2) x^2 + \\ + (C_1 \eta_3 + \eta_1 C_2) x + C_1 C_2 = 0. \end{aligned} \quad (64)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} x_1 &= -n_1 + ik_1; \quad \bar{x}_1 = -n_1 - ik_1; \\ x_2 &= -n_2 + ik_2; \quad \bar{x}_2 = -n_2 - ik_2. \end{aligned} \quad (65)$$

Решение запишем в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{-n_1 t} [A_1^{(1)} \cos k_1 t + B_1^{(1)} \sin k_1 t] + \\ &+ e^{-n_2 t} [A_1^{(2)} \cos k_2 t + B_1^{(2)} \sin k_2 t]; \\ x_2 &= e^{-n_1 t} [A_2^{(1)} \cos k_1 t + B_2^{(1)} \sin k_1 t] + \\ &+ e^{-n_2 t} [A_2^{(2)} \cos k_2 t + B_2^{(2)} \sin k_2 t]. \end{aligned} \quad (66)$$

Если сопротивление (вязкость) достаточно большое, то аperiodическое движение описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{-n_1 t} [A_1^{(1)} \cos k_1 t + B_1^{(1)} \sin k_1 t] + C_1^{(2)} e^{-n_2 t} + C_1^{(3)} e^{-n_3 t}, \\ x_2 &= e^{-n_1 t} [A_2^{(1)} \cos k_1 t + B_2^{(1)} \sin k_1 t] + C_2^{(2)} e^{-n_2 t} + C_2^{(3)} e^{-n_3 t}. \end{aligned} \quad (67)$$

Воздействие воздушного импульса на роговицу глаза и термодинамика глаза. Движение воздуха по трубке тонометра имеет ламинарный характер, определяемый параболическим профилем (рисунк 7).

Зависимость v от y имеет вид

$$v = v_c + v_0 \left(1 - \left(\frac{y}{r_0} \right)^2 \right), \quad (68)$$

где v_c — скорость пристеночная; v_0 — скорость в центре трубки.

Для турбулентного течения профиль скорости имеет вид с упрощением в центре радиуса r_0 (рисунк 8).

Зависимость v от y можно записать в виде

$$v = v_c + \begin{cases} v_0 & |y| \leq r_0 \\ v_0 \left(1 - \left(\frac{y}{r_0} \right)^2 \right) & |y| > r_0 \end{cases}. \quad (69)$$

Формула Рейнольдса дает критерий типа течения.

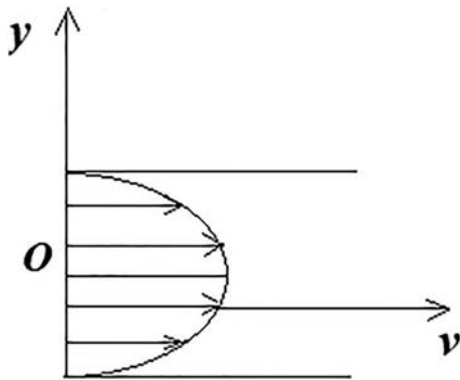


Рисунок 7 — Профиль линейной скорости при ламинарном течении
Figure 7 — Linear velocity profile for laminar flow

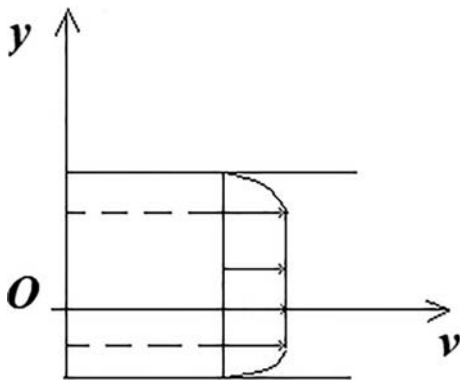


Рисунок 8 — Профиль линейной скорости при турбулентном течении
Figure 8 — Linear velocity profile for turbulent flow

В первом приближении можно заметить параболический импульс воздуха прямолинейным импульсом с некоторой средней высотой $H = \langle V \rangle$:

$$H = \frac{1}{V_{\text{шим}} - r} \int_r^r V(y) dy. \quad (70)$$

Таким образом, можем рассмотреть взаимодействие импульса воздуха с роговицей на основе решения классической задачи с применением теоремы Эйлера [7]. В этом приближении роговица представляет собой плоскость, жесткость которой определяется только внутриглазным давлением с одной стороны, а с другой стороны на эту плоскую мембрану действует импульс воздуха (рисунк 9).

