

УДК 539.3

А.Г. КОЗЕЛ, магистр техн. наук

старший преподаватель кафедры «Строительная механика»

E-mail: kostjaschka2009@mail.ru

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 27.01.2021.

СРАВНЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ИЗГИБА ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН НА ОСНОВАНИЯХ ВИНКЛЕРА И ПАСТЕРНАКА

Приведены решения задач об осесимметричном изгибе упругой трехслойной круговой пластины на основаниях Винклера и Пастернака. Несущие слои приняты изотропными, для них выполняются гипотезы Кирхгофа. В достаточно толстом легком несжимаемом по толщине заполнителе справедлива модель Тимошенко. Цилиндрическая система координат, в которой приводятся постановки и решения краевых задач, связана со срединной плоскостью заполнителя. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. Система дифференциальных уравнений равновесия получена вариационным методом. Сформулированы три типа граничных условий. Для описания реакции упругого основания используются одно- и двухпараметрические модели Винклера и Пастернака. Решение краевой задачи сведено к нахождению трех искоемых функций — прогиба пластины, сдвига и радиального перемещения в заполнителе. Общее аналитическое решение краевой задачи в случае модели Пастернака выписано в функциях Бесселя. При основании Винклера известное решение приведено в функциях Кельвина. Выполнено численное сравнение перемещений и напряжений, полученных по обеим моделям при равномерно распределенной нагрузке и жесткой заделке контура пластины.

Ключевые слова: *трехслойная круговая пластина, упругость, изгиб, напряженно-деформированное состояние, основания Пастернака и Винклера*

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2021-1-54-30-37>

Введение. Слоистые конструкции, в том числе трехслойные, при относительно небольшой массе сочетают в себе не только высокую изгибную жесткость и прочность, но и способны противостоять тепловым, химическим, радиационным и некоторым другим негативным воздействиям. Благодаря этому они нашли широкое применение в аэрокосмическом комплексе, машиностроении, приборостроении и строительстве. Конструктивно трехслойные системы состоят из внешних прочных слоев малой толщины, между которыми помещается относительно толстый заполнитель. Более легкий, хотя и менее прочный, он обеспечивает совместную работу и устойчивость всей системы.

Основы теории слоистых элементов конструкций были заложены еще в начале прошлого столетия [1, 2]. На сегодняшний день издано несколько десятков тысяч работ, посвященных этой тематике, однако и сейчас область исследований популярна и продолжает развиваться. Разработке общей теории деформирования слоистых элементов конструкций под действием квазистатических и динамических нагрузок посвящены монографии [3, 4].

Решению проблем практического использования композиционных материалов в тонкостенных конструкциях посвящена монография [5]. Рас-

смотрен ряд задач по устойчивости и колебаниям однослойных, трехслойных и слоистых оболочек, подкрепленных ребрами жесткости и упругими цилиндрами, выведены соответствующие дифференциальные уравнения и предложены методы их решения.

В монографии [6] получены решения ряда задач термоупругости для слоистых конструкций. Изучены различные аспекты, возникающие при исследовании напряжений в слоях под действием теплового потока. Также влиянию температурного поля на деформирование трехслойных стержней, пластин и оболочек посвящены работы [7–9].

Деформирование упругих и упругопластических трехслойных стержневых элементов конструкций при однократных и квазистатических переменных нагрузках в терморadiационных полях рассмотрено в монографии [10]. Предложены постановки ряда краевых задач и их аналитические решения, выполнен численный параметрический анализ напряженно-деформированного состояния трехслойных стержней при комплексных силовых, тепловых и радиационных воздействиях.

В работах [11–12] рассмотрено осесимметричное и неосесимметричное деформирование трехслойной пластины в своей плоскости.

В статьях [13–14] исследовано влияние сжимаемости заполнителя на напряженно-деформированное состояние трехслойных круговых и прямоугольных пластин.

Целое направление исследований слоистых конструкций посвящено моделированию и расчету трехслойных стержней, оболочек и пластин, связанных с деформируемым основанием. В течение долгого времени единственной расчетной моделью для основания была однопараметрическая модель Винклера. В монографии [15] приведены постановки и решения ряда задач статики для упругих и упругопластических трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием Винклера. Рассмотрено воздействие равномерно распределенных, локальных и погонных нагрузок. Деформирование композитной пластины локальными нагрузками исследовано в статье [16].

В статьях [17–18] рассмотрены собственные и вынужденные колебания трехслойных пластин, связанных с упругим основанием Винклера и находящихся под действием гармонических, импульсных и резонансных нагрузок. Кинематика деформирования принята соответствующей гипотезам ломаной линии, решения построены в виде разложения в ряд по системе собственных ортонормированных функций. Изучены частоты собственных колебаний при различных граничных условиях.

Анализ полномасштабных экспериментов с плитами на упругом основании показал, что использование модели основания Пастернака при описании деформирования конструкции позволяет добиться более точного определения перемещений, чем использование модели Винклера [19].

В статье [20] исследовали нелинейный изгиб двухслойных ортотропных прямоугольных листов графена на двухпараметрическом основании под действием поперечных нагрузок. Дифференциальные нелинейные уравнения в частных производных решены численно методом дифференциальных квадратур. Рассмотрено влияние геометрии пластины, граничных условий, жесткость упругого основания.

В работе [21] исследовали геометрически нелинейное деформирование функционально-градиентной кольцевой пластины с двумя пьезоэлектрическими слоями, связанной с основанием Пастернака.

