

УДК 539.3

Д.Е. МАРМЫШ, канд. физ.-мат. наук

доцент кафедры теоретической и прикладной механики<sup>1</sup>  
заместитель директора Совместного института ДПУ и БГУ<sup>2</sup>

E-mail: marmyshde@bsu.by

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет, г. Минск, Республика Беларусь<sup>2</sup>Даляньский политехнический университет, г. Далянь, Китайская Народная Республика

Поступила в редакцию 08.07.2020.

## ПРИМЕНЕНИЕ ЛОГИСТИЧЕСКОЙ РЕГРЕССИИ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ ТВЕРДОГО ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА

*В работе предложена модель логистической регрессии для оценки повреждаемости твердого деформируемого тела. Обучающая выборка генерируется случайным образом из равномерного распределения по области, содержащей опасный объем. Для линейной разделимости прецедентов применяется классифицирующее ядро в виде радиальной базисной функции. Оценка параметров регрессии произведена с помощью метода максимального правдоподобия, затем система нелинейных уравнений решена методом Ньютона–Рафсона. Для определения качества работы классификатора проведен ROC-анализ, который заключается в построении ROC-кривой и вычислении площади между ROC-кривой и осью специфичности модели. Для оценки адекватности работы модель логистической регрессии применена для вычисления повреждаемости полуплоскости при действии на ее границе нормально распределенной нагрузки. В работе также проанализирована устойчивость работы алгоритмов оценки параметров модели при генерации выборки обучающих прецедентов случайным образом.*

**Ключевые слова:** механика повреждаемости, машинное обучение, логистическая регрессия, логит-модель, классифицирующая функция

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2020-1-54-46-53>

**Введение.** Логистическая регрессия является одной из наиболее важных статистических моделей и методов интеллектуального анализа данных и используется для анализа и классификации как бинарных, так и многоклассовых наборов данных. Модель логистической регрессии по эффективности классификации больших наборов данных часто может превосходить такой популярный алгоритм, как метод опорных векторов [1] либо простые модели искусственных нейронных сетей [2]. Впрочем, логит-модель можно рассматривать как нейронную сеть с сигмоидальной функцией активации. Сфера практического применения логит-модели достаточно широка (кредитный скоринг, биоинформатика, статистическое моделирование в медицине, образовании и проч.) [3, 4]. Совместно с численными или численно-аналитическими методами количественной оценки напряженно-деформированного состояния твердого деформируемого тела, логит-модель может быть успешно применена и в механике повреждаемости.

Для оценки качества построенной регрессии, как правило, используют ROC-кривую (receiver operating characteristic), которая дает качественную оценку результата. Количественную интерпретацию ROC-кривой определяет показатель  $AUC$  —

площадь, заключенная между кривой и осью доли ложных положительных классификаций.

**Математическая модель повреждаемости среды.** Введем механический параметр  $\varphi$  как локальную характеристику повреждаемости среды  $\Omega$  в точке  $A$  и определим его как отношение абсолютного значения действующих напряжений  $\sigma$  в точке  $A$  к некоторому предельному напряжению  $\sigma^{(*lim)}$ , установленного для данного материала [5, 6], т. е.

$$\varphi = \frac{|\sigma|}{\sigma^{(*lim)}}. \quad (1)$$

Выделим элементарный параллелепипед со сторонами  $d_x, d_y, d_z$  с центром в точке  $A$ . Элементарный опасный объем, соответствующий точке  $A$ , примем как функцию параметра  $\varphi$ , определяемого формулой (1):

$$dV = \begin{cases} d_x d_y d_z, & \varphi \geq 1; \\ 0, & \varphi < 1. \end{cases} \quad (2)$$

Интегрирование выражения (2) по всей области  $\Omega$ , в каждой точке которой действующее напряжение  $\sigma$  превышает предельное  $\sigma^{(*lim)}$ , определит величину опасного объема, т. е.

$$V = \int_{\Omega} dV. \quad (3)$$

Таким образом получаем, что опасный объем — это величина области рассматриваемой среды, в каждой точке которой величина напряжений  $\sigma$  превышает предельные напряжения  $\sigma^{(*\text{lim})}$ . Также введем понятие повреждаемости  $\Psi$  среды как интегральную характеристику вероятности появления и дальнейшего распространения первичных разрушений среды:

$$\Psi = \int_{\Omega} \varphi dV. \quad (4)$$

Считая, что действующие напряжения  $\sigma$  определяются функцией радиус вектора  $\mathbf{x}$ , т. е.  $\sigma = f(\mathbf{x})$ , при вычислении опасного объема приходим к неравенству

$$\sigma = f(\mathbf{x}) \geq \sigma^{(*\text{lim})}. \quad (5)$$

С геометрической точки зрения функция  $\sigma^{(*\text{lim})} = f^{(*\text{lim})}(\mathbf{x})$  задает некоторую поверхность, ограничивающую область  $D \subset \mathbf{R}^m$ . С физической точки зрения область  $\Omega$  должна быть ограничена. Таким образом, при вычислении опасного объема по формулам (2)–(3) и интегральной повреждаемости по формуле (4) первоначально необходимо определить, принадлежит ли рассматриваемая точка  $A$  области  $\Omega$ , т. е. провести бинарную классификацию с одним из двух возможных ответов:

$$\delta(A) = \begin{cases} 0, & A \in \Omega, \\ 1, & A \notin \Omega. \end{cases} \quad (6)$$