Согласно теореме Эйлера [8], давление P на стенку (роговица глаза) вычисляется по формуле [9]

$$P = S \frac{\rho}{g} V^2, \quad (71)$$

где S — площадь поперечного сечения импульса ($S = \pi r^2$); ρ — плотность воздуха в струе; V — средняя скорость падения импульса на роговицу.

Под действием импульса происходит изменение состояния глаза.

Рассмотрим первый и второй законы термодинамики в рассматриваемой задаче. Можно считать, что та часть глаза, которая подвергается воздействиям внешней среды за счет связи с остальной частью глаза и организма, является открытой системой, происходящие в ней процессы обратимы. Глаз достаточно быстро после выведения его из устойчивого состояния возвращается в него, без возникновения колебательных переходных движений температурных флуктуаций.

Кратко опишем фазы, которые можно условно выделять в данном процессе.

В первой фазе под действием давления P роговица деформируется, достигает состояния апланации. Так как мембрана не оказывает сопротивления изгибу, то противодействует внешнему давлению P только внутриглазное давление P_0 . Так как при этом внутренний объем передней камеры глаза уменьшается, то должно возрасти P_0 . Это сжатие идет без изменения температуры, т. е. изотермически, внутренняя энергия изменяется за счет механической энергии сжатия,

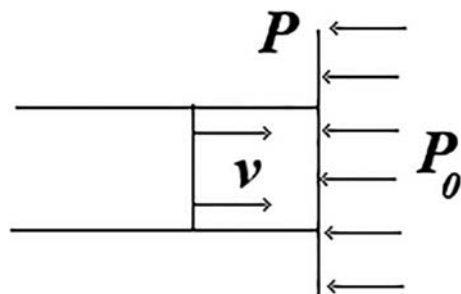


Рисунок 9 — Схема взаимодействия воздуха со стенкой-мембраной
Figure 9 — Scheme of interaction of air with the membrane wall

переноса массы. Первый закон термодинамики имеет вид

$$U_2 - U_1 = A_1 + Z_1, \quad (72)$$

где A — механическая работа сжатия; Z — энергия переноса массы.

Нет экспериментальных данных, свидетельствующих об изменении химического состава глаза под действием давления P , поэтому в (72) не входят соответствующие члены.

Вторая фаза начинается с деформации мембраны от плоского состояния до предельного вогнутого (рисунок 10).

Так как мембрана оказывает сопротивление растяжению, то в прогнутом состоянии в ней появляется напряжение τ . Прогиб W увеличивается до некоторого значения $W_{\text{пред}}$, которому соответствует растягивающееся предельное напряжение $\tau_{\text{пред}}$. Первый закон имеет вид

$$U_3 - U_2 = A_{II} + Z_{II}. \quad (73)$$

Как показывают экспериментальные данные, энергия воздушного импульса не целиком расходуется на деформацию роговицы. При достижении $W_{\text{пред}}$ глазное яблоко начинает поступательно перемещаться в глазнице как твердое тело с наложенными связями типа упруго-вязких пружин. Поэтому в третьей фазе совершается работа, а первый закон термодинамики имеет вид

$$U_4 - U_3 = A_{III} + Z_{III}, \quad (74)$$

где A_{III} — работа; Z_{III} — перенос массы.

В третьей фазе, кроме работы и переноса массы поступательного движения яблока глаза, возможно также вращательное движение глаза, о чем свидетельствуют экспериментальные данные. Это происходит, когда ось цилиндра воздушного импульса не совпадает с оптической осью глаза.

В четвертой фазе устанавливается состояние равновесия, когда силы сопротивления деформирования и движения глаза достигают предельных значений, воздушный импульс исчерпал свою энергию.