В статье [22] исследованы колебания прямоугольных сэндвич-пластин, опирающихся на упругое основание Пастернака при различных граничных условиях. Предполагалось, что пластина изготовлена из керамического основного слоя с металлическим или керамическим покрытием с экспоненциально-градиентным материалом. Исследовано влияние параметра неоднородности, толщины и характеристик основания на собственные частоты и критические характеристики устойчивости. Колебания круговых трехслойных металлополимерных пластин на основании Пастернака

рассматривали в [23]. В статье [24] исследованы нелинейные колебания сэндвич-пластин, состоящих из двух металлических лицевых слоев и пористого заполнителя, усиленного графеном. Пластина связана с упругим основанием Пастернака, учтена тепловая среда и демпфирование.

В статье [25] выполнен сравнительный анализ математических моделей основания фундаментных плит. Выполнен анализ результатов испытаний круглого штампа под воздействием силы и момента. Сделан вывод о необходимости использования модели упругого основания, отличной от винклеровской, и введении в расчетную схему тех частей основания, которые расположены за пределами конструкции.

Решение задачи об осесимметричном деформировании несимметричных по толщине упругих трехслойных пластин на основании Пастернака получено в работе [26–28]. Напряженно-деформированное состояние сэндвич-пластин исследовалось автором в [29]. Здесь, в отличие от предыдущих публикаций, проведено сравнение постановок и решений краевых задач для трехслойных круговых пластин, связанных с основаниями Винклера и Пастернака. При основании Винклера известное решение приведено в функциях Кельвина. В случае модели Пастернака аналитическое решение краевой задачи выписано в функциях Бесселя. Выполнено численное сравнение перемещений и напряжений, полученных по обеим моделям при равномерно распределенной нагрузке и жесткой заделке контура пластины.

Постановка краевой задачи. Рассматривается упругая трехслойная круговая пластина, покоящаяся на упругом основании (рисунок 1), находящаяся под действием осесимметричной поперечной поверхностной нагрузки $q = q(r)$. Несущие слои приняты изотропными, для которых выполняются гипотезы Кирхгофа о несжимаемости, прямолинейности и перпендикулярности нормали к деформированной срединной плоскости слоя. Для достаточно толстого легкого несжимаемого по толщине заполнителя применяется модель Тимошенко, при этом деформированная нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол ψ . Цилиндрическая система координат r, φ, z , в которой проводится

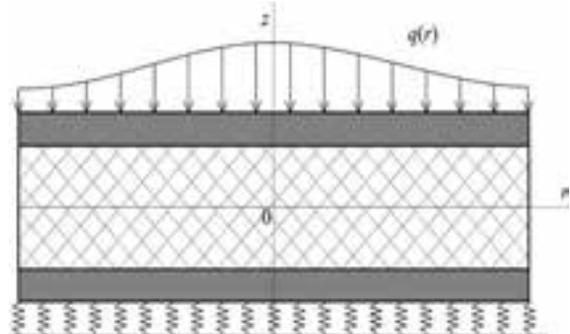


Рисунок 1 — Расчетная схема трехслойной пластины
Figure 1 — Design scheme of a three-layer plate

постановка и решение краевой задачи, связана со срединной плоскостью заполнителя. Радиальные перемещения линейно изменяются по толщине слоев, тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют $u_\varphi^{(k)} = 0$ ($k = 1, 2, 3$ — номер слоя).

Прогиб пластины w , относительный сдвиг в заполнителе ψ и радиальное перемещение координатной плоскости u не зависят от координаты φ , т. е. $w(r)$, $\psi(r)$, $u(r)$. В дальнейшем эти функции считаются искомыми. Через h_k обозначена толщина k -го слоя, $h_3 = 2c$. На контуре пластины присутствует жесткая диафрагма, препятствующая относительному сдвигу слоев. Деформации считаются малыми. На нижнюю поверхность пластины действует реакция основания q_R .

Однопараметрическая модель Винклера предполагает, что реакция основания q_R в каждой точке поверхности контакта прямо пропорциональна осадке в той же точке [15]:

$$q_R(r) = \kappa_0 w(r), \quad (1)$$

где κ_0 — коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом постели, Па/м; $w(r)$ — прогиб пластины, совпадающий с осадкой основания, м.

Практика расчетов показывает, что модель Винклера позволяет получить хорошее совпадение с действительностью при возведении фундаментов на сильносжимаемых грунтах (при $E_{гр} \leq 5$ МПа), на лессовых просадочных грунтах, а также при ограниченной толщине сжимаемых грунтов, подстилаемых практически недеформируемыми, например скальными, породами [30]. Большинство реальных оснований, например плотные и скальные грунты, имеют распределительную способность, при которой в работу вовлекаются не только непосредственно нагруженные части основания, но и области за пределами приложения нагрузки. Это требует применения более сложной математической модели деформирования основания.

Двухпараметрическая модель учитывает распределительные свойства основания, позволяя описывать не только его сжатие, но и сдвиг [31]:

$$q_R(r) = \kappa_0 w(r) - t_f \Delta w(r), \quad (2)$$

где κ_0 — коэффициент сжатия основания, Па/м; t_f — коэффициент сдвига основания, Па·м; Δ — оператор Лапласа:

$$\Delta w(r) = \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \equiv w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r}.$$

В работе Власова [32] для определения коэффициентов двухпараметрической модели основания предложены следующие формулы:

$$\kappa_0 = \frac{E_0}{1-\nu_0^2} \int_0^H \phi'(z)^2 dz; \quad t_f = \frac{E_0}{2 \cdot (1+\nu_0)} \int_0^H \phi(z)^2 dz; \quad (3)$$

$$E_0 = \frac{E_{гр}}{1-\nu_{гр}^2}; \quad \nu_0 = \frac{\nu_{гр}}{1-\nu_{гр}}$$

где $E_{гр}$, $\nu_{гр}$ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона упругого основания; $\phi(z)$ — функция поперечного распределения перемещений; H — толщина сжимаемого слоя грунта, м.