При анализе повреждаемости и вычислении ее количественных показателей необходимо предварительно определить напряженно-деформированное состояние твердого деформируемого тела. Для расчета распределения полей напряжений и деформаций под действием внешних нагрузок будем применять модифицированный метод граничного элемента, развитый в работах [6, 7]. Далее по известному напряженно-деформированному состоянию в работе [6] был предложен следующий алгоритм количественной оценки повреждаемости среды в пространственном случае:

- определение границ области  $D$ , в которой содержится опасный объем  $\Omega$ ;
- построение по области  $D$  регулярной ортогональной расчетной сетки с шагами  $d_x, d_y, d_z$  вдоль трех координатных осей соответственно;
- расчет напряжений  $\sigma(A_i)$  в каждой точке  $A_i$  расчетной сетки, являющейся центром параллелепипеда со сторонами  $d_x, d_y, d_z$ ;
- определение количества точек  $N$ , в которых действующие напряжения превышают предельные;
- опасный объем  $V$  и интегральная повреждаемость  $\Psi$  определяются по формулам:

$$V = N \frac{d_x \cdot d_y \cdot d_z}{V_D}; \quad \Psi = \sum_{i=1}^N \frac{\sigma(A_i)}{\sigma^{(*\text{lim})}} d_x \cdot d_y \cdot d_z, \quad (7)$$

где  $V_D$  — объем области  $D$ .

Чем точнее необходимо получить величины повреждаемости, тем более детальную гранично-эле-

ментную и расчетную сетку по области  $D$  необходимо строить. В силу громоздкости аналитических формул модифицированного метода граничного элемента использование вышеописанного алгоритма требует затрат значительного машинного времени на вычислительные процедуры, в том числе при определении напряженного состояния в точках, которые не принадлежат опасному объему.

Основная идея применения модели логистической регрессии состоит в аппроксимации композиции функций расчета напряжений в точке среды и функции (6) логит-функцией, которая будет определять вероятность попадания точки  $A$  в опасный объем  $\Omega$ .

**Модель логистической регрессии.** Рассмотрим обучающую выборку (выборку прецедентов):

$$(\mathbf{x}_i, \delta_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

где  $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im})^T$  — вектор значений  $i$ -го объекта;  $\delta_i = \{0, 1\}$  — бинарная переменная, указывающая на принадлежность  $i$ -го объекта соответствующему классу и определяемая формулой (6).

Как правило, логистическая регрессия определяет вероятность в интервале  $(0, 1)$  принадлежности вектора набора данных  $\mathbf{x} = (1, x_1, x_2, \dots, x_m)^T$  одной из двух категорий [8]:

$$P(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \frac{1}{1 + \exp\left(-\alpha_0 - \sum_{j=1}^m \alpha_j x_j\right)}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{a} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m)^T$  — вектор коэффициентов.

Пороговым значением для бинарного определения принадлежности классу является значение  $P(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0,5$ . Для оценки вектора коэффициентов  $\mathbf{a}$  воспользуемся методом максимального правдоподобия, который приведет к задаче максимизации логарифма правдоподобия и эквивалентной задаче минимизации функции [9]:

$$Q(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^N \ln \left[ 1 + \exp\left(-\alpha_0 \delta_i - \delta_i \sum_{j=1}^m \alpha_j x_{ij}\right) \right] \rightarrow \min_{\mathbf{a} \in \mathbf{R}^m}. \quad (9)$$

Частные производные функции  $Q(\mathbf{a})$  равны:

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_k} = - \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i x_{ik} \exp\left(-\alpha_0 \delta_i - \delta_i \sum_{j=1}^m \alpha_j x_{ij}\right)}{1 + \exp\left(-\alpha_0 \delta_i - \delta_i \sum_{j=1}^m \alpha_j x_{ij}\right)}, \quad (10)$$

$$k = 1, \dots, m.$$

Из решения задачи (9)–(10) определяются коэффициенты вектора  $\mathbf{a}$ , с помощью которого в общем случае описывается уравнение разделяющей обучающую выборку гиперплоскости:

$$\alpha_0 + \sum_{j=1}^m \alpha_j x_j = 0. \quad (11)$$

Отметим, что уравнение гиперплоскости (11) является линейным уравнением, соответственно, выборка прецедентов должна быть линейно разде-

лима. В случае линейной неразделимости выборки в вектор набора данных  $\mathbf{x} = (1, x_1, x_2, \dots, x_m)^T$  вводят дополнительную компоненту, которая определяется функцией классификации.

Аналитически задача (9)–(10) не решается. Для численной оценки вектора параметров применяется итерационный алгоритм Ньютона–Рафсона, который состоит в следующем. В качестве нулевого приближения можно взять решение задачи классификации методом многомерной линейной регрессии [8]:

$$\mathbf{\alpha}^{(0)} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \mathbf{Y}),$$

где матрица  $\mathbf{X} = (x_{ij})_{m \times N}$ .