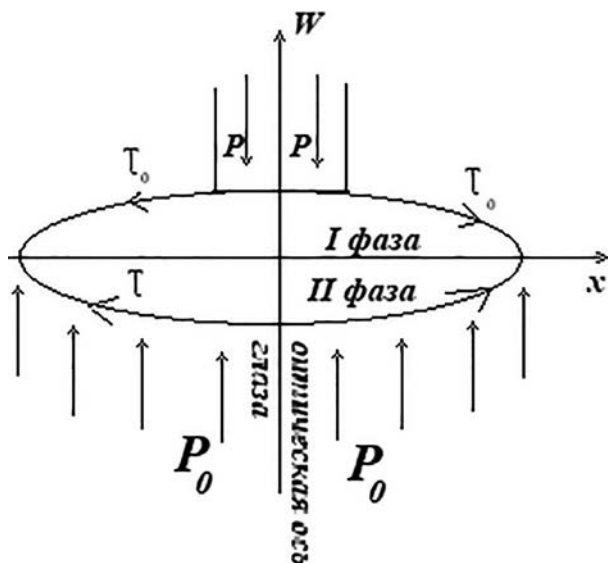


Рисунок 10 — Схема деформирования мембраны в I и II фазах
Figure 10 — Diagram of membrane deformation in phases I and II

Внутренняя энергия достигает максимума и под действием запасной внутренней энергии упругого деформирования растяжения мембраны (роговицы), мышц глаза, напряженных при поступательно-вращательном движении глаза, начинается возвращение состояния глаза в свое исходное состояние. Глазное яблоко возвращается в исходное состояние в соответствии с первым законом:

$$U_3 - U_4 = A_{IV} + Z_{IV}. \quad (75)$$

В пятой фазе роговица под действием сил напряжений растяжения τ и внутриглазного давления переходит в состояние апланации:

$$U_2 - U_3 = A_V + Z_V. \quad (76)$$

В шестой стадии под действием внутриглазного давления роговица возвращается в исходное состояние. Возможно, в этой стадии в мембране возникают растягивающие напряжения, что увеличивает жесткость мембраны и может служить для диагностики внутриглазного давления:

$$U_1 - U_2 = A_{VI} + Z_{VI}.$$

Таким образом, с термодинамической точки зрения, процесс обратимый, циклический, что подтверждает суммирование всех соотношений (72)–(77). Левая часть обращается в ноль, правая тоже, т. к. работа потенциальных сил на замкнутом пути равна нулю, а энергия переноса вещества без изменения состава также равна нулю [10].

Рассмотрим второй закон термодинамики применительно к пневмотонометрическим испытаниям глаза.

Обозначим начальное термически равновесное состояние глаза до воздействия воздушного импульса A_0 через другое термически равновесное состояние, в которое глаз переходит под воздействием воздушного импульса, через A . Энтропия, характеризующая направление течения процессов в системе при переходе из состояния A_0 в состояние A [10]:

$$S(A) = \int_{A_0}^A \frac{dQ}{T}, \quad (78)$$

где интегрирование проводится вдоль любого квазистатического процесса, связывающего состояния A и A_0 ; dQ — количество тепла, поглощаемое системой при температуре T за бесконечно малую часть всего процесса.

В дифференциальной форме

$$dS = \frac{dQ}{T}. \quad (79)$$

Используя первый закон термодинамики в форме

$$dQ = dU - dA - dZ, \quad (80)$$

получим из (79)

$$dS = \frac{1}{T}(dU - dA - dZ). \quad (81)$$

Знак над дифференциалом обозначает, что дифференцируемая функция не является полной. В нашем случае силы потенциальные и поэтому дифференциалы полные.

Предположение, что процессы, которые рассматриваются, квазистатические, оправдано, т. к. они изотермические без переноса тепла, скорость которого значительно меньше скоростей механических процессов.

Уравнение Гиббса объединяет первый и второй законы термодинамики [11]:

$$dU = TdS - pdV + \sum_i X_i dx_i. \quad (82)$$

В (82) не учитываются члены, связанные с химическими превращениями.

Последний член характеризует работу обобщенных сил.

Запишем первый и второй законы термодинамики в виде

$$\int_{A_1}^{A_2} dQ = \Delta U - A - Z, \quad \Delta U = U(A_2) - U(A_1); \quad (83)$$

$$\int_{A_1}^{A_2} \frac{dQ}{T} \leq \Delta S, \quad \Delta S = S(A_2) - S(A_1). \quad (84)$$

Процесс перехода между состояниями A_1 и A_2 может быть реализован только при выполнении неравенства (84). Таким образом, при сделанных предположениях неравенство (84) представляет собой условие возможности изменения состояния. Для циклического процесса $\Delta S = 0$, откуда следует, что если энтропию S рассмотреть как меру неопределенности, то глаз должен возвращаться в исходное состояние без каких-либо изменений в его начальном состоянии. В этом случае информация $Y = -S$ также остается неизменной и, таким образом, информация, полученная из пневмотонометрических испытаний, имеет значение для диагностики ИОР.