Можно видеть из формул (3), что коэффициент κ_0 характеризует работу упругого основания на сжатие и тем самым формально совпадает с коэффициентом постели Винклера (1), а коэффициент t_f определяет работу упругого основания на сдвиг.

Функция $\phi(z)$ в соответствии с условиями задачи может быть выбрана в виде [32]

$$\phi(z) = \frac{\text{sh } \gamma(H-z)}{\text{sh } \gamma H},$$

где γ — некоторый коэффициент, характеризующий быстроту затухания осадок по глубине основания.

Перейдем к математической постановке задачи. В соответствии с гипотезой прямолинейности нормали заполнителя имеем:

$$2\varepsilon_{rz}^{(3)} = u_{r,z}^{(3)} + w_{,r} = \psi(r),$$

где $\varepsilon_{rz}^{(3)}$ — сдвиговые деформации в заполнителе

Проинтегрировав это выражение и используя ранее введенные кинематические гипотезы в несущих слоях, получим следующие радиальные перемещения в слоях $u_r^{(k)}$:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,r} \quad (c \leq z \leq c + h_1); \\ u_r^{(3)} &= u + z\psi - zw_{,r} \quad (-c \leq z \leq c); \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,r} \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c), \end{aligned} \quad (4)$$

где $(u + c\psi)$ — величина смещения верхнего несущего слоя за счет деформации заполнителя; $(u - c\psi)$ — величина смещения нижнего несущего слоя; z — координата рассматриваемого волокна.

Радиальные и окружные деформации в слоях следуют из соотношений Коши и перемещений (4):

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{(1)} &= u_{,r} + c\psi_{,r} - zw_{,rr}, \quad \varepsilon_\varphi^{(1)} = \frac{1}{r}(u + c\psi - zw_{,r}), \quad \varepsilon_{rz}^{(1)} = 0; \\ \varepsilon_r^{(2)} &= u_{,r} - c\psi_{,r} - zw_{,rr}, \quad \varepsilon_\varphi^{(2)} = \frac{1}{r}(u - c\psi - zw_{,r}), \quad \varepsilon_{rz}^{(2)} = 0; \\ \varepsilon_r^{(3)} &= u_{,r} + z\psi_{,r} - zw_{,rr}, \quad \varepsilon_\varphi^{(3)} = \frac{1}{r}(u + z\psi - zw_{,r}), \quad \varepsilon_{rz}^{(3)} = \frac{1}{2}\psi. \end{aligned} \quad (5)$$

Предполагается, что связь напряжений и деформаций в слоях описывается соотношениями линейной теории упругости:

$$\begin{aligned} s_\alpha^{(k)} &= 2G_k \varepsilon_\alpha^{(k)}; \quad \sigma^{(k)} = 3K_k \varepsilon^{(k)}; \\ s_{rz}^{(3)} &= 2G_3 \varepsilon_{rz}^{(3)}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$, $s_\alpha^{(k)}$, $\varepsilon_\alpha^{(k)}$ — шаровые и девиаторные составляющие тензоров напряжений и деформаций ($\alpha = r, \varphi$); G_k — модуль сдвига; K_k — модуль объемной деформации.

Используя компоненты тензора напряжений $\sigma_\alpha^{(k)}$, введем обобщенные внутренние силы и моменты в пластине:

$$\begin{aligned} T_\alpha &\equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz; \\ M_\alpha &\equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz; \\ H_\alpha &= M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}). \end{aligned} \quad (7)$$

Если характер реакции основания q_R не оговаривается, то вид уравнений равновесия в обобщенных усилиях рассматриваемой пластины не зависит от модели упругого основания. В случае основания Винклера они получены из вариационного принципа Лагранжа в [15], при основании Пастернака — в [26]. Система уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) &= 0; \\ H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) &= 0; \\ M_{r,r} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) &= -(q - q_R). \end{aligned} \quad (8)$$

На контуре пластины ($r = R$) должны выполняться силовые граничные условия:

$$\begin{aligned} T_r &= T_r^0; \quad H_r = H_r^0; \quad M_r = M_r^0; \\ Q &= M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) = Q^0, \end{aligned} \quad (9)$$

где T_r^0, Q^0, H_r^0, M_r^0 — усилия и моменты, заданные на контуре пластины.

Подставив в закон Гука (6) деформации (4) и воспользовавшись соотношениями (7), получим выражения обобщенных усилий $T_\alpha, H_\alpha, M_\alpha$ через три искомые функции:

$$\begin{aligned} T_r &= \sum_{k=1}^3 h_k (K_k^+ u_{,r} + \frac{u}{r} K_k^-) + c(K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2) \psi_{,r} + \\ &+ c(K_1^- h_1 - K_2^- h_2) \frac{\Psi}{r} - \left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] w_{,rr} - \\ &- \left[K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] \frac{w_{,r}}{r}; \\ M_r &= \left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] u_{,r} + \\ &+ \left[K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] \frac{u}{r} + \\ &+ \left[cK_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + cK_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] \psi_{,r} + \\ &+ \left[cK_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + cK_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{\Psi}{r} - \\ &- \left[K_1^+ h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^+ h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] w_{,rr} - \\ &- \left[K_1^- h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^- h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{w_{,r}}{r}; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} H_r &= c(K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2) u_{,r} + c(K_1^- h_1 - K_2^- h_2) \frac{u}{r} + \\ &+ \left[c^2 (K_1^+ h_1 + K_2^+ h_2) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] \psi_{,r} + \\ &+ \left[c^2 (K_1^- h_1 + K_2^- h_2) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{\Psi}{r} - \\ &- \left[c \left(K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] w_{,rr} - \\ &- \left[c \left(K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{w_{,r}}{r}, \end{aligned}$$

$$\text{где } K_k^+ \equiv K_k + \frac{4}{3} G_k, \quad K_k^- \equiv K_k - \frac{2}{3} G_k.$$

Внутренние усилия с индексом «ф» следуют из соответствующих формул (10), если в них поменять местами коэффициенты K_k^+ и K_k^- .