Затем начинается итерационный процесс, на  $k$ -м шаге которого уточняется вектор коэффициентов  $\mathbf{\alpha}^{(k)}$ :

$$\mathbf{\alpha}^{(k)} = \mathbf{\alpha}^{(k-1)} - h_k \left[ \mathbf{Q}''(\mathbf{\alpha}^{(k-1)}) \right]^{-1} \left[ \mathbf{Q}'(\mathbf{\alpha}^{(k-1)}) \right],$$

где  $\mathbf{Q}'(\mathbf{\alpha}^{(k)})$  — градиент функционала  $Q(\mathbf{\alpha})$  в точке  $\mathbf{\alpha}^{(k)}$ ;  $\mathbf{Q}''(\mathbf{\alpha}^{(k)})$  — гессиан функционала  $Q(\mathbf{\alpha})$

в точке  $\mathbf{\alpha}^{(k)}$ ;  $h_k$  — величина шага итерационного процесса.

Таким образом, применение логит-модели к вычислению показателей повреждаемости твердого тела можно представить в виде следующего алгоритма действий:

1. Определение границ области  $D \subset \mathbf{R}^m$ , такой, что повреждаемая область  $\Omega$  должна содержаться в  $D$ , т. е.  $\Omega \subset D$ .

2. Генерация множества размера  $n$  расчетных точек из области  $D$ . Множество может формироваться случайным образом (как это использовано в данной статье) либо быть упорядоченным по какому-либо признаку.

3. Для множества расчетных точек провести бинарную классификацию на принадлежность к повреждаемой области по формуле (6).

4. Формирование обучающей выборки  $(\mathbf{x}_i, \delta_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$  и оценка коэффициентов логит-модели.

5. Оценка качества построенной логит-модели.

6. В случае удовлетворительного качества, генерация множества  $\bar{N}$  ( $\bar{N} \gg N$ ) и применение логит-модели для количественной оценки повреждаемости твердого тела.

**Вычисление показателей повреждаемости.**

Для демонстрации работоспособности предлагаемого подхода определим повреждаемость полуплоскости для двух модельных задач. Рассмотрим напряженное состояние полуплоскости при действии на ее границе двух наиболее распространенных в механике контакта законов распределения, для которых существуют известные формулы определения компонент напряженного состояния [10–12]. При несогласованном контактом взаимодействия давление распределено по отрезку соприкосновения двух тел по закону [12]:

$$q(x) = q_0 \sqrt{1 - x^2/a^2}, \quad (12)$$

где  $q_0$  — давление в центре отрезка, по которому взаимодействуют тела;  $a$  — полуудлина отрезка.

При вдавливании абсолютно жесткого прямоугольного штампа в упругую полуплоскость контактное давление распределено по закону [12]:

$$q(x) = q_0 / \sqrt{1 - x^2/a^2}, \quad (13)$$

где  $q_0$  — давление в центре отрезка под штампом;  $a$  — полуудлина стороны штампа, которая вдавливается в полуплоскость.

Необходимо определить показатели повреждаемости от действия нормальных давлений (12) и (13) по эквивалентным напряжениям (по Мизесу)  $\sigma_{\text{equiv}}$ . В качестве предельного напряжения  $\sigma^{(\text{lim})}$  примем  $\sigma^{(\text{lim})} = 0,09q_0$  [13]. Обучающая выборка размера  $N$  для оценки параметров логистической регрессии формируется случайным образом. Затем в каждой точке  $A(x_i, y_i)$  ( $i = 1, \dots, N$ ) полуплоскости определяются все компоненты тензора напряжений по формулам:

$$\sigma_{kl}(x_i, y_i) = \int_{-a}^a q(s) G_{kl}(x_i - s, y_i) ds,$$

$$k, l = \{1, 2\}, \quad i = 1, \dots, N,$$

где  $G_{kl}(x, y)$  — функции влияния.

По тензору напряжений в точке рассчитывается действующее эквивалентное напряжение и сравнивается с предельным. Таким образом, каждой точке  $A(x_i, y_i)$  ( $i = 1, \dots, N$ ) ставится в соответствие признак принадлежности классу (опасному объему) согласно формуле (6). На рисунках 1 и 2 штриховой линией показана ориентировочная повреждаемая область полуплоскости при действии нагрузок вида (12) и (13) соответственно.

Исходя из условий обеих задач, повреждаемые области должны быть симметричны относительно вертикальной оси, проходящей через центр распределения давления и перпендикулярной к оси  $y = 0$ .

Из рисунков 1 и 2 видно, что определить точки, принадлежащие повреждаемой области  $D$  линейным классификатором, которым является модель логистической регрессии, невозможно, поэтому к набору обучающих данных  $(x_i, y_i, \delta_i)$  ( $i = 1, \dots, N$ ) необходимо применить классифицирующую функцию. В литературе чаще всего применяются следующие виды классифицирующих ядер [14]:

- полиномиальное ядро степени  $d$ :

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = (\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}' \rangle + c)^d;$$

- радиальная базисная функция:

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \exp(-\gamma \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2), \quad \gamma > 0;$$

- сигмоидальное ядро:

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \tanh(k \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}' \rangle + c), \quad k > 0, \quad c < 0.$$