Вращательное плоское движение глазного яблока вокруг центра масс. Вращательные степени свободы глаза забирают часть энергии воздушного импульса, если ось трубки пневмотонометра не совпадает с оптической осью. В этом случае имеется плечо силы и возникает момент силы, под действием которого глаз в глазнице совершает вращательное движение в плоскости оптической оси и плоскости действия силы (рисунок 11).

Колебания глаза в плоскости можно описать как колебания физического маятника сферической формы вокруг оси, перпендикулярной

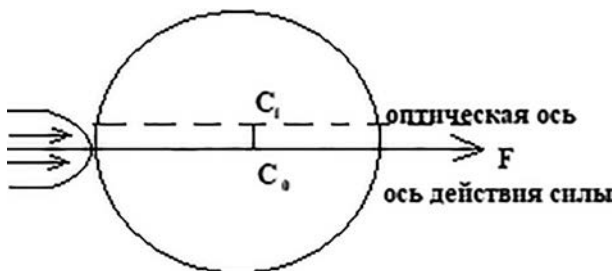


Рисунок 11 — На схеме: $C_0C_1 = d$ — плечо силы; C_1 — центр масс
Figure 11 — In the scheme: $C_0C_1 = d$ — arm of force; C_1 — center of mass

плоскости и проходящей через точку C_1 . Будем считать колебания малыми, описываемыми вязкоупругой моделью.

Уравнение колебаний должно описывать восстановление положения глаза после его поворота на некоторый угол под воздействием момента силы.

В общем случае уравнение вращательного движения глаза имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \left(Y_z \frac{d\varphi}{dt} \right) + 2\alpha \frac{d\varphi}{dt} + mgd\varphi = f(t), \quad (85)$$

где Y_z — момент инерции глаза относительно оси C_1 ; z, α — коэффициент вязкости; m — масса; g — ускорение свободного падения; d — расстояние C_0C_1 ; $f(t)$ — момент силы, создаваемый воздушным импульсом.

Здесь учитывается, что форма глаза при воздействии импульса воздуха меняет свою форму сравнительно незначительно. Поэтому в данном случае $Y_z = \text{const}$.

В начальный момент времени

$$\varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0. \quad (86)$$

Преобразуем уравнение (85) к виду, удобному для решения:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2n \frac{d\varphi}{dt} + k^2\varphi = Q(t), \quad (87)$$

$$2n = \frac{\alpha}{Y_z}, \quad k^2 = \frac{mgd}{Y_z}, \quad Q(t) = \frac{f(t)}{Y_z}.$$

Решение уравнения (85) при условии (86) имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{Y_z k^*} \int_0^t Q(t_1) e^{-n(t-t_1)} \sin k^*(t-t_1) dt_1, \quad (88)$$

$$k^* = \sqrt{k^2 - n^2}.$$

Пусть сила действия воздушного импульса примерно постоянна на интервале $t_1 = 0$ и $t = t_1 + \tau$, тогда (87) преобразуется к виду

$$\varphi = \frac{Q}{ak^*} \int_0^t e^{-n(t-t_1)} \sin k^*(t-t_1) dt_1 =$$

$$= \frac{Q}{ak^*} \frac{k^*}{n^2 + (k^*)^2} \left\{ 1 - e^{-nt} \left(\frac{n}{k^*} \sin k^* t + \cos k^* t \right) \right\} = (89)$$

$$= \frac{Q}{c} \left\{ 1 - e^{-nt} \left(\frac{n}{k^*} \sin k^* t + \cos k^* t \right) \right\}.$$

Отклонение угла φ происходит в течение времени действия τ силы $Q, t \leq \tau$.

Максимальное отклонение глаза находится из уравнения, получаемого на основе (87)

$$\dot{\varphi} = \frac{Q}{c} \left\{ e^{-nt} (n \cos k^* t - k^* \sin k^* t) + \right.$$

$$\left. + n e^{-nt} \left(\frac{n}{k^*} \sin k^* t + \cos k^* t \right) \right\}. \quad (90)$$

Условие максимума отклонения, когда вращение глаза останавливается перед тем, как начать

возвратное движение в нормальное положение (обратно), имеет вид $\dot{\phi} = 0$, тогда получим

$$e^{-nt} \sin k^* t = 0. \quad (91)$$

Или при конечном t получим

$$e^{-nt} \sin k^* t = 0, \quad t = \frac{\pi}{k^*}. \quad (92)$$

Из (92) следует, что максимальное отклонение глаза достигается при $t = \frac{T^*}{2}$, т. е. в том случае, когда промежуток времени t равен половине периода T^* затухающих колебаний.