Подставив полученные выражения (10) в уравнения (8), имеем следующую систему уравнений равновесия в перемещениях, описывающую изгиб круговой трехслойной пластины на упругом основании:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) &= 0; \\ L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) &= 0; \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) &= -(q - q_R), \end{aligned} \quad (11)$$

где коэффициенты a_i и линейные дифференциальные операторы L_2, L_3

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+; \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+); \\ a_3 &= h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ - h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+; \\ a_4 &= c^2 \left(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3} c K_3^+ \right); \\ a_5 &= c \left[h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ + h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right]; \\ a_6 &= h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) K_1^+ + \\ &+ h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+; \\ L_2(g) &\equiv \left(\frac{1}{r} (rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}; \\ L_3(g) &\equiv \frac{1}{r} (rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}. \end{aligned}$$

Краевая задача по определению перемещений в круглой пластине на упругом основании замыкается присоединением к (11) силовых (9) или кинематических граничных условий. В частности, при жесткой заделке контура пластины должны выполняться требования (при $r = R$):

$$u = 0; \quad \psi = 0; \quad w = 0; \quad w_{,r} = 0. \quad (12)$$

При шарнирном опирании контура пластины:

$$u = 0; \quad \psi = 0; \quad w = 0; \quad M_r = 0. \quad (13)$$

В случае свободного опирания контура пластины:

$$\psi = 0; T_r = 0; M_r = 0; Q = 0, \quad (14)$$

где T_r, M_r — внутренние усилия (10).

Решения краевых задач. Сформулированная краевая задача (11)–(14) различается для оснований Винклера и Пастернака использованием гипотез (1) или (2). В случае основания Винклера система дифференциальных уравнений равновесия (11) приводится к виду:

$$\begin{aligned} u_1 &= b_1 w_{1,r} + C_{11} r + \frac{C_{12}}{r}; \\ \psi_1 &= b_2 w_{1,r} + C_{13} r + \frac{C_{14}}{r}; \\ \Delta \Delta w_1 + \kappa_0 D w_1 &= q D, \end{aligned} \quad (15)$$

где $C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}$ — константы интегрирования, определяемые из граничных условий (12)–(14);

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}; \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2}; \\ D &= \frac{a_1 (a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2}. \end{aligned}$$

Здесь и далее нижний индекс 1 введен в решении для модели Винклера, индекс 2 — для модели Пастернака.

При использовании модели основания Пастернака (2) реакция основания q_R не просто линейно зависит от прогиба, но и включает оператор Лапласа, тем самым система уравнений равновесия существенно усложняется:

$$\begin{aligned} u_2 &= b_1 w_{2,r} + C_{21} r + \frac{C_{22}}{r}; \quad \psi_2 = b_2 w_{2,r} + C_{23} r + \frac{C_{24}}{r}; \\ \Delta \Delta w_2 - t_f D \Delta w_2 + \kappa_0 D w_2 &= q D, \end{aligned} \quad (16)$$

где $C_{21}, C_{22}, C_{23}, C_{24}$ — константы интегрирования, определяемые из граничных условий.

Таким образом, системы (15) и (16) отличаются наличием слагаемого « $-t_f D \Delta w$ » в третьем уравнении (16), которое учитывает влияние касательных напряжений на деформирование упругого основания. При его отсутствии системы (15) и (16) совпадают. В связи с ограниченностью искомого решения в начале координат для сплошных пластин необходимо положить $C_{12} = C_{14} = C_{22} = C_{24} = 0$.

Далее выпишем решения третьих уравнений в системах (15), (16) для прогиба, так как относительные сдвиги в заполнителях и радиальные перемещения координатной плоскости через него выражаются.

Согласно модели Винклера при равномерно распределенной нагрузке $q = q_0 = \text{const}$ решение для прогиба получено в [15] через функции Кельвина:

$$\begin{aligned} w_1 &= C_{15} \text{ber}(\kappa r) + C_{16} \text{bei}(\kappa r) + C_{17} \text{ker}(\kappa r) + \\ &+ C_{18} \text{kei}(\kappa r) + \frac{q_0}{\kappa_0}. \end{aligned} \quad (17)$$

В случае основания Пастернака прогиб получен через функции Бесселя [26]:

$$\begin{aligned} w_2 &= C_{25} J_0(\sqrt{\kappa} \kappa r) + C_{26} J_0(\sqrt{\bar{a}} \kappa r) + \\ &+ C_{27} H_0^{(1)}(\sqrt{\kappa} \kappa r) + C_{28} H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}} \kappa r) + \frac{q_0}{\kappa_0}, \end{aligned} \quad (18)$$

где a, \bar{a} — величины, выражаемые через параметры пластины и основания; $\kappa = \sqrt[4]{\kappa_0 D}$.

Так как прогиб и его первая производная в центре пластины должны быть конечными, то в решениях (17), (18) необходимо положить $C_{17} = C_{18} = C_{27} = C_{28} = 0$.