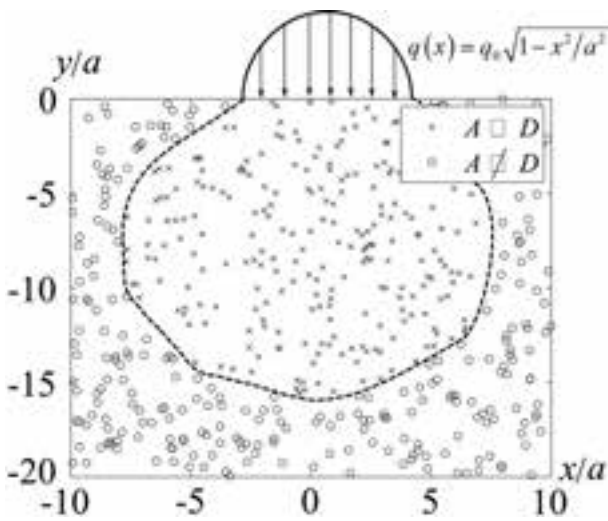


Рисунок 1 — Область повреждаемости для случая несогласованного контакта

Figure 1 — Area of damageability for non-conformal contact case

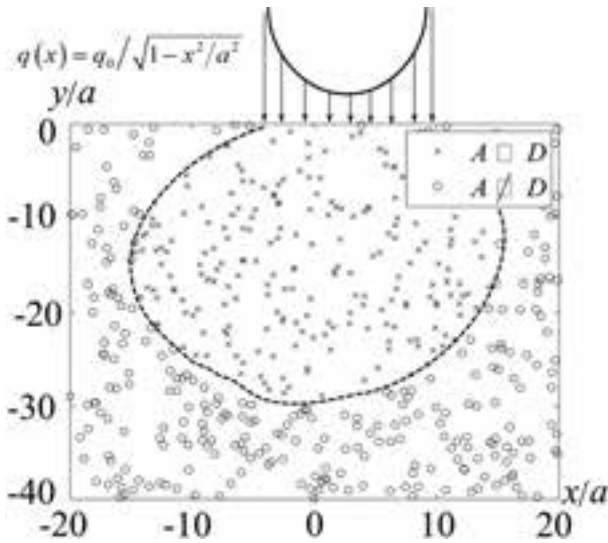


Рисунок 2 — Область повреждаемости для случая вдавливания жесткого штампа

Figure 2 — Area of damageability for rigid stamp interaction case

В обоих рассматриваемых случаях распределения контактного давления наилучший результат показало применения в качестве классифицирующей функции радиальной базисной функции

$$K(x, x') = \exp(-\gamma \|x - x'\|^2).$$

Для определения оптимального значения параметра  $\gamma$  могут применяться различные эволюционные стратегии [15, 16], однако в данной работе значения  $\gamma$  с точностью до трех знаков после запятой определялись методом перебора.

Таблица — Параметры логит-модели  
Table — Logit model parameters

Вид распределения $q(x)$	$\gamma$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$AUC$
$q_0 \sqrt{1 - x^2/a^2}$	0,028	-19,329	0,379	-0,283	22,469	0,7579
$q_0 / \sqrt{1 - x^2/a^2}$	0,021	-12,196	0,175	-0,099	15,694	0,7925

Критерием выбора параметра являлась площадь под ROC-кривой  $AUC$ . В таблице представлены значения параметра  $\gamma$ , вектора коэффициентов  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  и площади  $AUC$  для случая  $a = 1$  и  $q_0 = 1$ . В каждом случае обучающая выборка состояла из  $10^4$  точек полуплоскости. Следует отметить, что для двух переменных исходная модель логистической регрессии имеет вид:

$$P(x_i, y_i, \alpha) = [1 + \exp(-\alpha_0 - \alpha_1 x_i - \alpha_2 y_i)]^{-1},$$

т. е. вектор параметров  $\alpha$  состоит из трех компонент. Однако после введения классифицирующей функции каждой паре  $(x_i, y_i)$  ставится значение  $K_i$ , соответственно вектор значений  $i$ -го объекта принимает вид  $(x_i, y_i, K_i)$ , а вектор параметров —  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ .

На рисунках 3 и 4 показаны конфигурации областей повреждаемости для давлений вида (12) и (13) соответственно после применения к ним классифицирующей функции.

При пороговом значении для бинарного определения принадлежности точки повреждаемой области, равному  $P(x, y, \alpha) = 0,5$ , точность предиктивной модели (8) для случая несогласованного контакта составляет 81,45 %, для случая вдавливания жесткого штампа — 81,18 %.

**ROC-анализ.** Для анализа качества работы классификатора, построенного на основе модели логистической регрессии, используют ROC-кривую, построенную в осях специфичности  $S_p$  и чувствительности  $S_e$ , которые определяют как долю идентифицированных моделью истинно положительных и истинно отрицательных случаев соответственно [8]:

$$S_p = \frac{TN}{TN + FP}; \quad S_e = \frac{TP}{TP + FN}, \quad (14)$$

где  $TN$  — количество верно классифицированных отрицательных ответов;  $TP$  — количество верно классифицированных положительных ответов;  $FP$  — количество отрицательных ответов, классифицированных как положительные;  $FN$  — количество положительных ответов, классифицированных как отрицательные.

На рисунках 5 и 6 показаны ROC-кривые для обоих случаев распределения нормального давления по границе полуплоскости.