Коэффициент динамичности λ для $\tau \geq \frac{T^*}{2}$:

$$\lambda = 1 + e^{-\frac{nT^*}{2}}.$$

После прекращения действия воздушного импульса глаз возвращается в исходное состояние под действием вязкоупругих связей (мышц), приложенных к главному яблоку. При этом движение глаза описывается уравнением свободного движения, которое имеет вид

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + 2n \frac{d\phi}{dt} + k^2\phi = 0. \quad (93)$$

В качестве начальных условий возьмем

$$\phi(\tau) = \phi_{\max}, \quad \dot{\phi}(\tau) = 0. \quad (94)$$

Экспериментальные данные показывают, что возвращение глаза в нормальное состояние происходит без колебательных движений.

Решение (93) с начальными условиями (94) имеет вид

$$\phi = \phi_{\max} e^{-n(t-\tau)} \left(\cos k^*(t-\tau) + \frac{n}{k^*}(t-\tau) \right). \quad (95)$$

При возврате состояния глаза в исходное состояние в некоторый момент $t = t_{\text{кон}}$ угол поворота глаза должен быть равен нулю. Запишем (95) при $t = t_{\text{кон}}$:

$$\phi = \phi_{\max} e^{-n(t_{\text{кон}}-\tau)} \left(\cos k^*(t_{\text{кон}}-\tau) + \frac{n}{k^*}(t_{\text{кон}}-\tau) \right). \quad (96)$$

Уравнение (96) при заданных k^* , n является уравнением относительно $t_{\text{кон}}$.

В случае, если задан момент вращения, когда глаз возвращается в исходное состояние, например $t_{\text{кон}} = T^*$, то уравнение (96) представляет собой уравнение относительно k^* и n , т. е. параметров, определяющих упругость и вязкость элементов глаза при вращательном движении.

Из (96) получаем

$$1 = -\frac{n}{k^*} t g k^*(t_{\text{кон}} - \tau) \quad (97)$$

или

$$t g k^*(t_{\text{кон}} - \tau) = \frac{k^*}{n}. \quad (98)$$

Трансцендентное уравнение решается графически (рисунок 12):

$$\frac{k^*}{n} = 1, \quad k^*(\tau - t_{\text{кон}}) = \frac{\pi}{4}, \quad t_{\text{кон}} = \frac{k^* \tau - \frac{\pi}{4}}{k^*}.$$

Если процессы циклов деформирования роговицы, поступательного и вращательного движения известны, то тогда возникает задача идентификации упругих и вязких коэффициентов элементов глаза. Эти коэффициенты могут быть определены и соответствуют модели поведения глаза как деформируемого твердого тела, пассивно совершающего механическое движение под действием воздушного импульса. Однако на самом деле глаз такая адаптивная система, меняющая свои оптические, механические свойства в зависимости от решаемых задач. Очевидно, что и реакция глаза на внешнее механическое воздействие будет адаптивной, что выражается в способности живых биологических структур управлять своими упругими и вязкими свойствами.

Глаз под действием воздушного импульса, воздействующего на роговицу, старается уменьшить возможность повреждающего действия счет распределения энергии по степеням свободы. Часть энергии совершает работу по деформированию роговицы, часть энергии идет на совершение работы поступательного перемещения глаза вдоль оптической оси и часть на вращательное движение. Когда энергия воздушного импульса исчерпана, глаз автоматически возвращается в исходное состояние, при этом энергия внешнего воздействия, запасенная за счет упругости элементов глаза, расходуется на совершение работы по восстановлению упругости формы.

Рассмотренная модель глаза как пассивной системы [11], работающей в автоматическом режиме, применима для тестовых воздействий простых типов. Однако глаз, как биологическая система, относится к системам решаемым и адаптивным [1], поэтому математическая модель глаза должна иметь вид системы уравнения [3].

Предложенная модель пассивного поведения глаза может служить для решения задач диагностики внутриглазного давления, т. е. более точно оценивает энергетический баланс внешнего воздействия.