Численные результаты. Численный сравнительный анализ выполнен в математическом пакете Maple. Рассмотрена защемленная по контуру пластина единичного радиуса $R = 1$ м, слои которой набраны из материалов Д16Т – фторопласт-4 – Д16Т. Принимались: величина интенсивности поверхностной нагрузки $q_0 = -1$ МПа; толщины слоев $h_1 = h_2 = 0,04$ м, $h_3 = 0,4$ м. Механические характеристики материалов слоев заимствованы из [15]: сплав Д16Т — $G = 0,267 \cdot 10^5$ МПа, $K = 0,8 \cdot 10^5$ МПа; фторопласта-4 — $G_3 = 90$ МПа, $K_3 = 345$ МПа. Характеристики основания взяты из [33, 34]: $H = 2$ м; $E_{\text{тр}} = 0,4$ ГПа; $\nu_{\text{тр}} = 0,4$; $\gamma = 1,5$. Коэффициенты сжатия и сдвига основания вычислены по формулам (3): $\kappa_0 = 665,27$ МПа/м; $t_f = 46,43$ МПа·м.

На рисунке 2 a, b показано изменение прогиба w и сдвига в заполнителе ψ вдоль радиуса рассматриваемой пластины. При использовании двухпараметрической модели основания расчетный прогиб пластины уменьшается до 31 %. Аналогично ведет себя сдвиг в заполнителе.

Рисунок 3 иллюстрирует изменение радиальных напряжений $\sigma_r(z)$ по толщине пластины на ее контуре в зависимости от модели основания. Графики радиальных напряжений симметричны относительно срединной поверхности заполнителя в силу симметрии взятой пластины по толщине. На контуре пластины верхние части несущих слоев растянуты, заполнителя — сжаты. В склейках слоев напряжения имеют одинаковые знаки, но терпят разрыв из-за различных упругих характеристик материалов слоев. При учете коэффициента сдвига (модель Пастернака) расчетные напряжения уменьшаются до 18 %. На рисунке 3 напряжения в заполнителе визуально увеличены в 100 раз.

Выводы. Учет сдвиговых свойств основания Пастернака приводит к уменьшению, по сравнению с моделью Винклера, расчетных параметров напряженно-деформированного состояния, а, следовательно, позволяет прогнозировать увеличение ресурса трехслойных элементов конструкций, либо показывает возможность уменьшения материалоемкости слоистых несущих элементов строительных конструкций и деталей машин.

Работа выполнена при финансовой поддержке БР ФФИ (проект № T20P-047).

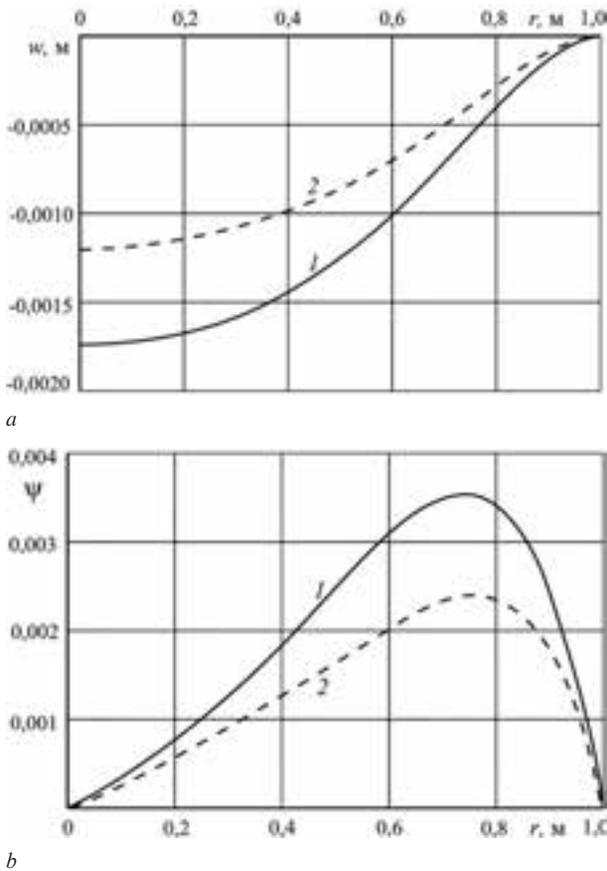


Рисунок 2 — Изменение прогиба w и сдвига в заполнителе ψ вдоль радиуса пластины: 1 — модель основания Винклера; 2 — модель Пастернака
Figure 2 — Change in deflection w and shift in a filler ψ along the radius of the plate: 1 — Winkler foundation model; 2 — Pasternak model

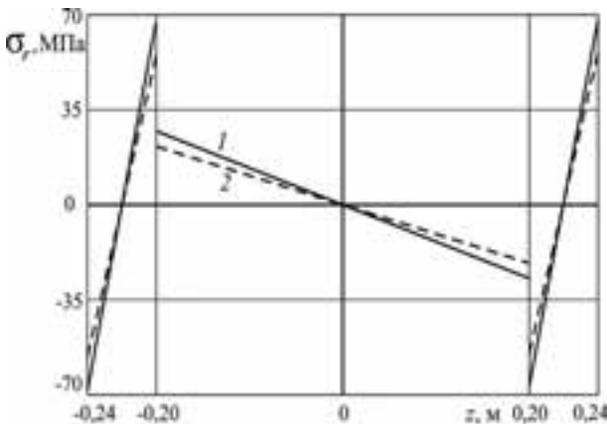


Рисунок 3 — Радиальные напряжения на контуре пластины: 1 — модель Винклера; 2 — модель Пастернака
Figure 3 — Radial stresses on the plate contour: 1 — Winkler model; 2 — Pasternak model

Список дитературы

1. Болотин, В.В. Механика многослойных конструкций / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков. — М.: Машиностроение, 1980. — 375 с.
2. Королев, В.И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс / В.И. Королев. — М.: Машиностроение, 1965. — 272 с.
3. Aghalovyan, L. Asymptotic theory of anisotropic plates and shells / L. Aghalovyan. — Singapore-London: World Scientific Publishing, 2015. — 376 p.