Для количественной оценки качества классификатора определяют размер площади  $AUC$ , расположенной между ROC-кривой и осью специфичности  $S_p$ . Площадь  $AUC$  можно рассчитать,

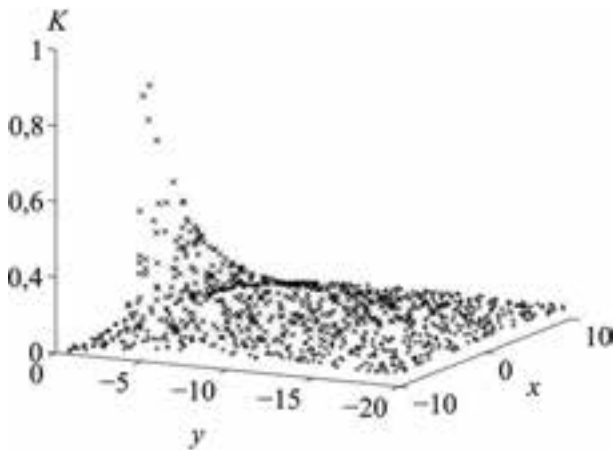


Рисунок 3 — Конфигурация повреждаемой области для случая несогласованного контакта  
Figure 3 — Damage area configuration for non-conformal contact case

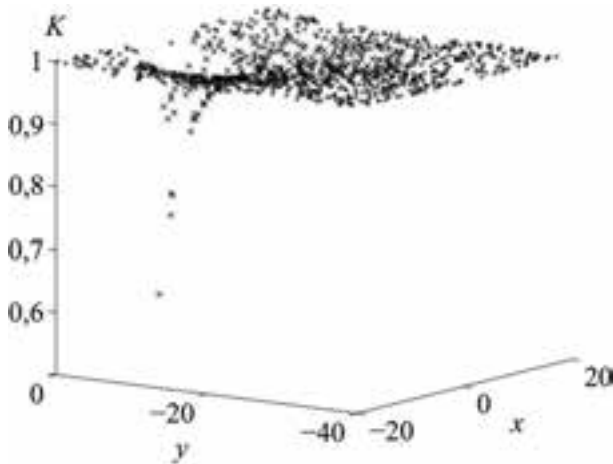


Рисунок 4 — Конфигурация повреждаемой области для случая вдавливания жесткого штампа  
Figure 4 — Damage area configuration for rigid stamp interaction case

используя формулу трапеций для численного интегрирования уравнения ROC-кривой:

$$AUC = \int_0^1 S_e(S_p) d(S_p) = \sum_{k=1}^{K-1} \left( \frac{S_e^{(k+1)} + S_e^{(k)}}{2} \right) (S_p^{(k+1)} - S_p^{(k)}),$$

где  $K$  определяется, исходя из принятого шага в приросте показателя специфичности  $(S_p^{(k+1)} - S_p^{(k)})$ ,

которое в данной работе было принято 0,01, т. е.  $K = 100$ .

Значения  $AUC$  для распределений вида (12) и (13) представлены в таблице. Исходя из экспертной шкалы, принятой в научной литературе [17, 18], качество построенной модели логистической регрессии можно отнести к «хорошему» или «очень хорошему».

**Устойчивость оценки параметров логит-модели.** Обучающая выборка точек  $(x_i, y_i)$  ( $i = 1, \dots, N$ ) для построения модели логистической регрессии

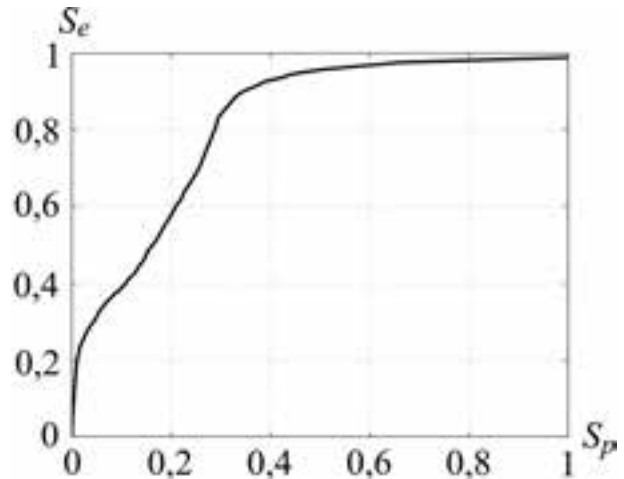


Рисунок 5 — ROC-кривая для случая несогласованного контакта  
Figure 5 — ROC curve for non-conformal contact case

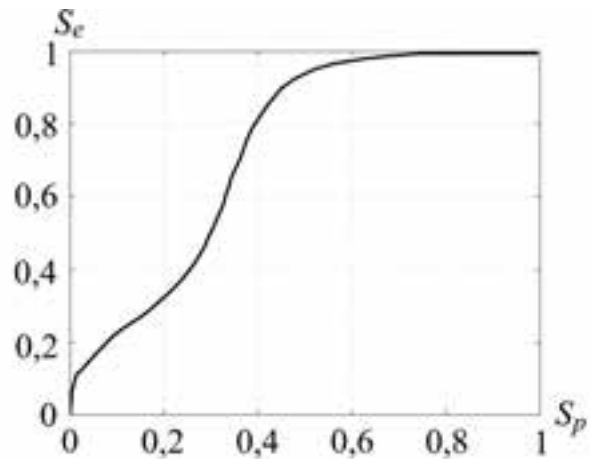


Рисунок 6 — ROC-кривая для случая вдавливания жесткого штампа  
Figure 6 — ROC curve for rigid stamp interaction case