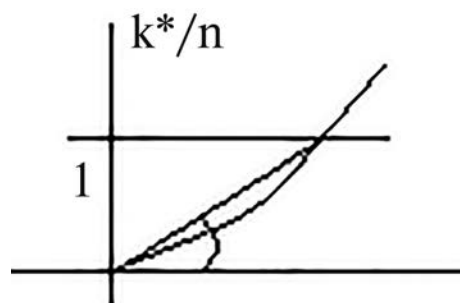


Рисунок 12 — Графическое решение трансцендентного уравнения
Figure 12 — Graphical solution of the transcendental equation

Заклучение. Получена математико-механическая модель динамики глазного яблока под воздействием импульса воздуха, излучаемого пневмотонометром. Энергия импульса деформирует роговицу до состояния, когда она оказывает сопротивление и тело глаза начинает двигаться как целое поступательно и испытывает вращательные движения за счет несоосности объема воздушного импульса и оптической оси, экспериментальные измерения суммарных и составляющих смещений глазного яблока дают результат возвращения глаза в исходное состояние. Это делает целесообразным применение рассматриваемой вязкоупругой модели глазного яблока.

Список литературы

1. Горшков, А.М. Биомеханика глаз при их вынужденных и собственных колебаниях: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.08 [Электронный ресурс] / А.М. Горшков. — Саратов, 2008. — 93 с. — Режим доступа: <http://www.dissertat.com/content/biomekhanika-glaz-pri-ikh-vynuzhdennykh-i-sobstvennykh-kolebaniyakh#ixzz2CEC1zc9U>. — Дата доступа: 11.06.2019.
2. Гундорова, Р.А. Современная офтальмотравматология / Р.А. Гундорова, А.В. Степанов, Н.Ф. Курбанова. — М.: Медицина, 2007. — 256 с.
3. Глаз [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%BB%D0%B0%D0%B7>. — Дата доступа: 10.06.2019.
4. Дубровский, В.И. Биомеханика / В.И. Дубровский, В.Н. Федорова. — М.: ВЛАДОС-ПРЕСС, 2004. — 672 с.
5. Клиническая физиология зрения: очерки / под ред. А.М. Шамшиновой. — М.: Изд-во Андреева Т.М., 2006. — 956 с.
6. Коскас, Г. Комплексная диагностика патологии глазного дна / Г. Коскас, Ф. Коскас, А. Зурдан; пер. с фр. М.П. Гринштейн; под общ. ред. В.В. Нероева, М.В. Рябиной. — М.: Практическая медицина, 2007. — 496 с.
7. Механизмы аккомодации [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://doktor-glaz.com/>. — Дата доступа: 09.06.2019.
8. Об энергозатратах глаза при чтении / С.М. Бауэр [и др.] // Биомеханика глаза-2009: сб. тр. конф. — М., 2009. — С. 3–6.
9. Бауэр, С.М. Оценка влияния формы роговицы и склеры на показатели внутриглазного давления / С.М. Бауэр, Е.Б. Воронкова, А.С. Тиясев // Биомеханика глаза-2009: сб. тр. конф. — М., 2009. — С. 94–97.
10. О математическом моделировании измерения внутриглазного давления притонетрии по методу Маклакова / С.М. Бауэр [и др.] // Биомеханика глаза-2005: сб. тр. конф. — М., 2005. — С. 121–122.
11. О влиянии толщины роговицы на показатели внутриглазного давления при измерении ВГД аппланационными методами / С.М. Бауэр [и др.] // Биомеханика глаза-2007: сб. тр. конф. — М., 2007. — С. 119–124.
12. Иомдина, Е.Н. Биомеханическая модель глаза человека как основа для изучения его аккомодационной способности / Е.Н. Иомдина, М.В. Полоз // Российский журнал биомеханики. — 2010. — Т. 14, № 3(49). — С. 7–18.

CHIGAREV Anatoliy V., D. Sc. in Phys. and Math.

Professor of the Department of Theoretical and Applied Mechanics¹

E-mail: chigarev@rambler.ru

MIKHNOVICH Maya O.

Assistant of the Department “Intellectual and Mechatronic Systems”²

E-mail: mihnovich.m@bntu.by

¹Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

²Belarusian National Technical University, Minsk, Republic of Belarus

Received 02 July 2019.