4. Журавков, М.А. Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности / М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов. — Минск: БГУ, 2011. — 543 с.
5. Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек / Ю.С. Соломонов [и др.]. — М: ФИЗМАТЛИТ, 2014. — 408 с.
6. Carrera, E. Thermal Stress Analysis of Composite Beams, Plates and Shells: Computational Modelling and Applications / E. Carrera, F.A. Fazzolari, M. Cinefra. — Academic Press, 2016. — 410 p.
7. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойного стержня в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. — 2013. — № 1(6). — С. 31–35.
8. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Д.В. Тарлаковский // Проблемы машиностроения и автоматизации. — 2016. — № 1. — С. 91–97.
9. Старовойтов, Э.И. Термоупругое деформирование трехслойной круглой пластины поверхностными нагрузками различных форм / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. — 2018. — № 1(42). — С. 81–88.
10. Старовойтов, Э.И. Трехслойные стержни в терморadiационных полях / Э.И. Старовойтов, М.А. Журавков, Д.В. Леоненко. — Минск: Беларус. навука, 2017. — 275 с.
11. Нестерович, А.В. Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А.В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. — 2019. — Вып. 12. — С. 152–157.
12. Нестерович, А.В. Напряжения в круговой пластине типа Тимошенко при неосесимметричном растяжении-сжатии / А.В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. — 2018. — Вып. 11. — С. 195–203.
13. Захарчук, Ю.В. Деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем / Ю.В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. — 2017. — Т. 33, № 4. — С. 53–57.
14. Зеленая, А.С. Деформирование упругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым заполнителем / А.С. Зеленая // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Естественные науки. — 2017. — № 6(105). — С. 89–95.
15. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании / Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко. — М.: Физматлит, 2006. — 379 с.
16. Старовойтов, Э.И. Деформирование локальными нагрузками композитной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, М. Сулейман // Механика композитных материалов. — 2007. — Т. 43, № 1. — С. 109–120.
17. Старовойтов, Э.И. Резонансные колебания круговых композитных пластин на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Д.В. Тарлаковский // Механика композитных материалов. — 2015. — Т. 51, № 5. — С. 793–806.
18. Старовойтов, Э.И. Колебания круговых композитных пластин на упругом основании под действием локальных нагрузок / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика композитных материалов. — 2016. — Т. 52, № 5. — С. 943–954.
19. Fwa, T.F. Use of Pasternak foundation model in concrete pavement analysis / T.F. Fwa, X.P. Shi, S.A. Tan // Journal of transportation engineering. — 1996. — Vol. 122, № 4. — Pp. 323–328.
20. Dastjerdi, S. Nonlinear bending analysis of bilayer orthotropic graphene sheets resting on Winkler-Pasternak elastic foundation based on non-local continuum mechanics / S. Dastjerdi, M. Jabbarzadeh // Composites Part B: Engineering. — 2016. — Vol. 87. — Pp. 161–175.
21. Arefi, M. Nonlinear responses of an arbitrary FGP circular plate resting on the Winkler-Pasternak foundation / M. Arefi, M.N.M. Allam // Smart Structures and Systems. — 2015. — Vol. 16, no. 1. — Pp. 81–100.
22. Sobhy, M. Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions / M. Sobhy // Composite Structures. — 2013. — Vol. 99. — Pp. 76–87.
23. Леоненко, Д.В. Колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании Пастернака / Д.В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. — 2014. — № 1. — С. 59–63.

24. Nonlinear vibration and dynamic buckling analyses of sandwich functionally graded porous plate with graphene platelet reinforcement resting on Winkler–Pasternak elastic foundation / Q. Li [et al.] // International Journal of Mechanical Sciences. — 2018. — Vol. 148. — Pp. 596–610.
25. Прудько, Е.И. Сравнительный анализ математических моделей основания фундаментных плит / Е.И. Прудько // Вестник ПДАБА. — 2012. — № 7. — С. 52–57.
26. Старовойтов, Э.И. Влияние жесткости основания Пастернака на деформирование круговой трехслойной пластины / Э.И. Старовойтов, А.Г. Козел // Проблемы машиностроения и автоматизации. — 2019. — № 2. — С. 106–113.
27. Старовойтов, Э.И. Изгиб упругой трехслойной круговой пластины на основании Пастернака / Э.И. Старовойтов, А.Г. Козел // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2018. — Т. 24, № 1. — С. 392–406.
28. Козел, А.Г. Деформированное состояние трехслойной круговой пластины, связанной с основанием Пастернака / А.Г. Козел // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. — 2018. — № 1. — С. 24–33.
29. Козел, А.Г. Влияние сдвиговой жесткости основания на напряженное состояние сэндвич-пластины / А.Г. Козел // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. — 2018. — № 6(332). — С. 25–35.
30. Механика грунтов, основания и фундаменты: учеб. пособие для вузов / С.Б. Ухов [и др.]. — М.: АСВ, 1994. — 527 с.
31. Пастернак, П.Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели // П.Л. Пастернак. — М.: Госстройиздат. — 1954. — 56 с.
32. Власов, В.З. Балки, плиты, оболочки на упругом основании / В.З. Власов, Н.Н. Леонтьев. — М.: Физматлит, 1960. — 491 с.
33. Идимешев, С.В. Расчет напряженно-деформированного состояния изотропных прямоугольных пластин на упругом основании / С.В. Идимешев // Известия Алтайского государственного университета. — 2014. — С. 53–56.
34. Трацевская, Е.Ю. Динамическая неустойчивость квазитрехосторонних моренных грунтов / Е.Ю. Трацевская // Литосфера. — 2017. — № 1(46). — С. 107–111.