генерируется случайным образом из равномерно распределения по двумерной области, показанной на рисунках 1 и 2. Для разного набора случайных прецедентов значения вектора параметров ROC-кривая и  $AUC$  будут разными. Значения, представленные выше в данной работе, являются усредненными и рассчитаны по пяти разным наборам прецедентов (точек). Стандартная ошибка оценки  $AUC$  подсчитывается по формуле [19]:

$$SE(AUC) = \sqrt{\frac{AUC(1-AUC) + (N-1)(Q_1 - AUC^2) + (m-1)(Q_2 - AUC^2)}{N \cdot m}},$$

где  $Q_1 = AUC / (2 - AUC)$ ;  $Q_2 = 2AUC_2 / (1 + AUC)$ .

По стандартной ошибке с помощью  $Z$ -статистики можно объективно судить о статистической значимости полученной бинарной классификации, а также определить двусторонний доверительный интервал для значения  $AUC$ .

Как уже было отмечено выше, набор обучающих прецедентов для построения модели логи-

стической регрессии по оценке повреждаемости среды генерировался случайным образом из равномерного распределения по двумерной области, в которой содержится опасный объем. Для случайной выборки прецедентов важно понимать устойчивость работы численных алгоритмов по оценке параметров логит-модели и, соответственно, по качеству классификации. На рисунках 5 и 6 представлены диаграммы размаха для точности классификации (пороговое значение  $P(x, y, \alpha) = 0,5$ ) и площади под ROC-кривой  $AUC$  при различном количестве обучающих прецедентов, из которых можно определить степень разброса и асимметрию в оценке данных показателей.

Из диаграмм на рисунках 7 и 8 видно, что с увеличением количества прецедентов для обучения модели разброс в оценке точности классификации  $\epsilon$  и качестве работы регрессии  $AUC$  снижается. Для точности классификации при размере обучающей выборки  $10^3$  разность между первым и третьим квартилем составляет 1,7 %, для размера выборки  $10^6$  — 0,05 %. Для показателя  $AUC$  аналогичные показатели равны 0,017 и 0,0011 со-

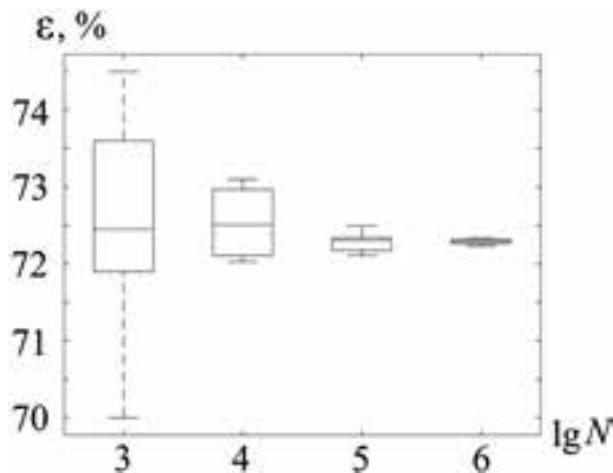


Рисунок 7 — Диаграмма размаха для точности бинарной классификации

Figure 7 — Box plot for the binary classification accuracy

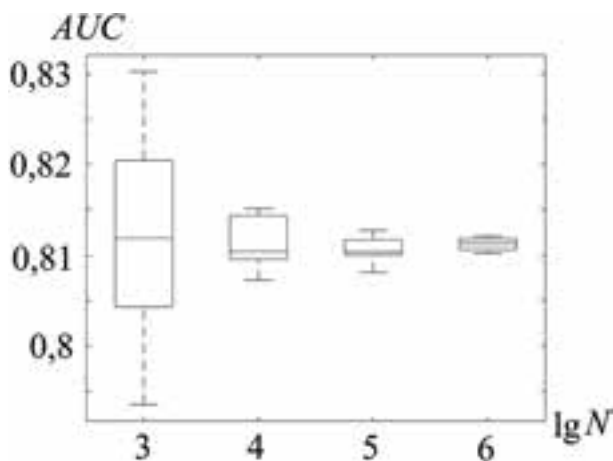


Рисунок 8 — Диаграмма размаха для площади под ROC-кривой  $AUC$

Figure 8 — Box plot for the area under ROC curve  $AUC$

ответственно. Снижение в разбросе показателей позволяет сделать вывод об устойчивости численных алгоритмов оценки параметров модели логистической регрессии и качестве бинарных классификаторов.

**Заключение.** При вычислении повреждаемости твердого тела значительная часть машинного времени уходит на определение всех компонент тензоров напряжений и деформаций в рассматриваемой точке, причем точка с ближайшей к ней окрестностью может как принадлежать повреждаемой области, так и нет. В случае если точка, в которой рассчитано напряженно-деформированное состояние, не принадлежит повреждаемой области, в дальнейших вычислениях она не участвует.