SIMULATION OF EYE BIOMECHANICS IN PNEUMOTONOMETRIC TESTS USING METHOD OF SUPERPOSITION OF MOVEMENTS AND DEFORMATIONS OF A VISCOELASTIC BODY

Arbitrary points of the surface of the cornea due to deformation wavelike move almost from the center of the pupil along the radius of the eye, and the energy is distributed in the form of a wave with a rapidly damped amplitude. Studies reveal microvibration movements of the eye shell due to blood circulation in the microcirculation vessels of the eye. This makes it possible to allocate the maximum pressure in the systole phase and the minimum pressure in the diastole phase. The soft shell in the initial (unloaded) state does not have its own shape. Under the action of internal pressure, the soft shell takes the form corresponding to the largest volume. In this case, tensile stresses occur in the shell material, forming a self-balanced system together with the internal environment, in which the forming shell is stretched, and the internal environment (liquid, gel) is compressed. At any external influences and loadings, due to excessive pressure, only tensile stresses arise. Thus, the internal pressure gives the membrane the necessary structural rigidity.

Keywords: simulation, biomechanics, pneumotonometer, movement, deformation, viscoelasticity, model, cornea, impulse, membrane

References

1. Gorshkov A.M. *Biomekhanika glaz pri ikh vynuzhdennykh i sobstvennykh kolebaniyakh*. Diss. kand. fiz.-mat. nauk [Biomechanics of the eye during their forced and natural vibrations. D. Sc. Thesis]. Saratov, 2008. 93 p.
2. Gundorova R.A., Stepanov A.V., Kurbanova N.F. *Sovremennaya oftalmotravmatologiya* [Modern ophthalmic traumatology]. Moscow, Meditsina Publ., 2007. 256 p.
3. *Glaz* [Eye]. Available at: <http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%BB%D0%B0%D0%B7> (accessed 10 June 2019).
4. Dubrovskiy V.I., Fedorova V.N. *Biomekhanika* [Biomechanics]. Moscow, VLADOS-PRESS Publ., 2004. 672 p.
5. Shamshinova A.M. *Klinicheskaya fiziologiya zreniya: ocherki* [Clinical physiology of vision: essays]. Moscow, T.M. Andreeva Publ., 2006. 956 p.
6. Coscas G., Coscas F., Zourhani A. *Kompleksnaya diagnostika patologii glaznogo dna* [Comprehensive diagnostics of fundus pathology]. Moscow, Prakticheskaya meditsina Publ., 2007. 496 p.
7. *Mekhanizmy akkomodatsii* [Mechanisms of accommodation]. Available at: <http://doktor-glaz.com/> (accessed 09 June 2019).
8. Bauer S.M., Begun P.I., Lamminpiya A.M., Shelepin Yu.E. Ob energozatratakh glaza pri chtenii [About the energy consumption of the eye when reading]. *Biomekhanika glaza 2009* [Eye biomechanics 2009], Moscow, 2009, pp. 3–6.
9. Bauer S.M., Voronkova E.B., Tipyasev A.S. Otsenka vliyaniya formy rogovitsy i sklery na pokazateli vnutriglaznogo davleniya [Assessment of the influence of the shape of the cornea and sclera on intraocular pressure indicators]. *Biomekhanika glaza 2009* [Eye biomechanics 2009], Moscow, 2009, pp. 94–97.
10. Bauer S.M., Zimin B.A., Kolezhuk U.N., Kachanov A.B., Libimov G.A. O matematicheskom modelirovanii izmereniya vnutriglaznogo davleniya pritonometrii po metodu Maklakova [On the mathematical modeling of measuring intraocular pressure of pathometry by the Maklakov method]. *Biomekhanika glaza 2005* [Eye biomechanics 2005], Moscow, 2005, pp. 121–122.
11. Bauer S.M., Kachanov A.B., Semenov B.N., Slesoraytite E. O vliyanii tolshchiny rogovitsy na pokazateli vnutriglaznogo davleniya pri izmerenii VGD applanatsionnymi metodami [On the effect of corneal thickness on intraocular pressure indicators when measuring IOP by applanation methods]. *Biomekhanika glaza 2007* [Eye biomechanics 2007], Moscow, 2007, pp. 119–124.
12. Iomdina E.N., Poloz M.V. Biomekhanicheskaya model glaza cheloveka kak osnova dlya izucheniya ego akkomodatsionnoy sposobnosti [Biomechanical model of the human eye as a basis for studying its accommodation ability]. *Rossiyskiy zhurnal biomekhaniki* [Russian Journal of Biomechanics], 2010, vol. 14, no. 3(49), pp. 7–18.