KOZEL Anastasiya G., M. Sc. in Eng.

Senior Lecturer of the Department “Structural Mechanics”

E-mail: kostjaschka2009@mail.ru

Belarusian State University of Transport, Gomel, Republic of Belarus

Received 27 January 2021.

COMPARISON OF SOLUTIONS TO THE BENDING PROBLEMS OF THREE-LAYER PLATES ON THE WINKLER AND PASTERNAK FOUNDATIONS

Solutions of problems on axisymmetric bending of an elastic three-layer circular plate on the Winkler and Pasternak foundations are given. The bearing layers are taken as isotropic, for which Kirchhoff's hypotheses are fulfilled. In a sufficiently thick lightweight, incompressible in thickness aggregate, the Timoshenko model is valid. The cylindrical coordinate system, in which the statements and solutions of boundary value problems are carried out, is connected with the median plane of the filler. On the plate contour, it is assumed that there is a rigid diaphragm that prevents the relative shear of the layers. The system of differential equations of equilibrium is obtained by the variational method. Three types of boundary conditions are formulated. One- and two-parameter Winkler and Pasternak models are used to describe the reaction of an elastic foundation. The solution to the boundary value problem is reduced to finding three desired functions, plate deflection, shear, and radial displacement in the filler. The general analytical solution to the boundary value problem is written out in the case of the Pasternak model in Bessel functions. At the Winkler foundation, the known solution is given in Kelvin functions. A numerical comparison of the displacements and stresses obtained by both models with a uniformly distributed load and rigid sealing of the plate contour is carried out.

Keywords: three-layer circular plate, elasticity, bending, stress-strain state, Pasternak and Winkler foundation

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2021-1-54-30-37>

References

1. Bolotin V.V., Novichkov Yu.N. *Mekhanika mnogosloynnykh konstruksiy* [Mechanics of laminated constructions]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1980. 375 p. (in Russ.).
2. Korolev V.I. *Sloistye anizotropnye plastinki i obolochki iz armirovannykh plastmass* [Laminated anisotropic plates and shells from reinforced plastics]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1965. 272 p. (in Russ.).
3. Aghalovyan L. *Asymptotic theory of anisotropic plates and shells*. Singapore, London, World Scientific Publ., 2015. 376 p.
4. Zhuravkov M.A., Starovoitov E.I. *Mekhanika sploshnykh sred. Teoriya uprugosti i plastichnosti* [Continuum mechanics. Theory of elasticity and plasticity]. Minsk, Belorusskiy gosudarstvennyy universitet Publ., 2011. 543 p. (in Russ.).