Модель логистической регрессии может выступать эффективным средством аппроксимации композиции функций по расчету напряженно-деформированного состояния и бинарной классификации принадлежности рассматриваемой точки повреждаемой области и, соответственно, снижения затрат машинного времени на проведение вычислительных процедур. Опасный объем в твердом теле, как правило, является областью нелинейной, поэтому перед обучением логит-модели необходимо ввести классифицирующую функцию, которая позволит провести гиперплоскость по линейному разделению обучающей выборки.

В работе представлено применение модели логистической регрессии по вычислению повреждаемой области в полуплоскости при действии на границе полуплоскости распределенной нагрузки. Исходя из принятой экспертной шкалы оценки, работу бинарного классификатора можно квалифицировать как «хорошую» или «очень хорошую». Показана устойчивость алгоритмов оценки параметров логит-модели при генерировании обучающих прецедентов случайным образом.

## Список литературы

1. Vapnik, V.N. The nature of statistical learning theory / V.N. Vapnik. — NY: Springer, 1995. — 314 p.
2. Dreiseitl, S. Logistic regression and artificial neural network classification models: a methodology review / S. Dreiseitl, L. Ohno-Machado // J. of biomedical informatics. — 2003. — Vol. 35. — Pp. 352–359. DOI: 10.1016/S1532-0464(03)00034-0.
3. Maalouf, M. Logistic regression in data analysis: an overview / M. Maalouf // Int. J. Data Analysis Techniques and Strategies. — 2011. — Vol. 3, iss. 3. — Pp. 281–299. DOI: 10.1504/IJDATS.2011.041335.
4. Niu, L. A review of the application of logistic regression in educational research: common issues, implications, and suggestions / L. Niu // Educational review. — 2020. — Vol. 72, iss. 1. — Pp. 41–67. DOI: 10.1080/00131911.2018.1483892.
5. Щербаков, С.С. Механика трибофатических систем / С.С. Щербаков, Л.А. Сосновский. — Минск: БГУ, 2011. — 407 с.
6. Мармыш, Д.Е. Численное моделирование повреждаемости силовой системы / Д.Е. Мармыш // Теоретическая и прикладная механика. — 2017. — № 32. — С. 312–316.
7. Мармыш, Д.Е. Численно-аналитический метод граничных элементов в плоской контактной задаче теории упругости / Д.Е. Мармыш // Прил. к журн. «Вестн. НАНБ». — 2013. — № 3. — С. 42–46.
8. Hosmer, D.W. Applied logistic regression / D.W. Hosmer, S. Lemeshow. — 2nd ed. — NY: Wiley, 2000. — 375 p.

9. Тырсин, А.Н. Оценивание логистической регрессии как экстремальная задача / А.Н. Тырсин, К.К. Костин // Вестн. Томского гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. — 2017. — № 40. — С. 52–60.
10. Галин, Л.А. Контактные задачи теории упругости / Л.А. Галин. — М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит-ры, 1953. — 265 с.
11. Jonson, K.L. Contact mechanics / K.L. Jonson. — Cambridge: Cambridge University Press, 1985. — 510 p.
12. Popov, V.L. Contact mechanics and friction. Physical principles and applications / V.L. Popov. — Berlin: Springer, 2010. — 362 p. DOI: 10.1007/978-3-642-10803-7.
13. Мармыш, Д.Е. Сходимость метода аналитического граничного элемента при анализе напряженного состояния и состояния повреждаемости среды / Д.Е. Мармыш // Теоретическая и прикладная механика. — 2020. — № 35. — С. 92–98.
14. Bishop, C.M. Pattern recognition and machine learning / C.M. Bishop. — Singapore: Springer, 2006. — 738 p.
15. Phienthrakul, T. Evolutionary strategies for multi-scale radial basis function kernels in support vector machines / T. Phienthrakul, B. Kijssirikul // Soft computing. — 2010. — Vol. 14. — Pp. 681–699. DOI: 10.1007/s00500-009-0458-5.
16. A novel LS-SVMs hyper-parameter selection based on particle swarm optimization / X.C. Guo [et al.] // Neurocomputing. — 2008. — Vol. 71. — Pp. 3211–3215. DOI: 10.1016/j.neucom.2008.04.027.
17. Zweig, M.H. ROC plots: a fundamental evaluation tool in clinical medicine / M.H. Zweig, G. Campbell // Clinical chemistry. — 1993. — Vol. 39, iss. 4. — Pp. 561–577.
18. Kumari, R. Machine learning: a review on binary classification / R. Kumari, S.K. Srivastava // Int. J. of Computer Applications. — 2017. — Vol. 160, iss. 7. — Pp. 11–15. DOI: 10.5120/ijca2017913083.
19. Гайдышев, И.П. Оценка качества бинарных классификаторов / И.П. Гайдышев // Вестн. Омского ун-та. Математика. — 2016. — № 1. — С. 14–17.

MARMYSH Dzianis E., Ph. D. in Phys. and Math.

Associate Professor of the Department of Theoretical and Applied Mechanics<sup>1</sup>

Vice-dean of the Dalian University of Technology and Belarusian State University Joint Institute<sup>2</sup>

E-mail: marmyshde@bsu.by

<sup>1</sup>Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

<sup>2</sup>Dalian University of Technology, Dalian, People's Republic of China

Received 08 July 2020.