5. Solomonov Yu.S., Georgievskiy V.P., Nedbay A.Ya., Andryushin V.A. *Prikladnye zadachi mekhaniki kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek* [Applied problems of mechanics of composite cylindrical shells]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2014. 408 p. (in Russ.).
6. Carrera E., Fazzolari F.A., Cinefra M. *Thermal stress analysis of composite beams, plates and shells: computational modeling and applications*. Academic Press, 2016. 410 p.
7. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Deformirovanie trekhslonogo sterzhnya v temperaturnom pole [Deformation of three-layer beam in a temperature field]. *Mechanics of machines, mechanisms and materials*, 2013, no. 1(6), pp. 31–35 (in Russ.).
8. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Tarlakovskiy D.V. Deformirovanie trekhslonoy krugovoy tsilindricheskoy obolochki v temperaturnom pole [Deformation of three-layer circular cylindrical shell in the thermal field]. *Engineering and automation problems*, 2016, no. 1, pp. 91–97 (in Russ.).
9. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Termouprugoe deformirovanie trekhslonoy krugloy plastiny poverkhnostnyimi nagruzkami razlichnykh form [Thermoelastic deformation of three-layer circular plate by surface loads of various forms]. *Mechanics of machines, mechanisms and materials*, 2018, no. 1(42), pp. 81–88 (in Russ.).
10. Starovoitov E.I., Zhuravkov M.A., Leonenko D.V. *Trekhslonnye sterzhni v termoradiatsionnykh polyakh* [Three-layer bars in thermoradiation fields]. Minsk, Belaruskaya navuka Publ., 2017. 275 p. (in Russ.).
11. Nestsiarovich A.V. Napryazhennoe sostoyanie krugovoy trekhslonoy plastiny pri osesimmetrichnom nagruzenii v svoey ploskosti [Stressed state of a circular three-layer plate under axisymmetric loading in its plane]. *Mechanics. Researches and innovations*, 2019, vol. 12, pp. 152–157 (in Russ.).
12. Nestsiarovich A.V. Napryazheniya v krugovoy plastine tipa Timoshenko pri neosesimmetrichnom rastyazhenii-szhatii [Stresses in a Timoshenko-type circular plate under nonaxisymmetric tension-compression]. *Mechanics. Researches and innovations*, 2018, vol. 11, pp. 195–203 (in Russ.).
13. Zakharchuk Yu.V. Deformirovanie krugovoy trekhslonoy plastiny so szhimaemym zapolnitelem [Deformation of the circular three-layer plate with a compressible filler]. *Problems of physics, mathematics and technics*, 2017, vol. 33, no. 4, pp. 53–57 (in Russ.).
14. Zelenaya A.S. Deformirovanie uprugoy trekhslonoy pryamougolnoy plastiny so szhimaemym zapolnitelem [Deformation of an elastic three-layer rectangular plate with a compressible filler]. *Proceedings of Francisk Scorina Gomel State University. Natural sciences*, 2017, no. 6(105), pp. 89–95 (in Russ.).
15. Starovoitov E.I., Yarovaya A.V., Leonenko D.V. *Deformirovanie trekhslonnykh elementov konstruktivnykh na uprugom osnovanii* [Deformation of three-layer construction elements on the elastic foundation]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 379 p. (in Russ.).
16. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Suleyman M. Deformirovanie lokalnymi nagruzkami kompozitnoy plastiny na uprugom osnovanii [Deformation of a composite plate on an elastic foundation by local loads]. *Mekhanika kompozitnykh materialov*, 2007, vol. 43, no. 1, pp. 109–120 (in Russ.).
17. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Tarlakovskiy D.V. Rezonansnye kolebaniya krugovykh kompozitnykh plastin na uprugom osnovanii [Resonance vibrations of a circular composite plates on an elastic foundation]. *Mekhanika kompozitnykh materialov*, 2015, vol. 51, no. 5, pp. 793–806 (in Russ.).
18. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Kolebaniya krugovykh kompozitnykh plastin na uprugom osnovanii pod deystviem lokalnykh nagruzk [Vibrations of circular composite plates on an elastic foundation under the action of local loads]. *Mekhanika kompozitnykh materialov*, 2016, vol. 52, no. 5, pp. 943–954 (in Russ.).
19. Fwa T.F., Shi X.P., Tan S.A. Use of Pasternak foundation model in concrete pavement analysis. *Journal of transportation engineering*, 1996, vol. 122, no. 4, pp. 323–328.
20. Dastjerdi S., Jabbarzadeh M. Nonlinear bending analysis of bilayer orthotropic graphene sheets resting on Winkler–Pasternak elastic foundation based on non-local continuum mechanics. *Composites Part B: Engineering*, 2016, vol. 87, pp. 161–175.
21. Arefi M., Allam M.N.M. Nonlinear responses of an arbitrary FGP circular plate resting on the Winkler–Pasternak foundation. *Smart structures and systems*, 2015, vol. 16, no. 1, pp. 81–100.
22. Sobhy M. Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions. *Composite Structures*, 2013, vol. 99, pp. 76–87.
23. Leonenko D.V. Kolebaniya krugovykh trekhslonnykh plastin na uprugom osnovanii Pasternaka [Vibrations of circular three-layer plates on Pasternak elastic foundation]. *Ecological bulletin of research centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2014, no. 1, pp. 59–63 (in Russ.).
24. Li Q., et al. Nonlinear vibration and dynamic buckling analyses of sandwich functionally graded porous plate with graphene platelet reinforcement resting on Winkler–Pasternak elastic foundation. *International journal of mechanical sciences*, 2018, vol. 148, pp. 596–610.
25. Prudko E.I. Sravnitelnyy analiz matematicheskikh modeley osnovaniya fundamentnykh plit [Comparative analysis of mathematical models of foundation slabs]. *Bulletin of Prydniprovskaya state academy of civil engineering and architecture*, 2012, no. 7, pp. 52–57 (in Russ.).
26. Starovoitov E.I., Kozel A.G. Vliyanie zhestkosti osnovaniya Pasternaka na deformirovanie krugovoy trekhslonoy plastiny [Influence of the stiffness of the Pasternak foundation on the deformation of a circular three-layer plate]. *Engineering and automation problems*, 2019, vol. 24, no.1, pp. 392–406 (in Russ.).
27. Starovoitov E.I., Kozel A.G. Izhib uprugoy trekhslonoy krugovoy plastiny na osnovanii Pasternaka [The bending of an elastic circular sandwich plate on the Pasternak foundation]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktivnykh*, 2018, vol. 24, no.1, pp. 392–406 (in Russ.).
28. Kozel A.G. Deformirovanoe sostoyanie trekhslonoy krugovoy plastiny, svyazannoy s osnovaniem Pasternaka [Strain state of three-layer circular plate connected to Pasternak foundation]. *Matematicheskoe modelirovanie, kompyuternyy i naturnyy eksperiment v estestvennykh naukakh*, 2018, no. 1, pp. 24–33 (in Russ.).
29. Kozel A.G. Vliyanie sdvigovoy zhestkosti osnovaniya na napryazhennoe sostoyanie sendvich-plastiny [Influence of shear strong pastner basis on the stressed state of the sandwich plate]. *Fundamental and applied problems of technics and technology*, 2018, no. 6(332), pp. 25–35 (in Russ.).
30. Ukhov S.B., et al. *Mekhanika gruntov, osnovaniya i fundamenti* [Soil mechanics, foundations and foundations]. Moscow, ASV Publ., 1994. 527 p. (in Russ.).
31. Pasternak P.L. *Osnovy novogo metoda rascheta fundamentov na uprugom osnovanii pri pomoshchi dvukh koeffitsientov posteli* [Fundamentals of a new method of elastic foundation analysis by means of two-constants]. Moscow, Gosstroyizdat Publ., 1954. 55 p. (in Russ.).
32. Vlasov V.Z., Leontev N.N. *Balki, plity, obolochki na uprugom osnovanii* [Beams, slabs, shells on an elastic foundation]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1960. 491 p. (in Russ.).
33. Idimeshev S.V. Raschet napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya izotropnykh pryamougolnykh plastin na uprugom osnovanii [Calculation of the stress-strain state of isotropic rectangular plates on an elastic foundation]. *Izvestiya of Altai State University*, 2014, pp. 53–56 (in Russ.).
34. Tratsevskaya E.Yu. Dinamicheskaya neustoychivost kvazitiksotropnykh morennykh gruntov [Dynamic instability of quasi-thixotropic moraine soils]. *Lithosphere*, 2017, no. 1(46), pp. 107–111 (in Russ.).