## APPLICATION OF LOGISTIC REGRESSION IN CALCULATION OF DAMAGEABILITY OF SOLID DEFORMABLE BODY

*The paper proposes a logistic regression model for estimating the damageability of a solid deformable body. A training sample is randomly generated from a uniform distribution over the area containing the dangerous volume. For linear separability of the training sample, a classifying kernel is used in the form of a radial basis function. The regression parameters were estimated using the maximum likelihood method, then the system of nonlinear equations was solved by the Newton-Raphson method. To determine the quality of the classifier, a ROC analysis was performed, which consists in constructing the ROC curve and calculating the area between the ROC curve and the specificity axis. For adequate assessment of the work, the logistic regression model is used to calculate the damage of a half-plane when a normally distributed load acts on its boundary. The paper also analyzes the stability of the model parameter estimation algorithms when generating a random sample of training sample.*

**Keywords:** mechanics of damageability, machine learning, logistic regression, logit model, discriminant function

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2020-1-54-46-53>

### References

1. Vapnik V.N. *The nature of statistical learning theory*. New York, Springer, 1995. 314 p.
2. Dreiseitl S., Ohno-Machado L. Logistic regression and artificial neural network classification models: a methodology review. *Journal of biomedical informatics*, 2003, vol. 35, pp. 352–359. DOI: 10.1016/S1532-0464(03)00034-0.
3. Maalouf M. Logistic regression in data analysis: an overview. *International journal of data analysis techniques and strategies*, 2011, vol. 3, iss. 3, pp. 281–299. DOI: <https://doi.org/10.1504/IJDATS.2011.041335>.
4. Niu L. A review of the application of logistic regression in educational research: common issues, implications, and suggestions. *Educational review*, 2020, vol. 72, iss. 1, pp. 41–67. DOI: <https://doi.org/10.1080/00131911.2018.1483892>.
5. Sherbakov S.S., Sosnovskiy L.A. *Mekhanika tribofaticheskikh sistem* [Mechanics of tribo-fatigue systems]. Minsk, Belorusskiy gosudarstvennyy universitet Publ., 2011. 407 p. (in Russ.).
6. Marmysh D.E. Chislennoe modelirovanie povrezhdaemosti silovoy sistemy [Numerical simulation of force system damage]. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika*, 2017, no. 32, pp. 312–316 (in Russ.).
7. Marmysh D.E. Chislennno-analiticheskiy metod granichnykh elementov v ploskoy kontaktnoy zadache teorii uprugosti [Numerical-analytical method of boundary elements in a plane contact problem of the theory of elasticity]. *Prilozhenie k zhurnalu "Izvestiya Natsionalnoy akademii nauk Belarusi"*, 2013, vol. 3, pp. 42–46 (in Russ.).
8. Hosmer D.W., Lemeshow S. *Applied logistic regression*. New York, Wiley, 2000. 375 p.
9. Tyrsin A.N., Kostin K.K. Otsenivanie logisticheskoy regressii kak ekstremalnaya zadacha [Consideration of estimation of logistic regression as an optimization problem]. *Tomsk state*

- university journal of control and computer science*, 2017, vol. 40, pp. 52–60 (in Russ.).
10. Galin L.A. *Kontaktnye zadachi teorii uprugosti* [Contact problems of elasticity theory]. Moscow, Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoy literatury Publ., 1953. 265 p. (in Russ.).
  11. Jonson K.L. *Contact mechanics*. Cambridge, Cambridge University Press, 1985. 510 p.
  12. Popov V.L. *Contact mechanics and friction. Physical principles and applications*. Berlin, Springer, 2010. 362 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-10803-7>.
  13. Marmysh D.E. Skhodimost metoda analiticheskogo granichnogo elementa pri analize napryazhennogo sostoyaniya i sostoyaniya povrezhdaemosti sredy [Convergence of the analytical boundary element method in the analysis of the stress state and the damage state of the medium]. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika*, 2020, no. 35, pp. 92–98 (in Russ.).
  14. Bishop C.M. *Pattern recognition and machine learning*. Singapore, Springer, 2006. 738 p.
  15. Phienthrakul T., Kijisirikul B. Evolutionary strategies for multi-scale radial basis function kernels in support vector machines. *Soft computing*, 2010, vol. 14, pp. 681–699. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00500-009-0458-5>.
  16. Guo X.C., Yanga J.H., Wuac C.G., Wanga C.Y., Lianga Y.C. A novel LS-SVMs hyper-parameter selection based on particle swarm optimization. *Neurocomputing*, 2008, vol. 71, pp. 3211–3215. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2008.04.027>.
  17. Zweig M.H., Campbell G. ROC plots: a fundamental evaluation tool in clinical medicine. *Clinical chemistry*, 1993, vol. 39, iss. 4, pp. 561–577.
  18. Kumari R., Srivastava S.K. Machine learning: a review on binary classification. *International journal of computer applications*, 2017, vol. 160, iss. 7, pp. 11–15. DOI: <https://doi.org/10.5120/ijca2017913083>.
  19. Gaidyshev I.P. Otsenka kachestva binarnykh klassifikatorov [Quality assessment of binary classifiers]. *Herald of Omsk university*, 2016, vol. 1, pp. 14–17 (in Russ.).